F2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1-2

ANUL VI

IANUARIE — IUNIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1963 1976

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

1-2

ANUL VI

IANUARIE — IUNIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F
2557

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, rezistenţa materialelor, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, frecare, ungere, uzură).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, utilizarea energiei eoliene, etc.).

— Construcţii de maşini (cinematica mecanismelor, studiul solicitărilor în diferite maşini şi metode moderne de calcul ale acestora, coeficienţi de siguranţă, procese tehnologice, automatizare, mecanizare).

— Mecanica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studii asupra probemelor specifice materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidrotehnică şi Maşini hidraulice (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajarea cursurilor de apă).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice, precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă şi franceză. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză, germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de Mecanică aplicată, Bucureşti, Str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Budap... ...yetem
...ára
Folyóiratelter
5060

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VI, nr. 1—2 Ianuarie—iunie 1955

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

MECANICA ŞI REZISTENŢA MATERIALELOR

RADU P. VOINEA, Observaţii asupra principiului lucrului mecanic virtual 9

N. S. PÎRVULESCU, Flambajul tijelor verticale încastrate la extremitatea inferioară şi adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare 17

AEROMECANICĂ

AL. MARINESCU şi ŞT. SĂVULESCU, Cercetări experimentale asupra repartiţiei circulaţiei de-a lungul anvergurii pe aripa eliptică dreaptă şi în săgeată 39

I. NEDELESCU, Determinarea experimentală a distribuţiei presiunii datorite vîntului pe acoperişuri de tribune 59

I. DRESCHER, Asupra ventilaţiei băilor industriale prevăzute cu suflantă şi aspirator marginal . . 67

V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra vriei permanente a avioanelor 73

UNGERE-FRECARE

N. TIPEI, Încercări experimentale pe lagăre cu alunecare 89

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU, Cîteva aspecte ale utilizării uleiurilor lubrifiante din grupe standardizate inferioare 107

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE ŞI TEHNOLOGIE

T. DUMITRESCU, M. NICOLAID şi P. ILIESCU, Studiu asupra comportării fontelor cu grafit nodular la temperaturi înalte 127

GH. I. PANĂ, Contribuţii la stabilirea influenţei diferitelor tratamente higro- şi hidrotermice asupra proprietăţilor fizico-mecanice ale lemnului de fag 161

REFERATE ŞTIINŢIFICF ŞI TEHNICE

M. ARCAN şi E. NICOLAU, Determinarea exactă a diferenţei tensiunilor principale prin fotoelasticimetrie cu compensatorul «Coker» 181

A. FROIMESCU, Grinzi continue din beton precomprimat şi folosirea lor la realizarea grinzilor principale de poduri 187

I. STROESCU, Un model nou de anemograf 217

RECENZII 219

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержат нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, сопротивление материалов, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, трение, смазки, износ).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, использование энергии ветра).

— Машиностроение (кинематика механизмов, исследование напряжения в различных машинах и современные методы расчета последнего, коэффициенты запаса, технологические процессы, автоматизация, механизация).

— Строительную механику (методы статического и динамического расчета сооружений, исследования характерных задач неоднородных материалов, геомеханика, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидротехнику и гидравлические машины (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, руслообразование).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также распространения ценных работ, принимая с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в 3 экземплярах, написанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять краткое содержание на румынском, русском и французском языках. Краткое содержание должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухрест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VI. № 1—2 Январь—июнь 1955

СОДЕРЖАНИЕ

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

Механика и сопротивление материалов

Р. П. ВОЙНЯ, К исследованию принципа виртуальной механической работы 9

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Изгиб вертикальных штоков с вделанным нижним концом и критические глубины для насосов с трубчатыми штангами 17

АЭРОМЕХАНИКА

А. МАРИНЕСКУ и Ш. СЭВУЛЕСКУ, Экспериментальные исследования распределения циркуляции вдоль размаха прямого и стреловидного элиптического крыла 39

Н. НЕДЕЛЕСКУ, Экспериментальное определение распредлеения давления ветра на крыши трибун 59

И. ДРЕШЕР, Вентиляция применяемых в промышленности ванн с продувающим и расположенным на краю их аспирационным устройством 67

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Об установившемся штопоре самолетов 73

СМАЗКА — ТРЕНИЕ

Н. ТИПЕЙ, Экспериментальные испытания подшипников скольжения 89

Л. РОЗЯНУ и О. ПРЕОЦЕСКУ, К вопросу об использовании смазочных масел низших стандартных сортов 107

ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ТЕХНОЛОГИЯ

Т. ДУМИТРЕСКУ, М. НИКОЛАИД и П. ИЛИЕСКУ, Исследование изменения свойств чугунов с узелковым графитом при высоких температурах 127

Г. ПАНЭ, К вопросу об установлении влияния различных гигро- и гидротехнических обработок на физико-механические свойства древесины бука 161

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

М. АРКАН и Е. НИКОЛАУ, Точное определение разницы основных напряжений путем измерения фотоэластичности при помощи компенсатора Кокера 181

А. ФРОИМЕСКУ, Неразрезные балки из предварительно сжатого бетона и использование их в качестве основных мостовых балок 187

И. СТРОЕСКУ, Новая модель анемографа 217

РЕЦЕНЗИИ 219

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Academie de la R.P.R.

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment:

— Mécanique générale (élasticité, résistance des matériaux, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, frottement, lubrification, usure);

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne, etc.);

— Construction mécanique (cinématique des mécanismes, méthodes modernes de calcul des différentes machines, processus technologiques, automatisation, etc.);

— Mécanique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, géotechnique, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction);

— Hydrotechnique et machines hydrauliques (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés, dactylographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VI, nos 1—2 Janvier—juin 1955

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

MÉCANIQUE ET RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

R. P. VOINEA, Observations sur le principe du travail mécanique virtuel 9

N. S. PÎRVULESCU, Le flambage des tiges verticales encastrée à l'extrémité inférieure et les profondeurs critiques des pompes à tiges tubulaires 17

AÉROMÉCANIQUE

AL. MARINESCU et ŞT. SĂVULESCU, Recherches expérimentales sur la répartition de la circulation le long de l'envergure, d'une aile elliptique droite et en flèche 39

I. NEDELESCU, Détermination expérimentale de la distribution des pressions dues au vent, sur les toitures des tribunes 59

I. DRESCHER, Au sujet de la ventilation des bains industriels pourvus d'une soufflante et d'un aspirateur marginal 67

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur la vrille permanente des avions 73

LUBRIFICATION-FROTTEMENT

N. TIPEI, Recherches expérimentales sur les paliers lisses 89

L. ROZEANU et O. PREOŢESCU, Quelques aspects de l'utilisation des huiles lubrifiantes des groupes standardisées inférieures 107

ESSAIS DES MATÉRIAUX ET TECHNOLOGIE

T. DUMITRESCU, M. NICOLAID et P. ILIESCU, Etude sur le comportement des fontes à graphite nodulaire à des températures élevées 127

GH. I. PANĂ, Contributions à l'établissement de l'influence des différents traitements hygro- et hydrothermiques sur les propriétés physico-mécaniques du bois de hêtre 161

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

M. ARCAN et E. NICOLAU, La détermination exacte de la différence des tensions principales par la photoélasticimétrie, à l'aide du compensateur « Coker » 181

A. FROIMESCU, Poutres continues en béton précontraintet leur emploi à la réalisation des poutres des ponts 187

I. STROESCU, Un nouveau modèle d'anémographe 217

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 219

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

COMITETUL DE REDACŢIE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI — redactor responsabil;
A. BELEŞ; A. BĂRGLĂZAN; M. ARCAN; N. TIPEI.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

MECANICA ŞI REZISTENŢA MATERIALELOR

OBSERVAŢII ASUPRA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

DE

RADU P. VOINEA

În cele ce urmează vom analiza condiţiile în care principiul lucrului mecanic virtual este suficient pentru echilibrul unui sistem de forţe ce acţionează asupra unui sistem de puncte materiale supus la legături ideale.

Vom considera cazul legăturilor olonome-scleronome. Fie P_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ n puncte materiale, de mase m_i şi de coordonate x_i, y_i, z_i, acţionate de forţele $\overline{F}_i$ *) de proiecţii X_i, Y_i, Z_i, pe axele triedrului cartezian ortogonal $O\,x\,y\,z$. Vom admite că forţele $\overline{F}_i$ sînt poziţionale.

Pentru uşurinţa scrisului vom nota în cele ce urmează cu x_ν una din coordonatele x_i, y_i, z_i ale punctelor P_i şi cu X_ν una dintre proiecţiile X_i, Y_i, Z_i ale forţelor $\overline{F}_i$. În aceste condiţii ν ia valori de la 1 la 3 n. Vom nota încă 3 $n = N$.

Legăturile sistemului fiind olonome şi scleronome, ele pot fi exprimate prin p relaţii de forma

$$\varphi_j (x_1, x_2, \ldots x_N) = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots p) \tag{1}$$

pe care, în cele ce urmează, le vom presupune *independente*.

Aceste relaţii permit să se exprime coordonatele x_ν în funcţie de $N - p = h$, coordonate generalizate independente, q_k $(k = 1, 2 \ldots h)$ sub formă

$$x_\nu = x_\nu (q_1, q_2 \ldots q_k). \tag{2}$$

CONDIŢIA DE ECHILIBRU A SISTEMULUI DE FORŢE, STABILITĂ CU AJUTORUL PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Dacă notăm cu δx_ν, deplasarea virtuală corespunzătoare coordonatei x_ν, expresia lucrului mecanic virtual este

$$\delta L = \sum_1^N X_\nu \delta x_\nu \tag{3}$$

---

*) Prin $\overline{F}_i$ se înţelege rezultanta forţelor care produc lucru mecanic virtual şi acţionează asupra punctului P_i.

iar condiţia de echilibru a sistemului de forţe, $\delta L = 0$, devine

$$\sum_{1}^{N} X_\nu \delta x_\nu = 0. \tag{4}$$

Ţinînd seama de relaţiile (2) din care se deduce

$$\delta x_\nu = \sum_{1}^{h} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \delta q_k , \tag{5}$$

condiţia de echilibru (4) devine

$$\sum_{k=1}^{h} \left(\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \tag{6}$$

Pentrucă parametrii q_k sînt independenţi, ecuaţia (6) este echivalentă cu h ecuaţii

$$\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} = 0. \tag{7}$$

Relaţia (7) constituie condiţia de echilibru a sistemului, dacă se admite valabilitatea principiului lucrului mecanic virtual.

CONDIŢIA DE ECHILIBRU A SISTEMULUI DE FORŢE, STABILITĂ CU AJUTORUL PRINCIPIILOR MECANICEI CLASICE

Vom admite, de data aceasta, valabilitatea următoarelor principii:

1. Un sistem de puncte materiale este în echilibru, dacă toate punctele ce aparţin sistemului sînt în echilibru.

2. Un punct material, aparţinînd unui sistem, este în echilibru dacă rezultanta tuturor forţelor (propriu-zise şi de legătură) ce acţionează asupra punctului material este nulă.

3. Un punct material acţionat de forţe poziţionale rămîne în repaus, dacă la un moment dat are viteza şi acceleraţia nulă [1].

Să determinăm condiţiile de echilibru, bazîndu-ne pe aceste principii.

Va trebui, în prealabil, să găsim expresia forţelor de legătură. Pentru că legăturile sînt ideale, rezultă că reacţiunile sînt vectori coliniari cu gradienţii funcţiilor φ_j. Atunci proiecţia pe direcţia coordonatei x_ν a forţei de legătură ce înlocuieşte relaţia $\varphi_j = 0$, va fi

$$\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu},$$

unde λ_j este un factor de proporţionalitate între mărimea forţei de legătură şi mărimea gradientului.

Aplicînd al doilea principiu enunţat mai sus (principiul forţelor de legătură), rezultă condiţiile de echilibru sub forma sistemului de ecuaţii

$$X_\nu + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} = 0. \tag{8}$$

Sistemul (8), astfel obţinut, are N ecuaţii şi $N + p$ necunoscute (N coordonate x_ν şi p parametri λ_j). Pentru rezolvarea sa, se poate proceda în două moduri:

— Se ataşează sistemului (8), sistemul (1), formîndu-se în felul acesta un sistem de $N + p$ ecuaţii cu $N + p$ necunoscute.

— Se înlocuieşte în sistemul (8) coordonatele cu valorile lor date de (2) şi se ajunge astfel la un sistem de N ecuaţii cu N necunoscute: $N - p = h$ coordonate generalizate q_k şi p parametri λ_j.

Vom presupune că se aplică procedeul al doilea. De aceea, *în cele ce urmează vom admite că sistemul* (8) *are N necunoscute.*

★

Pe baza celor stabilite mai sus, teorema de necesitate a principiului lucrului mecanic virtual revine la a arăta că relaţiile (7) sînt o consecinţă a relaţiilor (8). Teorema de suficienţă revine la a arăta că, dacă relaţiile (7) sînt satisfăcute, atunci sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} (\nu = 1, 2, \ldots N) \tag{9}$$

admite, în cazul cînd condiţiile iniţiale sînt $x_\nu = x_\nu^0$ şi $\dot{x}_\nu = 0$, soluţiile $x_\nu = x_\nu^0$, pentru parametrii λ_j rezultînd valori finite. Ţinînd seama de principiul inerţiei, este suficient să se arate că la $t = 0$, $\ddot{x}_\nu^0 = 0$.

NECESITATEA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Să multiplicăm relaţiile (8) cu $\dfrac{\partial x_\nu}{\partial q_k}$ şi să le adunăm. Obţinem

$$\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} = 0 . \tag{10}$$

Considerînd că funcţia φ_j depinde de coordonatele generalizate q_k prin intermediul coordonatelor x_ν, se recunoaşte uşor că

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} . \tag{11}$$

S-a presupus însă mai sus că în relaţiile (8) s-au făcut substituţiile (2). Cum relaţiile (2) sînt o consecinţă a relaţiilor (1), rezultă că, înlocuind în relaţia $\varphi_j = 0$ pe x_ν cu expresiile date de (2), se obţine o identitate $\varphi_j \equiv 0$. În aceleaşi condiţii şi

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} = 0. \tag{12}$$

Rezultă

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \equiv 0. \tag{13}$$

Atunci relaţia (10) se reduce la (7) şi necesitatea principiului lucrului mecanic virtual, este astfel demonstrată.

SUFICIENȚA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Pentru a demonstra suficiența principiului lucrului mecanic virtual, este nevoie să facem unele restricții. Într-adevăr, pentru ca, oricare ar fi sistemul de forțe exterioare, să rezulte valori finite pentru parametrii λ_j, este neapărat necesar, în virtutea teoremei lui Rouché, ca rangul matricei

$$\left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} \right\|, \tag{14}$$

care are N linii și p coloane, să fie egal cu p *).

În cele ce urmează, vom admite că rangul matricei (14) este egal cu p.

Să considerăm sistemul de ecuații (9) în care vom înlocui derivatele $\dot{x}_\nu$ și $\ddot{x}_\nu$ în funcție de coordonatele generalizate q_k și de derivatele acestora în raport cu timpul,

$$\dot{x}_\nu = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_\nu \tag{15}$$

și

$$\ddot{x}_\nu = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{h} \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l. \tag{16}$$

Sistemul de ecuații diferențiale (9) devine

$$m_\nu \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \ddot{q}_k + m_\nu \sum_{k=1}^{h} \sum_{l=1}^{h} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l = X_\nu + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu}. \tag{17}$$

Să facem ipoteza că la $t = 0$, $\dot{x}_\nu = 0$. Admițînd că matricea

$$\left\| \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \right\|, \tag{18}$$

care are N linii și h coloane ($N > h$), are rangul h, rezultă din (15) că la $t = 0$ și $\dot{q}_k = 0$. Într-adevăr, sistemul de ecuații ce se obține scriind $\dot{x}_\nu = \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0$ este un sistem omogen care admite ca soluții unice $\dot{q}_k = 0$, numai dacă rangul matricei (18) este egal cu h.

---

*) Dacă derivatele $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu}$ sînt exprimate în funcție de coordonatele x_ν, atunci toți determinanții de ordinul p ai matricei (14) sînt diferiți de zero, deoarece dacă acești determinanți ar fi *identic nuli*, funcțiile φ_j ar fi în dependență funcțională, ceea ce ar contrazice ipoteza făcută la începutul articolului.

Menționăm însă că, dacă derivatele $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu}$ sînt exprimate în funcție de coordonatele generalizate q_k, așa cum s-a presupus, de altfel, atunci cînd s-au stabilit ecuațiile (8), atunci este posibil ca toți determinanții de rangul p ai matricei (14) să fie nuli și deci matricea (14) să aibă un rang mai mic decît p.

Să multiplicăm ecuațiile (17) cu $\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}$ și să însumăm în raport cu ν; obținem h ecuații de forma

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{h} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{h}\sum_{l=1}^{h} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_k\,\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l = \sum_{\nu=1}^{N} X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \tag{19}$$

pentrucă

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\equiv 0,$$

în virtutea relației (13). Relația (19) trebuie să aibă loc în orice moment t, deci și la $t=0$. Dacă notăm cu

$$A=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{h} m_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\ddot{q}_k,\quad B=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{h}\sum_{l=1}^{h}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial q_k\,\partial q_l}\dot{q}_k\dot{q}_l,$$

$$C=\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}, \tag{20}$$

rezultă relația $A+B=C$. La $t=0$

$$A(0)=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{h} m_\nu\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\right)_0\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial q_k}\right)_0\ddot{q}_k^0,\qquad B(0)=0,\qquad C(0)=0. \tag{21}$$

Relația $B(0)=0$ are loc în virtutea condițiilor inițiale, iar relația $C(0)=0$ are loc în virtutea relației (7), pe care am admis-o ca adevărată în momentul inițial.

Rezultă cu necesitate

$$A(0)=\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k=1}^{h} m_\nu\left(\frac{\partial x_v}{\partial q_s}\right)_0\left(\frac{\partial x_v}{\partial q_k}\right)_0\ddot{q}_k^0=0. \tag{22}$$

Sistemul (22) este un sistem omogen în necunoscutele $\ddot{q}_k^0$.

Determinantul sistemului este

$$\Delta=\left|\sum_{v=1}^{N} m_v\left(\frac{\partial x_v}{\partial q_s}\right)_0\left(\frac{\partial x_v}{\partial q_k}\right)_0\right|, \tag{23}$$

adică un determinant Gramm obținut cu ajutorul produselor scalare ale vectorilor de componente

$$\sqrt{m_\nu}\frac{\partial x_v}{\partial q_s},\quad (\nu=1,2\ldots N)$$

din spațiul euclidian cu N dimensiuni. Or, se știe [2] că acești determinanți sînt întotdeauna pozitivi, dacă vectorii de componente $\sqrt{m_\nu}\frac{\partial x_v}{\partial q_s}$ sînt linear independenți, ceea ce este cazul, deoarece s-a presupus că matricea (18) are rangul h.

Determinantul (23) fiind diferit de zero, sistemul omogen de ecuații (22) admite ca singure soluții posibile

$$\ddot{q}_k^0=0. \tag{24}$$

Ca urmare a relaţiilor (24) şi a condiţiilor iniţiale $\dot{q}_k^0 = 0$, rezultă din (16)

$$\ddot{x}_\nu^0 = 0. \tag{25}$$

Atunci în virtutea principiului inerţiei, cum iniţial $\dot{x}_\nu^0 = 0$ şi $\ddot{x}_\nu^0 = 0$, rezultă că punctele sistemului vor rămîne în repaus, deoarece forţele au fost presupuse poziţionale.

CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că suficienţa principiului lucrului mecanic virtual este condiţionată de două restricţii:

a) Rangul matricei,

$$\left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\nu} \right\|,$$

în care s-au înlocuit derivatele parţiale în funcţie de coordonatele generalizate q_k, să fie egal cu p.

b) Rangul matricei

$$\left\| \frac{\partial x_\nu}{\partial q_k} \right\|,$$

să fie egal cu h pentru valorile coordonatelor generalizate ce corespund poziţiei de echilibru.

Vom denumi sistemele care nu îndeplinesc una din aceste condiţii, sau ambele condiţii, *sisteme critice*.

Folosind imaginea din spaţiul configuraţiilor al lui Lagrange, putem deosebi sistemele critice în modul următor: La unele sisteme critice sînt posibile deplasări infinit mici ale sistemului, fără ca imaginea sa din spaţiul configuraţiilor să se deplaseze.

La celelalte sisteme critice, dimpotrivă, sînt posibile deplasări infinit mici ale imaginii din spaţiul configuraţiilor, fără ca sistemul să se deplaseze, deoarece, aşa cum s-a arătat, în acest caz sînt posibile valori $\dot{q}_k \neq 0$, chiar cînd $\dot{x}_\nu = 0$. Aceasta are loc însă numai pentru anumite valori ale coordonatelor generalizate q_k.

Putem deci enunţa teorema:

Principiul lucrului mecanic virtual constituie o condiţie suficientă de echilibru pentru sistemele necritice.

Folosind aceeaşi imagine din spaţiul configuraţiilor, în cazul unui sistem necritic, la o deplasare infinit mică a sistemului, corespunde întotdeauna o deplasare infinit mică a punctului reprezentativ din spaţiul configuraţiilor.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор приводит некоторые данные, способствующие доказательству достаточности вышеуказанного принципа в случае системы материальных точек с идеальными голономными и

склерономными связями. Автор сравнивает условие равновесия (7), получающееся при применении принципа механической работы, с условием равновесия (8), получающимся при применении принципа сил связи. Изучая движение системы в непосредственной близости положения равновесия, автор показывает, что принцип виртуальной механической работы является достаточным условием лишь в том случае, когда порядок матрицы (14) равен p (число уравнений связи) и порядок матрицы (18) равен h (число обобщенных координат). Системы, не удовлетворяющие этим условиям, для которых принцип виртуальной механической работы не является достаточным условием, называются критическими системами.

OBSERVATIONS SUR LE PRINCIPE DU TRAVAIL MÉCANIQUE VIRTUEL

(RÉSUMÉ)

L'article représente une contribution à la démonstration de la suffisance de ce principe, dans le cas d'un système de points matériels, à liaisons idéales, holonomes et scléronomes. L'Auteur compare la condition d'équilibre (7) résultant de l'application du principe du travail mécanique virtuel, à la condition d'équilibre (8), résultant de l'application du principe des forces de liaison. En étudiant le mouvement du système, au voisinage immédiat de la position d'équilibre, l'Auteur démontre que le principe du travail mécanique virtuel ne constitue une condition suffisante que dans le cas où le rang de la matrice (14) est égal à p (nombre des équations de liaison) et le rang de la matrice (18) est égal à h (nombre des coordonnées généralisées). Les systèmes qui ne satisfont pas à ces conditions et pour lesquels le principe du travail mécanique virtuel ne constitue pas une condition suffisante, portent le nom de systèmes critiques.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Vîlcovici, *Asupra condițiilor inițiale în mecanică.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. III, nr. 3, iulie – august – septembrie 1951, p. 303.
2. I. M. Ghelfand, *Lecții de algebră liniară.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953, p. 65–68.
3. G. K. Suslov, *Mecanica rațională.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1950, vol. II, p. 1–16.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

MECANICA ŞI REZISTENŢA MATERIALELOR

FLAMBAJUL TIJELOR VERTICALE ÎNCASTRATE LA EXTREMITATEA INFERIOARĂ ŞI ADÎNCIMILE CRITICE ALE POMPELOR CU PRĂJINI TUBULARE

DE

N. S. PÎRVULESCU

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

INTRODUCERE

Grupul cazurilor cu tijele articulate la extremitatea inferioară a fost dezvoltat într-o lucrare precedentă [1]. Procedăm în mod analog şi în cazurile tijelor încastrate la extremitatea inferioară, folosind relaţia generală de instabilitate găsită anterior [2]

$$\Xi_j^{(i)}(L)\,\Xi_{j'}^{(i')}(L) - \Xi_j^{(i')}(L)\,\Xi_{j'}^{(i)}(L) = 0, \tag{1}$$

valabilă pentru cazurile cînd extremităţile tijei nu se pot deplasa lateral şi pentru cazurile în care extremitatea superioară are libertatea să se deplaseze fără frecare după o direcţie normală pe direcţia tijei şi pe care am denumit-o deplasare normală [1].

Redăm notaţiile din relaţia (1):

$$\Xi_j^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} [-\alpha(x)]^{k-u} \frac{N_j^{k,k-u}}{(j+2k+u-i)!}, \tag{2}$$

în care i nu reprezintă ordinul de derivare, k şi u sînt numere întregi şi pozitive;

$$z(x) = qx^3/EI \quad , \quad \alpha(x) = h/x, \tag{3}$$

în care x se înlocuieşte cu lungimea L a tijei;

EI — rigiditatea tijei;

h — lungimea porţiunii comprimate;

g — greutatea aparentă a unităţii de lungime din tijă;

y — săgeata fibrei medii deformate elastic la depărtarea x de originea axelor de coordonate, considerată în extremitatea inferioară a tijei.

Numerele $N_j^{k,k-u}$ au fost calculate anterior [3] cu ajutorul formulei de recurenţă

$$N_j^{k,k-u} = N_j^{k-1,k-u-1} + (j+2k+u-3)\; N_j^{k-1,k-u}, \tag{4}$$

valabilă pentru $u \geqslant 1$ şi $k - u \geqslant 1$

iar pentru $u = 0$

$$N_j^{k,k} = 1 \tag{5}$$

şi pentru $k - u = 0$

$$N_j^{k,0} = [j + 3(k-1)]!!! \tag{6}$$

Dacă legătura extremităţii inferioare este o încastrare $j = 2$ şi avînd în vedere că în toate cazurile $j' = 3$, relaţia (1) devine

$$\Xi_2^{(i)}(L)\,\Xi_3^{(i')}(L) - \Xi_2^{(i')}(L)\,\Xi_3^{(i')}(L) = 0. \tag{7}$$

Păstrăm însemnarea $C_{j,j'}^{i,i'}$ a cazurilor după felul rezemării, care devine $C_{2,3}^{i,i'}$ ([2], tabloul nr. 1).

Dacă legătura extremităţii superioare este tot încastrare, $i = 1$, iar dacă este articulaţie, $i = 2$.

Pentru cazurile în care extremitatea superioară nu are libertatea să se deplaseze lateral, $i' = 0$, iar în cazurile în care extremitatea superioară are libertatea să se deplaseze lateral normal, $i' = 3$.

În cazurile în care extremitatea superioară are libertatea să se deplaseze într-o direcţie orizontală, ceea ce am însemnat [1] cu C_j^i, condiţia (7) de instabilitate devine mai simplă

$$\Xi_2^{(i)}(L) = 0. \tag{8}$$

Introducînd valorile specificate pentru i şi i' în relaţia (7), găsim condiţiile de flambaj corespunzătoare fiecărui caz. Făcînd produsele seriilor şi scăderea respectivă, ecuaţia (7) capătă expresia

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k(L) \sum_{u=0}^{k} [-\alpha(L)]^{k-u} M_{1,3;i,i'}^{k,k-u}. \tag{9}$$

Lungimea comprimată critică $h_{2,3}^{i,i'}$ (păstrînd indicii inferiori şi superiori ai cazurilor specificate) este dată de formula

$$h_{2,3}^{i,i'} = c_{2,3}^{i,i'} \sqrt[3]{z(L)}, \tag{10}$$

în care coeficientul $c_{2,3}^{i,i'}$ (cu aceeaşi semnificaţie pentru indice) se calculează cu ajutorul relaţiei

$$c_{2,3}^{i,i'} = \alpha(L) \sqrt[3]{z(L)}. \tag{11}$$

Valorile $z(L)$ se deduc cu ajutorul ecuaţiei (9), care este o serie infinită de puteri întregi.

Dacă păstrăm primii n termeni ai seriei (9), evaluarea coeficientului $c_{2,3}^{i,i'}$ revine la rezolvarea unei ecuaţii al cărei grad este $n - 1$ şi pe care-l păstrăm ca denumire a gradului de aproximaţie a soluţiilor.

A. CAZURILE CU ÎNCASTRARE LA EXTREMITATEA SUPERIOARĂ

În acest subgrup deosebim cazul fără deplasare laterală şi cazurile cu deplasare normală şi orizontală. Cele două cazuri cu deplasare laterală sînt identice, deoarece normala pe tijă la capătul de sus se menţine orizontală, din cauza încastrării. Studiem totuşi ambele cazuri, cu deplasare laterală, deoarece — metodele de calcul fiind diferite — ne serveşte la verificare.

Cazul cu deplasare normală $C_{2,3}^{1,3}$

În acest caz $i = 1$ și $i' = 3$, iar condiția de instabilitate (7) devine

$$\Xi_2^{(1)}(L)\,\Xi_3^{(3)}(L) - \Xi_2^{(3)}(L)\,\Xi_3^{(1)}(L) = 0. \tag{12}$$

Într-adevăr, am arătat [3] că integrala ecuației fibrei medii deformate elastic este

$$y = a_0 + a_1 x\,\Xi_1(x) + 2\,a_2 x^2\,\Xi_2(x) + Cx(x) \tag{13}$$

și sub altă formă

$$y = a_0 + a_1 x\,[1 + z(x)\,\Xi_1(x)] + 2\,a_2 x^2\,\Xi_2(x) + 3!\,a_3 x^3\,\Xi_3(x). \tag{14}$$

Deoarece am ales originea axelor de coordonate în extremitatea inferioară și deoarece această extremitate este încastrată, tangenta în origine este nulă, $a_1 = 0$, conform relației (30), iar relațiile (13) și (14) devin

$$y = 2\,a_2 x^2\,\Xi_2(x) + Cz(x)\,\Xi_3(x), \tag{15}$$

$$y = 2\,a_2 x^2\,\Xi_2(x) + 3!\,a_3 x^3\,\Xi_3(x). \tag{16}$$

S-a arătat [3] că între C și a_3 există relația

$$3!\,a_3 = \frac{q}{EI}(C - ha_1). \tag{17}$$

Ținînd seama de (3) și întrucît $a_1 = 0$, relația (17) devine

$$3!\,a_3 x^3 = Cz(x) \tag{18}$$

și prin urmare relațiile (15) și (16) sînt identice.

Păstrînd notația [1]

$$\varphi_j^{(i)}(x) = x^{j-i}\,\Xi_j^{(i)}(x) \tag{19}$$

(indicele i din paranteză, dacă este afectat funcției $\varphi_j(x)$, reprezintă ordinul de derivare), relația (16) devine

$$y^{(i)}(x) = 2\,a_2\,\varphi_2^{(i)}(x) + 3!\,a_3\,\varphi_3^{(i)}(x). \tag{20}$$

Să precizăm condițiile de legătură a extremității superioare. În cazul încastrării, tangenta este nulă, prin urmare $y^{(1)}(L) = 0$ și relația precedentă, ținînd seama de (19), devine

$$2\,a_2\,\Xi_2^{(1)}(L) + 3!\,a_3\,L\,\Xi_3^{(1)}(L) = 0. \tag{21}$$

Dacă extremitatea superioară are libertatea să se deplaseze normal, forța tăietoare este nulă; prin urmare, $y^{(3)}(L) = 0$ și relația (20) devine

$$2\,a_2\,L^{-1}\,\Xi_2^{(3)}(L) + 3!\,a_3\,\Xi_3^{(3)}(L) = 0. \tag{22}$$

Sistemul de ecuații omogene (21) și (22) conduce la anularea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Xi_2^{(1)}(L) & \Xi_3^{(1)}(L) \\ \Xi_2^{(3)}(L) & \Xi_3^{(3)}(L) \end{vmatrix}, \tag{23}$$

ceea ce reprezintă condiția (12).

Înlocuind relaţia (2) în (12) şi dezvoltînd calculele, condiţia de instabilitate devine

$$0 = N_2^{0,0}\, N_3^{0,0}\, \frac{1}{1!\,0!} - z(L)\left\{\begin{array}{l}\alpha(L)\left[N_2^{0,0}\, N_3^{1,1}\, \dfrac{1}{1!\,2!} + N_2^{1,1}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{3!\,0!} - \dfrac{1}{1!\,2!}\right)\right] \\ \quad - \left[N_2^{0,0}\, N_3^{1,1}\, \dfrac{1}{1!\,3!} + N_2^{1,0}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{4!\,0!} - \dfrac{1}{2!\,2!}\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$+ z^2(L)\left\{\begin{array}{l}\alpha^2(L)\left[N_2^{0,0}\, N_3^{2,2}\, \dfrac{1}{1!\,4!} + N_2^{1,1}\, N_3^{1,1}\left(\dfrac{1}{3!\,2!} - \dfrac{1}{1!\,4!}\right) + \right. \\ \qquad \left. + N_2^{2,2}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{5!\,0!} - \dfrac{1}{2!\,3!}\right)\right] \\ + \alpha(L)\left[N_2^{0,0}\, N_3^{2,1}\, \dfrac{1}{1!\,5!} + N_2^{1,1}\, N_3^{1,0}\left(\dfrac{1}{3!\,3!} - \dfrac{1}{1!\,5!}\right) + \right. \\ \qquad \left. + N_2^{2,1}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{6!\,0!} - \dfrac{1}{2!\,4!}\right)\right] \\ + \left[N_2^{0,0}\, N_3^{2,0}\, \dfrac{1}{1!\,6!} + N_2^{1,0}\, N_3^{1,0}\left(\dfrac{1}{4!\,3!} - \dfrac{1}{2!\,5!}\right) + \right. \\ \qquad \left. + N_2^{2,0}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{7!\,0!} - \dfrac{1}{2!\,5!}\right)\right]\end{array}\right\} - \cdots \qquad (24)$$

Înlocuind în relaţia (24) valorile lui N calculate [3] cu ajutorul formulelor (4), (5), (6) şi efectuînd calculul numeric, se obţine

$$0 = 1 - \frac{z(L)}{100}\left\{\begin{array}{l}16{,}666\,67\,\alpha(L) \\ - 8{,}333\,33\end{array}\right\} + \left[\frac{z(L)}{100}\right]^2\left\{\begin{array}{l}83{,}333\,33\,\alpha^2(L) \\ - 83{,}333\,33\,\alpha(L) \\ + 19{,}847\,27\end{array}\right\} \qquad (25)$$

$$- \left[\frac{z(L)}{100}\right]^3\left\{\begin{array}{l}198{,}412\,69\,\alpha^3(L) \\ - 297{,}619\,04\,\alpha^2(L) \\ + 143{,}298\,06\,\alpha(L) \\ - 22{,}045\,86\end{array}\right\} + \left[\frac{z(L)}{100}\right]^2\left\{\begin{array}{l}275{,}573\,19\,\alpha^4(L) \\ - 551{,}146\,19\,\alpha^3(L) \\ + 400{,}833\,73\,\alpha^2(L) \\ - 125{,}260\,54\,\alpha(L) \\ + 14{,}131\,96\end{array}\right\}$$

$$- \left[\frac{z(L)}{100}\right]^5\left\{\begin{array}{l}250{,}521\,08\,\alpha^5(L) \\ - 626{,}302\,68\,\alpha^4(L) \\ + 610{,}243\,63\,\alpha^3(L) \\ - 289{,}062\,77\,\alpha^2(L) \\ + 66{,}377\,38\,\alpha(L) \\ - 5{,}888\,32\end{array}\right\} + \cdots$$

Substituind pe L lui x în relaţiile (3), acestea devin

$$\alpha(L) = h/L \text{ şi } z(L) = qL^3/EI. \tag{26}$$

Introducînd condiţiile de legătură, pentru acest caz, în (11), lungimea critică a porţiunii comprimate $h_{2,3}^{1,3}$ devine

$$h_{2,3}^{1,3} = c_{2,3}^{1,3} \sqrt[3]{EI/q}\,, \tag{27}$$

în care coeficientul de flambaj $c_{2,3}^{1,3}$ se calculează cu ajutorul relaţiei (11), devenită

$$c_{2,3}^{1,3} = \alpha(L) \sqrt[3]{z(L)}\,, \tag{28}$$

valorile $z(L)$ fiind deduse din ecuaţia (25).

În tabloul nr. 1 sînt date valorile coeficientului $c_{2,3}^{1,3}$ calculate pentru diferite valori ale raportului h/L cu diferite grade de aproximaţie.

În diagrama din figura 1 sînt trasate variaţiile coeficientului $c_{2,3}^{1,3}$ în funcţie de raportul h/L, cu diferite grade de aproximaţie, conform tabloului nr. 1.

Tabloul nr. 1

Valorile coeficientului $c_{2,3}^{1,3}$

Aproximaţia \ h/L	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1,4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2,2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
1°	3,18	2,57	2,29	2,17	2,175	2,4				
3°	3,69	3,00	2,65			2,39	2,33	2,333	2,44	
5°	3,74		2,67				2,32		2,34	2,37

Se observă că trecînd de la curba 1° la curba 3° se îmbunătăţeşte considerabil aproximaţia, însă trecînd de la curba 3° la curba 5°, îmbunătăţirea este abia perceptibilă pentru $h/L > 1/2$. Ca şi la cazurile studiate anterior [1], valorile lui c sînt valabile într-un anumit domeniu. Astfel: curba 1° este valabilă pentru $h/L > 2/3$, curba 3° pentru $h/L > 4/7$ şi curba 5° pentru $h/L > 1/2$.

Cazul cu deplasare orizontală C_2^1

În acest caz $i = 1$ şi condiţia (8) de instabilitate devine

$$\Xi_2^{(1)}(L) = 0. \tag{29}$$

Într-adevăr, s-a arătat [4] că pentru $x = 0$

$$y^{(1)} = a_1 = \operatorname{tg}\theta_0,\ y^{(2)} = 2\,a_2 = -\frac{M_0}{EI},\ y^{(3)} = 3!\,a_3 = -\frac{T_0}{EI}, \tag{30}$$

în care θ_0, M_0 şi T_0 sînt unghiul tangentei, momentul încovoietor şi forţa tăietoare în extremitatea inferioară; relaţia (17) devine

$$T_0 = qh \operatorname{tg}\theta_0 - qC. \tag{31}$$

Dacă una din extremităţi este liberă să se deplaseze lateral, direcţia deplasării este orizontală şi în acest caz, deoarece tg $\theta_0 = \theta$ şi $T_0 = 0$, urmează că $C = 0$ şi relaţia (15) devine

$$\dot{y} = 2\, a_2\, x^2\, \Xi_2(x). \tag{32}$$

Punînd condiţia de încastrare a extremităţii superioare, pentru $x = L$, $y^{(1)}(L) = 0$ şi relaţia (32) devine tocmai condiţia de instabilitate (29).

Înlocuind relaţia (2) în (29) şi dezvoltînd calculele, condiţia de instabilitate devine

$$0 = \frac{N_2^{0,0}}{1!} - z(L)\left[\alpha(L)\frac{N_2^{1,1}}{3!} - \frac{N_2^{1,0}}{4!}\right] \tag{33}$$

$$+ z^2(L)\left[\alpha^2(L)\frac{N_2^{2,2}}{5!} - \alpha(L)\frac{N_2^{2,1}}{6!} + \frac{N_2^{2,0}}{7!}\right]$$

$$- z^3(L)\left[\alpha^3(L)\frac{N_2^{3,3}}{7!} - \alpha^2(L)\frac{N_2^{3,2}}{8!} + \alpha(L)\frac{N_2^{3,1}}{9!} - \frac{N_2^{3,0}}{10!}\right] + \dots$$

Substituind valorile lui N şi efectuînd calculul numeric, se obţine tocmai relaţia (25), ceea ce era de aşteptat, întrucît cele două cazuri $C_{2,3}^{1,3}$ şi C_2^1 sînt identice, deplasarea normală fiind orizontală.

Comparînd relaţiile (24) şi (33), se observă simplitatea celei din urmă, cu care s-au calculat de fapt cifrele din tabloul nr. 1 pînă la aproximaţia 5°, folosind relaţia (24) pentru verificare şi numai pînă la aproximaţia 3°.

Cazul fără deplasare laterală $C_{2,3}^{1,0}$

În acest caz $i = 1$ şi $i' = 0$ şi condiţia de instabilitate devine

$$\Xi_2^{(1)}(L)\,\Xi_3(L) - \Xi_2(L)\,\Xi_3^{(1)}(L) = 0. \tag{34}$$

Într-adevăr, dacă extremitatea superioară nu are libertatea să se deplaseze lateral, $y(L) = 0$, şi relaţia (20), ţinînd seama de (19), devine

$$2\, a_2\, \Xi_2(L) + 3!\, a_3\, L\, \Xi_3(L) = 0. \tag{35}$$

Sistemul de ecuaţii omogene (21) şi (35) conduce la condiţia (34) de instabilitate care, prin înlocuirea dată de relaţia (2), devine

$$0 = N_2^{0,0}\, N_3^{0,0}\left(\frac{1}{2!\,2!} - \frac{1}{1!\,3!}\right)$$

$$- z(L)\left\{\begin{array}{l}\alpha(L)\left[N_2^{0,0}\, N_3^{1,1}\left(\dfrac{1}{2!4!} - \dfrac{1}{1!\,5!}\right) + N_2^{1,1}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{4!\,2!} - \dfrac{1}{3!\,3!}\right)\right] \\ \quad - \left[N_2^{0,0}\, N_3^{1,0}\left(\dfrac{1}{2!\,5!} - \dfrac{1}{1!\,6!}\right) + N_2^{1,0}\, N_3^{0,0}\left(\dfrac{1}{5!\,2!} - \dfrac{1}{4!\,3!}\right)\right]\end{array}\right\} \tag{36}$$

$$+ z^2(L)\left\{\begin{array}{l}\alpha^2(L)\left[N_2^{0,0}\,N_3^{2,2}\left(\frac{1}{2!\,6!}-\frac{1}{1!\,7!}\right)+N_2^{1,1}\,N_3^{1,1}\left(\frac{1}{4!\,4!}-\frac{1}{3!\,5!}\right)+\right.\\ \qquad\left.+N_2^{2,2}\,N_3^{0,0}\left(\frac{1}{6!\,2!}-\frac{1}{5!\,3!}\right)\right]\\ -\alpha(L)\left[N_2^{0,0}\,N_3^{2,1}\left(\frac{1}{2!\,7!}-\frac{1}{1!\,8!}\right)+N_2^{1,1}\,N_3^{1,0}\left(\frac{1}{4!\,5!}-\frac{1}{3!\,6!}\right)+\right.\\ \qquad\left.+N_2^{2,1}\,N_3^{0,0}\left(\frac{1}{7!\,2!}-\frac{1}{6!\,3!}\right)\right]\\ +N_2^{0,0}\,N_3^{2,0}\left(\frac{1}{2!\,8!}-\frac{1}{1!\,9!}\right)+N_2^{1,0}\,N_3^{1,0}\left(\frac{1}{5!\,5!}-\frac{1}{4!\,6!}\right)+\\ \qquad+N_2^{2,0}\,N_3^{0,0}\left(\frac{1}{8!\,2!}-\frac{1}{7!\,3!}\right)\end{array}\right\}-\cdots$$

Putem face verificarea calculului numeric, grupînd termenii în aşa fel încît expresia (36) să aibă o formă diferită

$$0=N_2^{0,0}\,N_3^{0,0}\,\frac{1}{2!\,3!}-z(L)\left\{\begin{array}{l}\frac{\alpha(L)}{3!\,5!}\left[N_2^{0,0}\,N_3^{1,1}\,3\cdot 3-N_2^{1,1}\,N_3^{0,0}\,1\cdot 5\right]\\ -\frac{1}{3!\,6!}\left[N_2^{0,0}\,N_3^{1,0}\,3\cdot 4-N_2^{1,0}\,N_3^{0,0}\,2\cdot 6\right]\end{array}\right\}$$

$$+z^2(L)\left\{\begin{array}{l}\alpha^2(L)\left[\frac{1}{3!\,7!}\left(N_2^{0,0}\,N_3^{2,2}\,3\cdot 5-N_2^{2,2}\,N_3^{0,0}\,3\cdot 7\right)+\frac{1}{4!\,5!}\,N_2^{1,1}\,N_3^{1,1}\right]\\ -\alpha(L)\left[\frac{1}{3!\,8!}\left(N_2^{0,0}\,N_3^{2,1}\,3\cdot 6-N_2^{2,1}\,N_3^{0,0}\,4\cdot 8\right)+\frac{2}{4!\,6!}\,N_2^{1,1}\,N_3^{1,0}\right]\\ +\frac{1}{3!\,9!}\left(N_2^{0,0}\,N_3^{2,0}\,3\cdot 7-N_2^{2,0}\,N_3^{0,0}\,5\cdot 9\right)+\frac{1}{5!\,6!}\,N_2^{1,0}\,N_3^{1,0}\end{array}\right\}-\cdots \quad (37)$$

Gruparea diferită a termenilor se observă începînd cu termenul al treilea.

Înlocuind în (36) sau (37) valorile lui N şi efectuînd calculul numeric, mărginindu-ne la primii patru termeni, se obţine

$$0=0{,}083\,333-\frac{z(L)}{100}\left\{\begin{array}{r}0{,}555\,555\,\alpha(L)\\ -0{,}277\,778\end{array}\right\} \quad (38)$$

$$+\left[\frac{z(L)}{100}\right]^2\left\{\begin{array}{r}1{,}488\,095\,\alpha^2(L)\\ -1{,}488\,095\,\alpha(L)\\ +0{,}363\,757\end{array}\right\}-\left[\frac{z(L)}{100}\right]^3\left\{\begin{array}{r}2{,}204\,586\,\alpha^3(L)\\ -3{,}306\,878\,\alpha^2(L)\\ +1{,}620\,036\,\alpha(L)\\ -0{,}238\,872\end{array}\right\}+\cdots$$

Lungimea critică a porțiunii comprimate, dată de (10), devine în acest caz

$$h_{2,3}^{1,0} = c_{2,3}^{1,0} \sqrt[3]{EI/q}, \tag{39}$$

în care

$$c_{2,3}^{1,0} = \alpha(L) \sqrt[3]{z(L)}, \tag{40}$$

valorile $z(L)$ fiind deduse din ecuația (38).

În diagrama din figura 1 sînt trasate curbele coeficientului $c_{2,3}^{1,0}$ în aproximațiile 1° și 3°, în funcție de raportul h/L conform tabloului nr. 2.

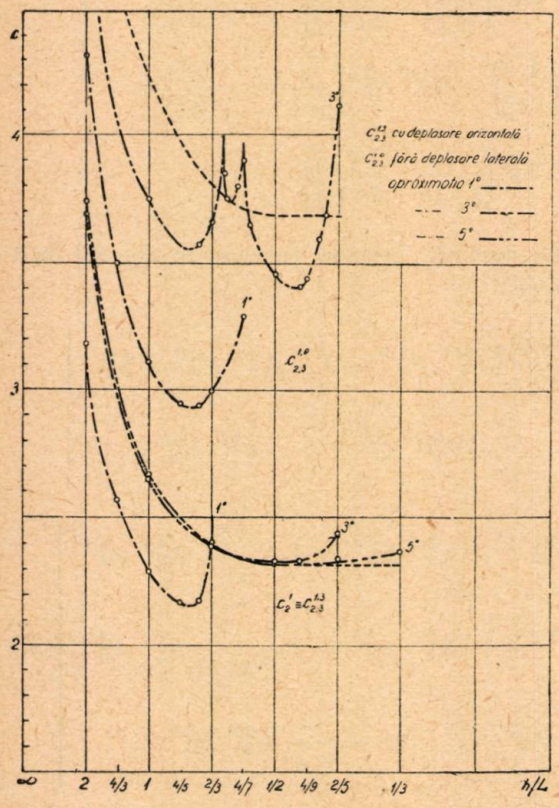


Fig. 1. — Diagrama coeficienților $c_{2,3}^{i,i'}$ pentru tije încastrate la ambele capete.

Tabloul nr. 2

Valorile coeficientului $c_{2,3}^{1,0}$

h/L \ Aproximația	1°	3°
2	4,32	5,2
4/3	3,50	—
1	3,11	3,75
4/5	2,95	—
1/1,4	2,94	3,575
2/3	3,00	3,66
1/1,6	—	3,85
1/1,62	—	3,75
1/1,7	—	3,80
4/7	3.29	3,90
1/1,8	3,60	3,65
1/2	∞	3,455
1/2,2	—	3,41
4/9	—	3,44
1/2,3	—	3,595
1/2,4	—	3,69
2/5	—	4,12
1/2,55	—	4,57

B. CAZURILE CU ARTICULAȚIE LA EXTREMITATEA SUPERIOARĂ

În acest subgrup deosebim cazul cu deplasare orizontală și fără deplasare laterală.

Cazul cu deplasare orizontală C_2^2

Procedăm în mod analog cazului C_2^1, cu deosebirea că extremitatea superioară fiind articulată, $i = 2$ și condiția (8) de instabilitate devine

$$\Xi_2^{(2)}(L) = 0. \tag{41}$$

Într-adevăr, punînd condiția de legătură a extremității superioare, pentru $x = L$, $y^{(2)} = 0$ și relația (32) devine tocmai condiția (41).

Înlocuind relaţia (2) în (41) şi dezvoltînd calculele, condiţia de instabilitate devine

$$0. = \frac{N_2^{0,0}}{0!} - z(L)\left[\alpha(L)\frac{N_2^{1,1}}{2!} - \frac{N_2^{1,0}}{3!}\right] + z^2(L)\left[\alpha^2(L)\frac{N_2^{2,2}}{4!} - \alpha(L)\frac{N_2^{2,1}}{5!} + \frac{N_2^{1,0}}{6!}\right] \tag{42}$$

$$- z^3(L)\left[\alpha^3(L)\frac{N_2^{3,3}}{6!} - \alpha^2(L)\frac{N_2^{3,2}}{7!} + \alpha(L)\frac{N_2^{3,1}}{8!} - \frac{N_2^{3,0}}{9!}\right] + \ldots$$

Substituind valorile lui N şi efectuînd calculul numeric, se obţine

$$0 = 1 - \frac{z(L)}{100}\left\{\begin{matrix} 50\,\alpha(L) \\ -\ 33{,}333 \end{matrix}\right\} + \left[\frac{z(L)}{100}\right]^2\left\{\begin{matrix} 416{,}666\,\alpha^2(L) \\ -\ 500{,}000\,\alpha(L) \\ +\ 138{,}888 \end{matrix}\right\}$$

$$- \left[\frac{z(L)}{100}\right]^3\left\{\begin{matrix} 1\,388{,}888\,\alpha^3(L) \\ -\ 2\,380{,}952\,\alpha^2(L) \\ +\ 1\,289{,}683\,\alpha(L) \\ -\ 220{,}459 \end{matrix}\right\} + \left[\frac{z(L)}{100}\right]^4\left\{\begin{matrix} 2\,480{,}159\,\alpha^4(L) \\ -\ 5\,511{,}464\,\alpha^3(L) \\ +\ 4\,409{,}171\,\alpha^2(L) \\ -\ 1\,503{,}126\,\alpha(L) \\ +\ 183{,}715 \end{matrix}\right\} \tag{43}$$

$$- \left[\frac{z(L)}{100}\right]^5\left\{\begin{matrix} 2\,755{,}732\,\alpha^5(L) \\ -\ 7\,515{,}632\,\alpha^4(L) \\ +\ 7\,933{,}167\,\alpha^3(L) \\ -\ 4\,046{,}879\,\alpha^2(L) \\ +\ 995{,}661\,\alpha(L) \\ -\ 94{,}213 \end{matrix}\right\} + \ldots$$

Lungimea critică a porţiunii comprimate dată de (10) devine în acest caz

$$h_2^2 = c_2^2 \sqrt[3]{EI/q}\,, \tag{44}$$

în care

$$c_2^2 = \alpha(L) \sqrt[3]{z(L)}\,, \tag{45}$$

valorile $z(L)$ fiind deduse din ecuaţia (43).

În tabloul nr. 3 sînt date valorile coeficientului de flambaj pentru diferite valori ale raportului h/L şi diferite grade de aproximaţie.

Tabloul nr. 3

Valorile coeficientului c_2^2

Aproximaţia \ h/L	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1{,}7}$	$\frac{1}{1{,}8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2{,}4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$
1°	2,29	1,92	1,85	1,975		—	—	—	—	—	—
3°	2,48	2,08	1,98	—	2,06	2,31	2,30	2,30	—	2,68	—
5°	2,48	—	1,99	—	2,065	2,31	2,32	2,34	2,49	2,33	2,43

În diagrama din figura 2 sînt trasate variaţiile coeficientului c_2^2 în funcţie de raportul h/L, cu diferite grade de aproximaţie, conform tabloului nr. 2.

Se observă că, trecînd de la curba 1° la curba 3° se îmbunătăţeşte aproximaţia; trecînd însă de la curba 3° la curba 5° deosebirea începe să se facă sensibilă de la $h/L < 1$. Curba 1° este valabilă pentru $h/L > 4/5$, curba 3° pentru $h/L > 1/2$ şi curba 5° pentru $h/L > 2/5$.

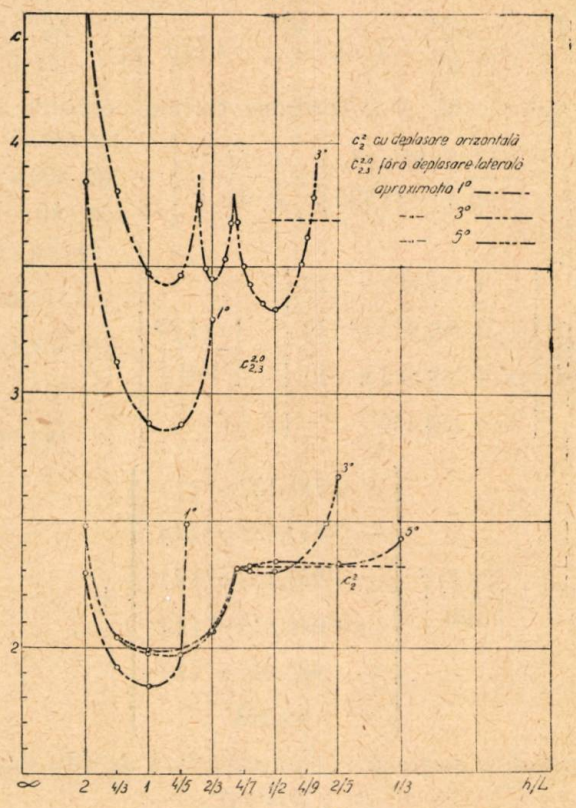


Fig. 2. — Diagrama coeficienţilor $c_{3,2}^{i,i'}$ pentru tije încastrate la extremitatea inferioară şi articulate la extremitatea superioară.

Cazul fără deplasare laterală $C_{2,3}^{2,0}$

În acest caz $i = 2$ şi $i' = 0$ şi condiţia de instabilitate (7) devine

$$\Xi_2^{(2)}(L)\,\Xi_3(L) - \Xi_2(L)\,\Xi_3^{(2)}(L) = 0. \tag{46}$$

Într-adevăr, dacă extremitatea superioară este articulată, momentul este nul. Prin urmare, $y^{(2)}(L) = 0$ şi relaţia (20), ţinînd seama de (19), devine

$$2\,a_2\,\Xi_2^{(2)}(L) + 3!\,a_3\,L\,\Xi_3^{(2)}(L) = 0. \tag{47}$$

Punem şi condiţia ca extremitatea superioară să nu aibă libertatea să se deplaseze lateral şi prin urmare $y(L) = 0$, iar relaţia (20) devine

$$2\,a_2\,\Xi_2(L) + 3!\,a_3(L) = 0. \tag{48}$$

Sistemul de ecuaţii omogene (47) şi (48) conduce la condiţia (46) de instabilitate.

Înlocuind relația (12) în (46) și mărginindu-ne la primii trei termeni, condiția de instabilitate devine

$$0 = N_2^{0,0} N_3^{0,0}\left(\frac{1}{2!\,1!} - \frac{1}{0!\,3!}\right)$$

$$- z(L)\left\{\begin{array}{l} \alpha(L)\left[N_2^{0,0} N_3^{1,0}\left(\frac{1}{2!\,3!} - \frac{1}{1!\,5!}\right) + N_2^{1,1} N_3^{0,0}\left(\frac{1}{4!\,1!} - \frac{1}{2!\,3!}\right)\right] \\ + N_2^{0,0} N_3^{1,0}\left(\frac{1}{2!\,4!} - \frac{1}{0!\,6!}\right) + N_2^{1,0} N_3^{0,0}\left(\frac{1}{5!\,1!} - \frac{1}{3!\,3!}\right) \end{array}\right\}$$

$$+ z^2(L)\left\{\begin{array}{l} \alpha^2(L)\left[N_2^{0,0} N_3^{2,2}\left(\frac{1}{2!\,5!} - \frac{1}{0!\,7!}\right) + N_2^{1,1} N_3^{1,1}\left(\frac{1}{4!\,3!} - \frac{1}{2!\,5!}\right) + \right. \\ \left. + N_2^{2,2} N_3^{0,0}\left(\frac{1}{6!\,1!} - \frac{1}{4!\,3!}\right)\right] \\ - \alpha(L)\left[N_2^{0,0} N_3^{2,1}\left(\frac{1}{2!\,6!} - \frac{1}{0!\,8!}\right) + N_2^{1,1} N_3^{1,0}\left(\frac{1}{4!\,4!} - \frac{1}{2!\,6!}\right) + \right. \\ \left. + N_2^{2,1} N_3^{0,0}\left(\frac{1}{7!\,1!} - \frac{1}{5!\,3!}\right)\right] \\ + N_2^{0,0} N_3^{2,0}\left(\frac{1}{2!\,7!} - \frac{1}{0!\,9!}\right) + N_2^{1,0} N_3^{1,0}\left(\frac{1}{5!\,4!} - \frac{1}{3!\,6!}\right) + \\ + N_2^{2,1} N_3^{0,0}\left(\frac{1}{8!\,1!} - \frac{1}{6!\,3!}\right) \end{array}\right\} - \ldots \tag{49}$$

Putem face verificarea calculului numeric, ca și în cazul $C_{2,3}^{1,0}$ grupînd termenii astfel încît expresia (49) să devină sub o formă diferită

$$0 = N_2^{0,0} N_3^{0,0}\,\frac{2\cdot 3 - 1\cdot 2}{2!\,3!} -$$

$$- z(L)\left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha(L)}{3!\,5!}\left[N_2^{0,0} N_3^{1,1}\,3\,(4\cdot 5 - 1\cdot 2) - N_2^{1,1} N_3^{0,0}\,5\,(3\cdot 4 - 2\cdot 3)\right] \\ -\frac{1}{3!\,6!}\left[N_2^{0,0} N_3^{1,1}\,3\,(5\cdot 6 - 1\cdot 2) - N_2^{1,0} N_3^{0,0}\,6\,(4\cdot 5 - 2\cdot 3)\right] \end{array}\right\}$$

$$+ z^2(L)\left\{\begin{array}{l} \alpha^2(L)\left[\frac{1}{3!\,7!}\left\{N_2^{0,0} N_3^{2,2}\,3\,(6\cdot 7 - 1\cdot 2) - N_2^{2,2} N_3^{0,0}\,7\,(5\cdot 6 - 2\cdot 3)\right\} + \right. \\ \left. + N_2^{1,1} N_3^{1,1}\,\frac{4\cdot 5 - 3\cdot 4}{4!\,5!}\right] \\ -\alpha(L)\left[\frac{1}{3!\,8!}\left\{N_2^{0,0} N_3^{2,1}\,3\,(7\cdot 8 - 1\cdot 2) - N_2^{2,1} N_3^{0,0}\,8\,(6\cdot 7 - 2\cdot 3)\right\} + \right. \\ \left. + N_2^{1,1} N_3^{1,0}\,\frac{5\cdot 6 - 3\cdot 4}{4!\,6!}\right] \\ + \frac{1}{3!\,9!}\left\{N_2^{0,0} N_3^{2,0}\,3\,(8\cdot 9 - 1\cdot 2) - N_2^{2,0} N_3^{0,0}\,9\,(7\cdot 8 - 2\cdot 3)\right\} + \\ + N_2^{1,0} N_3^{1,0}\,\frac{5\cdot 6 - 4\cdot 5}{5!\,6!} \end{array}\right\} - \ldots \tag{50}$$

Gruparea diferită se observă începînd cu termenul al treilea.

Înlocuind în (49) sau în (50) valorile lui N şi efectuînd calculul numeric, se obţine

$$0 = 0{,}333\,333 - \frac{z(L)}{100}\begin{Bmatrix} 3{,}333\,33\,\alpha\,(L) \\ -\ 1{,}944\,44 \end{Bmatrix} + \left[\frac{z(L)}{100}\right]^2 \begin{Bmatrix} 11{,}904\,76\alpha^2\,(L) \\ -\ 13{,}392\,85\,\alpha\,(L) \\ 3{,}637\,57 \end{Bmatrix} \qquad (51)$$

$$- \left[\frac{z(L)}{100}\right]^3 \begin{Bmatrix} 22{,}045\,89\,\alpha^3\,(L) \\ -\ 36{,}375\,65\,\alpha^2\,(L) \\ +\ 19{,}440\,40\,\alpha\,(L) \\ -\ 3{,}365\,32 \end{Bmatrix} + \cdots$$

Lungimea critică a porţiunii comprimate, dată de (10), devine în acest caz

$$h_{2,3}^{2,0} = c_{2,3}^{2,0} \sqrt[3]{EI/q}\,, \qquad (52)$$

în care

$$c_{2,3}^{2,0} = \alpha\,(L) \sqrt[3]{z\,(L)}\,, \qquad (53)$$

valorile $z\,(L)$ fiind deduse din ecuaţia (51).

În tabloul nr. 4 sînt date valorile coeficientului de flambaj în prima şi a treia aproximaţie.

În diagrama din figura 2 sînt trasate curbele coeficientului $c_{2,3}^{2,0}$ în aproximaţiile 1° şi 3°, în funcţie de raportul h/L, conform tabloului nr. 4

Tabloul nr. 4

Valorile coeficientului $c_{2,3}^{2,0}$

Aproximaţia / h/L	1°	3°
2	3,84	4,6
4/3	3,12	3,8
1	2,885	3,47
4/5	2,88	3,46
1/1,4	—	3,75
1/1,45	—	3,49
2/3	3,29	3,45
1/1,6	—	3,56
1/1,65	—	3,67
1/1,7	—	3,675
4/7	—	3,5
1/1,8	—	3,43
1/1,9	—	3,35
1/2	—	3,33
1/2,2	—	3,51
4/9	—	3,62
1/2,3	—	3,775
1/2,4	—	4,45

C. CONCLUZII

Cazul de cea mai mare labilitate C_2^2, cu articulaţie la extremitatea superioară şi deplasare orizontală, corespunzător cazului C_1^2 din subgrupul cazurilor cu articulaţie la extremitatea inferioară, prezintă un aspect deosebit de celelalte cazuri ale subgrupului cu încastrare la extremitatea inferioară (fig. 2). În acest

caz, coeficientul c_2^2 ajunge la o valoare minimă în jurul lui 2 pentru $h/L = 1$, de unde creşte pentru a ajunge la aproximativ $2{,}32 \approx \sqrt[3]{12{,}5}$ înainte de $h/L = 1/2$ şi mai departe cu creşterea gradului de aproximaţie, rămîne pe un palier constant pentru $h/L < 1/2$.

Într-adevăr, cazul c_2^1 cu încastrare la extremitatea superioară şi deplasare laterală, pentru $h/L \to 0$ admite aceeaşi asimptotă, întrucît pentru $L \to \infty$, fie că legătura de sus ar fi articulaţie, fie că ar fi încastrare, tangenta în extremitatea superioară este verticală.

Observăm însă pe diagrama din figura 1 că c_2^1 atinge valoarea de aproximaţie 2,32 pentru $h/L = 1/2$, prin urmare se poate deduce că ambii coeficienţi c_2^1 şi c_2^2 se menţin la aceeaşi valoare constantă în jurul cifrei de 2,32, pentru tot domeniul unde $h/L < 1/2$.

Că c admite un minim a observat şi V. Vîlcovici [7]. Cifra minimă 1,986 şi cifra asimptotică de 2,338 (faţă de 1,99 şi 2,32 stabilite aici) se verifică pentru cazul C_2^2, însă cifra asimptotică de 3,270 nu se verifică pentru cazul C_1^2 întru-cît aceasta se află în jurul cifrei 1, după cum s-a arătat anterior [1].

Că c_2^1 admite un minim de aproximativ 2 pentru h/L în jurul lui 1 se explică prin aceea că numai porţiunea comprimată a tijei este susceptibilă la flambaj, porţiune care poate fi considerată încastrată elastic de restul tijei ce se află în tensiune. Pentru $h/L = 1$, porţiunea în tensiune este nulă, iar extremitatea porţiunii comprimate are libertatea totală de a se roti, fiind considerată articulată. Pe măsură ce porţiunea în tensiune creşte, ceea ce coboară capătul porţiunii comprimate, libertatea acestuia de a se roti scade.

În cazul garniturii de foraj, prăjinile grele nu pot fi considerate ca *încastrate* la extremitatea inferioară, unde sînt simplu rezemate pe tăiş şi fără deplasare laterală, prin urmare trebuie considerate ca *articulate* în extremitatea inferioară. Extremitatea superioară a prăjinilor grele nu poate fi considerată încastrată, nici cu, nici fără deplasare laterală, ci încastrată în restul garniturii de foraj, ceea ce înseamnă că prezintă o încastrare elastică şi deci întreaga garnitură de foraj trebuie considerată în ansamblu [1].

Admiterea unor ipoteze contrarii a condus pe unii autori [8] la cifre exagerate de 67—96 m lungime a prăjinilor, grele de 197 mm diametru, cu o greutate de 8 296—7 457 kg. Concluzia trasă mai departe că, evitînd flambajul, limita apăsării pe sapă în cazul cînd tija grea se află toată în compresiune, este mai mare decît în cazul cînd tija grea nu se află toată în compresiune, nu prezintă interes. În realitate, apăsarea critică maximă se obţine pentru lungimea prăjinilor grele egală cu lungimea comprimată critică a garniturii de prăjini.

În general, valoarea expresiei EI/q este cam aceeaşi, atît pentru prăjinile de foraj, cît şi pentru prăjinile grele de acelaşi diametru nominal. Dacă această expresie este mai mică pentru prăjinile grele decît pentru prăjinile de foraj, folosirea unor prăjini grele mai lungi decît lungimea critică poate să conducă la valori mai mici pentru forţa de apăsare critică pe sapă şi viceversa.

Ca şi în cazurile cu extremitatea inferioară articulată, iar cea de sus încastrată [1], se poate face comparaţia coeficienţilor de flambaj între cazurile cu deplasare laterală şi fără deplasare laterală, pentru ambele extremităţi încastrate. Astfel, în tabloul nr. 5 se dă comparaţia acestor coeficienţi de flambaj c_2^1 şi $c_{2,3}^{1,0}$ în diferite grade de aproximaţie.

Se observă că raportul se menţine oarecum constant şi valoarea lui creşte cu gradul de aproximaţie.

Pentru poziția extremă $h/L = \infty$, cazurile studiate se reduc [6] la cazurile clasice. Însemnînd cu indicele ∞ poziția extremă, avem cazul $C^{1,0}_{2,3,\infty}$, unde se aplică formula

$$N_0 = \frac{K^2 \pi^2 EI}{(L/2)^2} = qL, \tag{54}$$

de unde

$$L = \sqrt[3]{4 K^2 \pi^2 EI/q} = c^{1,0}_{2,3,\infty} \sqrt[3]{EI/q}, \tag{55}$$

în care

$$c^{1,0}_{2,3} = \sqrt[3]{4K^2 \pi^2}. \tag{56}$$

Tabloul nr. 5

Raportul $c^{1,0}_{2,3} / c^{1}_{2}$

Aproximația / h/L	1°	3°
2	1,357	1,42
4/3	1,36	—
1	1,357	1,415
4/5	1,355	—
2/3	1,365	1,53
1/2	—	1,48

În cazul $C^{1}_{2,\infty}$ se aplică formula

$$N_0 = K^2 \pi^2 EI/L^2 = qL, \tag{57}$$

de unde

$$L = \sqrt[3]{K^2 \pi^2 EI/q} = c^{1}_{2,\infty} \sqrt[3]{EI/q}, \tag{58}$$

în care

$$c^{1}_{2,\infty} = \sqrt[3]{K^2 \pi^2}. \tag{59}$$

Raportul coeficienților de flambaj în cazurile extreme devine

$$c^{1,0}_{2,3,\infty} / c^{1}_{2,\infty} = \sqrt[3]{4}. \tag{60}$$

Pe diagrama din figura 1 se observă că pentru coeficientul c^{1}_{2} și pe intervalul $h/L > 1/2$, diferențele între curbele 3° și 5° sînt atît de mici, încît putem admite pe cea din urmă ca definitiv valabilă, întrucît diferența față de curba cu un număr oricît de mare de termeni nu mai este sensibilă.

Dacă admitem că raportul coeficienților $c^{1,0}_{2,3}$ și c^{1}_{2} pentru curbele obținute cu un număr foarte mare de termeni va tinde către valoarea dată de relația (60), putem construi o curbă aproximativă pentru $c^{1,0}_{2,3}$, păstrînd proporția de $\sqrt[3]{4} = 1{,}5885$ conform tabloului nr. 6

Tabloul nr. 6

Valorile aproximative ale coeficientului $c^{1,0}_{2,3}$

h/L	2	4/3	1	4/5	2/3	4/7	1/2
$c^{1,0}_{2,3}$	5,93	4,92	4,24	3,97	3,81	3,72	3,69

Pe diagrama din figura 1 este trasată punctat curba care reprezintă variația coeficientului $c^{1,0}_{2,3}$, corespunzătoare tabloului nr. 6.

Se observă că valoarea palierului este de $3{,}69 \approx \sqrt[3]{50}$, valoare către care tinde şi $c_{2,3}^{2,0}$, deoarece pentru $L/h \to \infty$, tangentele în extremitatea superioară sînt verticale, oricare ar fi felul legăturii, încastrare sau articulaţie.

D. APLICAŢII

Concluziile precedente îşi găsesc aplicaţiile la pomparea sondelor de adîncime, în cazul folosirii prăjinilor tubulare şi dacă spaţiul inelar dintre prăjini şi ţevile de extracţie sau coloana de burlane rămîne gol, după cum am menţionat anterior [5].

Pentru simplificare, facem abstracţie de eforturile dinamice. Fie pompa de extracţie din figura 3, unde am notat cu d_p, A_p, diametrul şi secţiunea pistonului, cu d_1, A_1, diametrul exterior al ţevilor de extracţie şi secţiunea corespunzătoare, şi cu d_2, A_2, diametrul interior al ţevilor de extracţie şi secţiunea corespunzătoare.

S-a observat că de la o anumită adîncime şi în condiţiile menţionate, pompa este împiedicată să funcţioneze din cauza flambării ţevilor [9]. S-a atribuit flambajul numai sarcinii F_0 dată de relaţia

$$F_0 = p_L (A_p - A_2), \tag{61}$$

n care p_L este presiunea hidrostatică în dreptul pompei la adîncimea L.

Am arătat [5] că şi presiunile laterale, în acest caz interioare, intervin în flambajul ţevilor şi anume ca şi cum ţeava ar fi supusă la o sarcină axială de compresiune

$$F_1 = pA_2. \tag{62}$$

Presiunea p este variabilă cu adîncimile şi dată de expresia

$$p = \gamma_t (L - x), \tag{63}$$

în care x este înălţimea secţiunii considerate faţă de nivelul pompei şi γ_t greutatea specifică a fluidului.

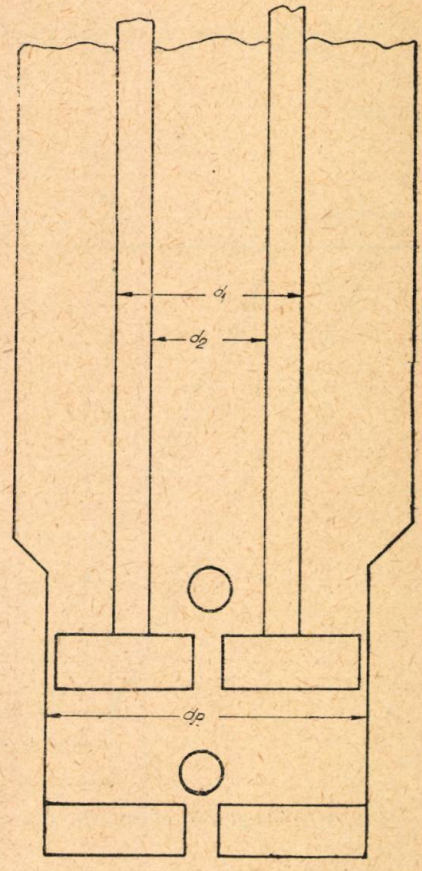


Fig. 3. — Schema unei pompe de adîncime cu prăjini tubulare.

Fie q greutatea ţevii pe unitatea de lungime; avem

$$q = \gamma_0 (A_1 - A_2), \tag{64}$$

în care γ_0 este greutatea specifică a oţelului din care este făcută ţeava.

Efortul N_x din ţeavă după direcţia axei la înălţimea x, ţinînd seamă de forţa F_0 şi de greutatea ţevilor, este

$$N_x = qx - F_0. \tag{65}$$

Ţinînd seama de (61), (63) şi (64), relaţia (65) devine

$$N_x = \gamma_0 (A_1 - A_2)\, x - \gamma_t L (A_p - A_2). \tag{66}$$

Dacă ţinem seamă de flambajul provocat de presiunile laterale interioare, lucrurile se petrec ca şi cum ţeava ar fi solicitată de un efort N'_x dat de relaţia

$$N'_x = N_x - F_1 \tag{67}$$

şi ţinînd seama de (62) şi (66)

$$N'_x = \gamma_0 (A_1 - A_2)\, x - \gamma_t A_2 (L - x). \tag{68}$$

Această relaţie se poate pune sub forma

$$N'_x = q'\, x - F'_0, \tag{69}$$

în care

$$q' = \gamma_0 (A_1 - A_2) + \gamma_t A_2 \quad \text{şi} \quad F'_0 = \gamma_t A_p\, L. \tag{70}$$

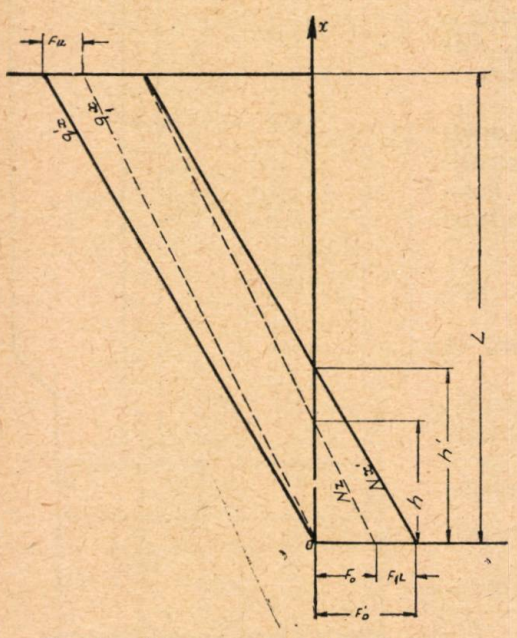


Fig. 4. — Diagrama eforturilor din ţeavă.

Prin urmare, lucrurile se petrec ca şi cum ţeava ar avea o greutate q' pe unitatea de lungime şi ar fi comprimată la extremitatea inferioară de forţa F'_0.

În diagrama din figura 4 sînt redate variaţiile eforturilor N_x şi N'_x.

Pentru a găsi lungimea comprimată echivalentă h' a tijei, în care s-a ţinut seama şi de efectul presiunilor laterale, anulăm expresia (69) pentru $x = h'$

$$N'_h = q' h' - F'_0, \tag{71}$$

de unde

$$h' = \frac{F'_0}{q'} = \frac{\gamma_t A_p L}{\gamma_0 (A_1 - A_2) + \gamma_t A_2} \tag{72}$$

şi deci

$$\frac{h'}{L} = \frac{\gamma_t A_p}{\gamma_0 (A_1 - A_2) + \gamma_t A_2}. \tag{73}$$

Expresia lungimii comprimate critice h' este dată [2] de expresia

$$h' = c \sqrt[3]{EI/q'}, \tag{74}$$

iar expresia rigidităţii este

$$EI = \frac{\pi E}{64} (d_1^2 - d_2^2)(d_1^2 + d_2^2). \tag{75}$$

Ţinînd seama că

$$A_1 = \pi d_1^2/4,\ A_2 = \pi d_2^2/4,\ A_p = \pi d_p^2/4, \tag{76}$$

expresia (67) devine

$$q' = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)\gamma_0\left[1 + \frac{\gamma_t d_2^2}{\gamma_0 (d_1^2 - d_2^2)}\right], \tag{77}$$

iar

$$\frac{EI}{q'} = \frac{E(d_1^2 - a_2^2)}{16\,\gamma_0\left[1 + \frac{\gamma_t d_2^2}{\gamma_0 (a_1^2 - a_2^2)}\right]} \tag{78}$$

şi totodată expresia (73) devine

$$\frac{L}{h'} = \frac{c_2^2}{d_p^2}\left[1 + \frac{\gamma_0 (a_1^2 - d_2^2)}{\gamma_t d_2^2}\right]. \tag{79}$$

În tabloul nr. 7 s-au dat, pentru exemplificare, valorile tehnice şi critice în trei cazuri, considerînd $\gamma_0 = 7{,}85$ şi $\gamma_t = 0{,}9$.

Valorile c au fost luate după diagrama din figura 1 în cazul $C_{2,3}^{1,0}$ (ambele capete încastrate şi fără deplasare laterală) şi anume după curba punctată.

După cum se vede, lungimile critice de 50...60 m sînt mult mai mici decît cele considerate [9] pînă în prezent de 200 m.

Tabloul nr. 7

Valorile critice ale prăjinilor tubulare de pompaj

Nr.	Diametrele ţevilor			Diametrul pistonului d_p mm	$\frac{L}{h'}$	c	$\left(\frac{EI}{q'}\right)^{1/3}$ m	h' m	L m
	Nominal ţoli	d_1 mm	d_2 mm						
1	1 1/4	42,2	35,1	57	1,85	3,7	7,4	27,5	50,9
2	1 1/2	48,3	40,9	59	1,55	3,8	8,1	30,6	47,5
3	2	60,3	50,7	81	1,81	3,7	9,4	34,9	63,0

Chiar dacă $d_p = d_2$, ţevile de pompaj — în condiţiile specificate — flambează, după cum se arată în tabloul nr. 8, pentru adîncimi de $L' = 130...160$ m, ceea ce n-ar reieşi dacă s-ar neglija efectul presiunilor laterale.

Tabloul nr. 8

Valorile critice ale prăjinilor tubulare pentru $d_p = d_2$

Nr.	Diametrul nominal ţoli	mm d_p	$\frac{L}{h'}$	c	$\left(\frac{EI}{q'}\right)^{1/3}$ m	h' m	L' m
1	1 1/4	35,1	4,90	3,69	7,4	27,4	134,4
2	1 1/2	40,9	4,43	3,69	8,1	29,9	132,2
3	2	50,7	4,62	3,69	9,4	34,7	160,3

Prin urmare, reducerea diametrului d_p al pistonului la valoarea diametrului d_1 exterior, aşa cum se propune în [10] şi [11], nu rezolvă neajunsurile provocate de flambarea prăjinilor tubulare. Micşorarea diametrului pistonului reduce simţitor efectul flambajului, mărind lungimea critică de la 50...60 m, la o valoare aproape triplă.

Mijlocul eficace de a împiedica flambarea prăjinilor tubulare este acela de a umple spaţiul inelar din exteriorul prăjinilor.

Un mijloc de a mări lungimea critică este şi acela de a folosi prăjini grele (cu diametrul mărit). În tablourile nr. 9 şi nr. 10 se dau valorile critice pentru prăjini tubulare cu diametrul exterior mai mare.

Tabloul nr. 9

Valorile critice ale prăjinilor grele de pompaj

Nr.	Diametrul în mm			$\frac{L}{h'}$	c	$\left(\frac{EI}{q'}\right)^{1/3}$ m	h' m	L m	$d_p = d_2$	
	d_3	d_2	d_p						d_p mm	L' m
1	55,9	35,1	57	5,46	3,69	8,9	32,7	178,4	35,1	471,9
2	63,5	40,9	69	4,68	3,69	9,7	35,8	167,4	40,9	475,4
3	77,8	50,7	81	5,01	3,69	11,1	40,9	205,1	50,7	523,9

Tabloul nr. 10

Valorile critice ale prăjinilor mai grele

Nr.	Diametrul în mm			$\frac{L}{h'}$	c	$\left(\frac{EI}{q'}\right)^{1/3}$ m	h' m	L m	$d_p = d_2$	
	d_4	d_2	d_p						d_p mm	L' m
1	63,5	35,1	57	7,90	3,69	9,65	35,6	281,2	35,1	741,9
2	77,8	40,9	69	8,35	3,69	10,9	40,2	335,7	40,9	851,3

După cum se poate observa, mărimea adîncimii critice reclamă prăjini cu diametrul exterior considerabil mărit.

ИЗГИБ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ШТОКОВ С ВДЕЛАННЫМ НИЖНИМ КОНЦОМ И КРИТИЧЕСКИЕ ГЛУБИНЫ ДЛЯ НАСОСОВ С ТРУБЧАТЫМИ ШТАНГАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В одном из более ранних сообщений автором был рассмотрен ряд случаев с шарнирным соединением штанг [1]. В настоящем сообщении автор рассматривает аналогичным образом вышеуказанный случай, пользуясь условием неустойчивости (1) с обозначениями (2) ... (7) и получает критическую длину сдавливаемого отрезка $h_{2,3}^{i,i'}$, данную формулой (10).

Способ соединения верхнего конца выражается показателями i и i', а именно: в случае вделанного конца $i=1$, а в случае шарнирного соединения $i=3$. Если верхний конец не может свободно смещаться в боковом направлении, $i'=0$, а если может нормально смещаться, $i'=3$. В случае горизонтального перемещения используется упрощенная формула (9).

Задача сводится к определению коэффициента изгиба $c_{2,3}^{i,i'}$, данного отношением (11), решающимся при помощи отношения (9).

Путем численного расчета получаются значения коэффициентов изгиба, вычисленные с различной степенью приближения и приведенные в таблицах 1... 4. На приложенных диаграммах (рис. 1 и 2) проведены соответствующие кривые, указывающие область, допускающую каждую степень приближения в отдельности.

Автор объясняет полученные результаты и показывает применение этих результатов к глубинным насосам с трубчатыми штангами, вокруг которых кольцевое пространство остается пустым (рис. 3).

В таблицах 7 и 8 приведены критические глубины L, вычисленные при указанных условиях для трубчатых штанг в 1 1/4″, 1 1/2″ и 2″, а в таблицах 9 и 10 для более тяжелых трубчатых штанг.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Диаграмма коэффициентов $c_{2,3}^{i,i'}$ для штоков с вделанными обоими концами.

Рис. 2. — Диаграмма коэффициентов $c_{2,3}^{i,i'}$ для штоков с вделанным нижним концом и шарнирно соединенным верхним.

Рис. 3. — Схема глубинного насоса с трубчатыми штангами.

Рис. 4. — Диаграмма усилий в трубе.

LE FLAMBAGE DES TIGES VERTICALES À L'EXTRÉMITÉ INFÉRIEURE ENCASTRÉE ET LES PROFONDEURS CRITIQUES DES POMPES À TIGES TUBULAIRES

(RÉSUMÉ)

On a étudié antérieurement [1] le groupe des cas où l'extrémité inférieure des tiges est articulée. Cette fois-ci, par la même méthode, on utilise la condition (1) d'instabilité, dont les notations sont (2)...(7) et l'on obtient, par la formule (10), la longueur critique de la portion comprimée.

Les valeurs des indices i et i', selon les modes de fixation de l'extrémité supérieure, sont: $i = 1$, pour l'extrémité encastrée, $i = 2$, pour l'extrémité articulée, $i' = 0$, si cette extrémité n'a pas la liberté de se déplacer dans une direction latérale et $i' = 3$, si elle a la liberté de se déplacer dans une direction normale. Pour les cas du déplacement horizontal, on utilise la formule simplifée (9).

Le problème se réduit à la détermination du coefficient de flambage $c_{2,3}^{i,i'}$ donné par la relation (11), à l'aide de la relation (9).

Les valeurs calculées du coefficient de flambage sont inscrites sur les tableaux 1 à 4 et les courbes respectives de variation sont tracées sur les diagrammes ci-joints (fig. 1 et 2) où l'on peut observer l'intervalle de valabilité pour chaque degré d'approximation.

Dans la conclusion, on donne l'interprétation des résultats obtenus et, finalement, on applique ces résultats aux pompes de profondeur à tiges tubulaires, dont l'espace annulaire, à l'extérieur des tiges, est vidé de liquide.

Dans ces conditions, on a inscrit sur les tableaux 7 et 8 les valeurs critiques L pour les tiges tubulaires de 1 1/4″, 1 1/2″, 2″ et sur les tableaux 9 et 10, les valeurs critiques pour les tiges plus lourdes.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Diagramme des coefficients $c_{2,3}^{i,i'}$ pour les tiges encastrées aux deux bouts.

Fig. 2. — Diagramme des coefficients $c_{2,3}^{i,i'}$ pour les tiges encastrées à l'extrémité inférieure et articulées à l'extrémité supérieure.

Fig. 3. — Schéma d'une pompe de profondeur à tiges tubulaires.

Fig. 4. — Diagramme des efforts dans le tube.

BIBLIOGRAFIE

1, N. S. Pîrvulescu, *Flambajul tijelor sub acţiunea unei compresiuni dată de o parte din greutatea proprie. Cazul capătului de jos articulat.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, nr. 3—4, iulie — decembrie 1953, p. 55.

2. — *Despre flambajul tijelor sub acţiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. III, nr. 3—4, iulie-decembrie 1952, p. 205.

3. — *Despre integrarea ecuaţiei liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele şi svelte.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. III, nr. 1—2, ianuarie-iunie 1953 p, 53.

4. — *Asupra instabilităţii tijelor verticale, grele, svelte şi în rotaţie. Ecuaţia diferenţială a liniei elastice.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951, p. 157.

5. — *Flambajul ţevilor sub acţiunea presiunilor laterale.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 55.

6. — *Cazurile particulare ale unei clase de funcţiuni cu aplicaţii la flambajul tijelor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată. t. V, nr. 3—4, 1954, p. 377.

7. V. Vîlcovici, *Diagramele de flambaj în cazul barelor elastice, grele, cufundate în fluid, Determinarea compresiunii de siguranţă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 3—4, martie-aprilie 1952, p. 185.

8. V. Vîlcovici, *Calculul tijelor grele şi forajul terenurilor petrolifere.* Revista Universităţii «C. I. Parhon» şi a Institutului politehnic, Bucureşti, 1953, nr. 2.

9. I. M. Muraviev şi A. P. Krîlov, *Exploatarea zăcămintelor de ţiţei,* Ed. tehnică, Bucureşti, 1950, p. 589.

10. Al. Purcel, *Pompajul cu prăjini tubulare.* Petrol şi gaze, 1952, nr. 7.

11. V. Chiţu, *Pompajul cu prăjini tubulare.* Petrol şi gaze, 1953, nr. 6.

RECTIFICARE

Cu privire la articolul *Flambajul ţevilor sub acţiunea presiunilor laterale,* publicat în tomul IV/1953 al acestei reviste, referitor la cazul 4) cu capătul din origină încastrat, iar celălalt cu libertatea de a se deplasa lateral, deşi prin relaţia (40) concluzia este justă, relaţia (39) este greşită şi facem următoarea rectificare.

Deosebim două cazuri de deplasare laterală: 1) cu capătul complet liber (fig. 1), şi 2) cu ţeava păstrîndu-şi direcţia în acest capăt (fig. 2).

În primul caz, pentru $x = L$ avem $M = 0$ şi, conform relaţiilor (38),

$$d^2y/dx^2 = -c_1 \zeta^2 \cos \zeta L - c_2 \zeta^2 \sin \zeta L, \tag{1}$$

iar în al doilea caz pentru $x = L$ avem $T = 0$ şi, conform relaţiilor (38),

$$d^3y/dx^3 = c_1 \zeta^3 \sin \zeta L - c_2 \zeta^3 \cos \zeta L. \tag{2}$$

Nu putem avea concomitent $M = 0$ şi $T = 0$, deoarece nu putem anula determinantul sistemului de ecuaţii omogene (1) şi (2); relaţia (39) corectată este

$$\cos^2 \zeta L + \sin^2 \zeta L = 1 \neq 0. \tag{3}$$

Deoarece nu putem anula concomitent pe $\cos \zeta L$ şi $\sin \zeta L$, urmează ca în ambele relaţii (1) şi (2), cîte unul din coeficienţii c_1 sau c_2 să fie nul.

1) În primul caz, care este cel mai labil, $c_2 = 0$, de unde $\zeta L = k\pi/2$ şi deci, corespunde relaţiei (40), şi anume

$$F = k_2 \pi^2 EI/(2L)^2 \tag{4}$$

Lucrurile se petrec ca şi cum am considera jumătatea dintr-o ţeavă articulată la ambele capete (fig 1).

Într-adevăr, formula (4) corespunde formulei (28), şi anume

$$F = k^2 \pi^2 EI/L^2 \tag{5}$$

în care L este înlocuit cu 2 L. Prin urmare, figura 1 corespunzătoare formulei (4), prin reflectare (întregire simetrică), devine corespunzătoare formulei (5).

Ipoteza $c_1 = 0$ conduce la cazul următor.

2) În al doilea caz, care este mai puţin labil, $c_1 = 0$, de unde $\zeta L = k\pi$ şi deci

$$F = k^2 \pi^2 EI/(2L/2)^2, \tag{6}$$

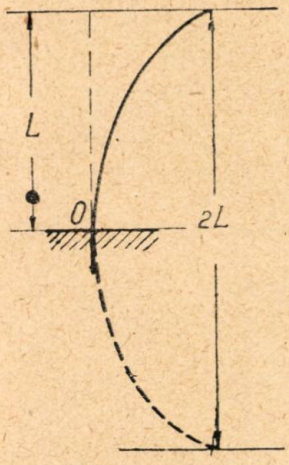


Fig. 1

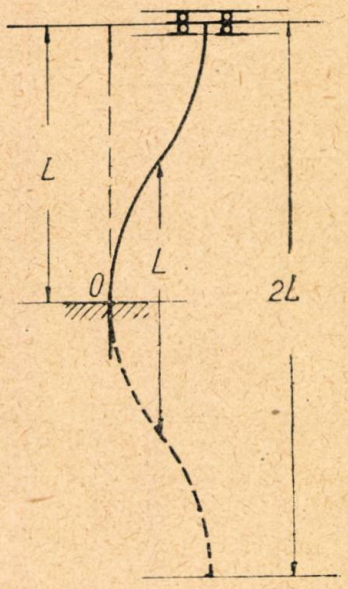


Fig. 2

Lucrurile se petrec ca şi cum am considera jumătatea dintr-o ţeavă încastrată la ambele capete (fig. 2)

Într-adevăr, formula (6) corespunde formulei (37) şi anume

$$F = K^9 \pi^2 EI/(L/2)^9, \tag{7}$$

în care L este, la fel ca în primul caz, înlocuit cu 2 L. Prin urmare, figura 2, corespunzătoare formulei (6) prin reflectare, devine corespunzătoare formulei (7).

Ipoteza $c_2 = 0$ conduce la cazul precedent.

N. S. Pîrvulescu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

AEROMECANICĂ

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA REPARTIŢIEI CIRCULAŢIEI DE-A LUNGUL ANVERGURII PE ARIPA ELIPTICĂ DREAPTĂ ŞI ÎN SĂGEATĂ

DE

AL. MARINESCU şi ST. SĂVULESCU

Introducere

În lucrarea de faţă ne-am propus să determinăm experimental distribuţia circulaţiei în lungul anvergurii pe două aripi eliptice, dintre care una dreaptă şi cealaltă în săgeată, ambele de aceeaşi alungire şi acelaşi profil în scopul de a prezenta o comparaţie a rezultatelor obţinute cu cele teoretice, şi mai ales o comparaţie între curbele experimentale ale circulaţiei pentru cele două aripi.

Cercetări experimentale asupra distribuţiei circulaţiei pe aripile drepte şi în săgeată sînt numeroase.

Menţionăm astfel rezultatele datorite lui Iakobs, Legras etc.

Nota originală a acestei lucrări constă în alegerea unei aripi eliptice în săgeată, aripa eliptică fiind un model de bază pentru aerodinamica aripii; şi după cît ştim, pînă în prezent, nu au fost date rezultate experimentale asupra acestei aripi.

Cu toate că aripa eliptică dreaptă reprezintă un rezultat clasic al aerodinamicii, am refăcut însă încercările experimentale pe ea, pe de o parte pentru a verifica precizia măsurătorilor şi a instalaţiei experimentale, pe de altă parte pentru a compara valorile circulaţiei din dreptul aceloraşi secţiuni cu cele ale aripii în săgeată.

Rezultatele experimentale obţinute sînt comparate după cum vom vedea cu cele teoretice date de E. Carafoli şi N. Tipei [1].

Consideraţii teoretice

Pentru a evita viteza indusă infinită la considerarea liniei portante în săgeată, se porneşte de la expresia vitezei induse elementare, datorită vîrtejurilor libere,

$$dw_2 = \frac{1}{4\pi}\left[1 + \frac{r_0 - r_c}{c}\right]\frac{d\Gamma}{dy}\frac{dy}{y-\eta}, \qquad (1)$$

unde r_0, r_c sînt razele vectoare din figura 1. Această expresie reprezintă o simplificare a expresiei vitezei induse datorite vîrtejurilor libere din cazul general al repartiţiei vîrtejurilor în suprafaţă, simplificare realizată prin considerarea unei distribuţii constante în lungul corzii a vîrtejurilor legate şi prin considerarea vitezei într-un punct pe linia portantă.

În ceea ce priveşte vîrtejurile legate, viteza indusă datorită lor, va fi exprimată prin influenţa mutuală a vîrtejurilor concentrate în fileul portant.

Examinînd expresia (1) observăm că putem scrie

$$dw_2 = dw_1 + dw_s = \frac{1}{4\pi}\frac{d\Gamma}{dy}\frac{dy}{y-\eta} + \cdot\frac{1}{4\pi}\frac{r_0 - r_c}{c}\cdot\frac{d\Gamma}{dy}\cdot\frac{dy}{y-\eta}, \tag{2}$$

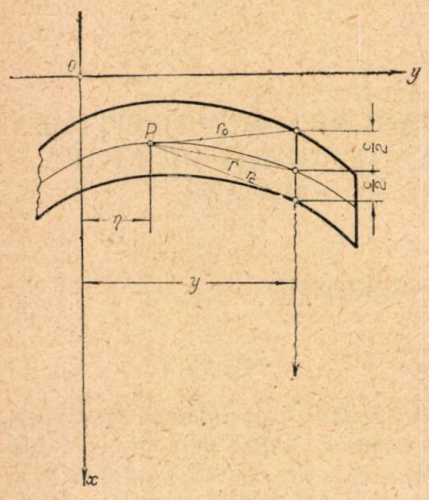


Fig. 1

unde dw_1 reprezintă viteza indusă a liniei portante drepte iar dw_s o viteză suplimentară datorită săgeţii.

Viteza indusă suplimentară are ca expresie, după integrare,

$$w_s = -\frac{1}{4\pi}\int_B^A \frac{\operatorname{tg}\delta}{\sqrt{\frac{(y-\eta)^2}{\cos^2\delta} + \frac{c^2}{4}}}\cdot\frac{d\Gamma}{dy}\,dy, \tag{3}$$

A şi B indicînd extremităţile aripii

Metoda de soluţionare a problemei constă în a considera o aripă dreaptă de acelaşi profil şi aceeaşi alungire cu cea în săgeată, căreia i se atribuie o variaţie suplimentară de incidenţă de-a lungul anvergurii.

Prin aproximaţii potrivite, înlocuind pînza de vîrtejuri marginale de intensitate medie Γ_m şi coarda c prin coarda medie c_m, se ajunge la expresia unghiului indus suplimentar [1]

$$i_s = \frac{1}{4}\lambda A_1 \operatorname{tg}\delta\left[\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1+\Lambda^2(1+\cos\theta)^2}} + \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{1+\Lambda^2(1-\cos\theta)^2}}\right]\frac{1}{1+|\cos\theta|} \tag{4}$$

în care $\Lambda = \dfrac{\lambda}{\cos\delta}$, $\cos\theta = -\dfrac{2y}{b}$, iar A_1 este primul termen din dezvoltarea

$$\Gamma = 2bV_0\sum_1^n A_n \sin n\theta. \tag{5}$$

Scriind că

$$i_s \sin\theta = i_1\sin\theta + i_3\sin 3\theta + i_5\sin 5\theta + i_7\sin 7\theta, \tag{6}$$

prin aproximări de calcul se găseşte

$$\begin{aligned}
i_1 &= \frac{1}{4}\Lambda A_1 \sin\delta\,(3{,}15 - 1{,}99\sqrt[3]{\Lambda} + 0{,}183\,\Lambda - 0{,}0029\,\Lambda^2),\\
i_3 &= \frac{1}{4}\Lambda A_1 \sin\delta\,(-0{,}42 + 0{,}61\sqrt[3]{\Lambda} - 0{,}074\,\Lambda + 0{,}0012\,\Lambda^2),\\
i_5 &= \frac{1}{4}\Lambda A_1 \sin\delta\,(-0{,}034\sqrt[3]{\Lambda} + 0{,}008\,\Lambda - 0{,}00013\,\Lambda^2),\\
i_7 &= \frac{1}{4}\Lambda A_1 \sin\delta\,(-0{,}0015\sqrt[3]{\Lambda}) \sim 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Cum circulația suplimentară datorită vîrtejurilor libere se pune sub forma

$$\Gamma_s = 2b V_0 (a_1 \sin\theta + a_3 \sin 3\theta + \ldots), \tag{8}$$

Coeficienții a_n se determină din relația care dă distribuția de circulație la aripile eliptice cu variație de incidență [1]

$$a_n = \frac{\mu_0}{1 + n\mu_0} i_{sn}. \tag{9}$$

În ceea ce privește vîrtejurile legate, ele dau o viteză indusă suplimentară (fig. 2) care are expresia

$$w'_s = -\frac{\Gamma_m}{4\pi PN} (\cos\beta - \cos 2\delta). \tag{10}$$

Se ivește o dificultate atunci cînd P ajunge în O, deoarece w'_s devine infinită.

Pentru a evita acest lucru și pentru că la centru interacțiunea este foarte complicată, se presupune variația vitezei dată de expresia (10) pînă la un punct A_2 sau B_2 *) și pe porțiunea centrală se păstrează această expresie constantă.

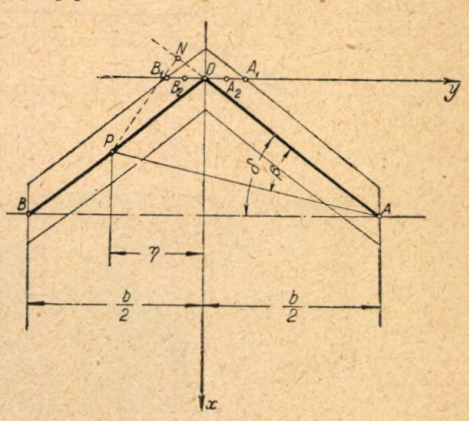


Fig. 2

Oprindu-ne în punctele A_1 B_1 (fig. 2) și efectuînd calculele, se găsește, cu unele aproximații,

$$i'_s \sin\theta = -\frac{1}{8} A_1 \sin\delta \left[\left(\Lambda \sin\delta - \frac{1}{1 + \cos\delta} + 1{,}41 \right) \sin\theta - \frac{2}{3} (\Lambda \sin\delta - 1{,}15) \sin 3\theta + \frac{1}{3} (\Lambda \sin\delta - 1{,}92) \sin 5\theta \right]. \tag{11}$$

Ca aplicație pentru aripa experimentală am avut $\delta = 45^0$ și $\lambda = 6$.

Cu acestea obținem

$$w'_P = -\frac{\Gamma_m}{4\pi PN} \cdot \cos\beta. \tag{12}$$

Punînd

$$\Gamma_m = b V_0 \frac{\pi}{2} A_1, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2}},$$

avem

$$i'_s = \frac{\lambda}{4} A_1 \frac{\cos\delta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\frac{2|\eta|}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{2\eta}{b}\right)^2}} \tag{13}$$

Am reprezentat expresia $i'_s \sin\theta$ printr-un polinom trigonometric făcîndu-l să treacă prin punctele

$$\frac{2\eta}{b} = 0 \quad , \quad \frac{2\eta}{b} = 0{,}383 \quad , \quad \frac{2\eta}{b} = 0{,}705,$$
$$\theta = 90^\circ \quad . \quad \theta = 67^\circ 30' \quad , \quad \theta = 45^\circ \quad .$$

*) Punctul de oprire A_2 sau B_2 reprezintă o ipoteză simplificatoare care poate fi verificată experimental luînd ca bază viteza indusă la centru pe o aripă în săgeată indefinită.

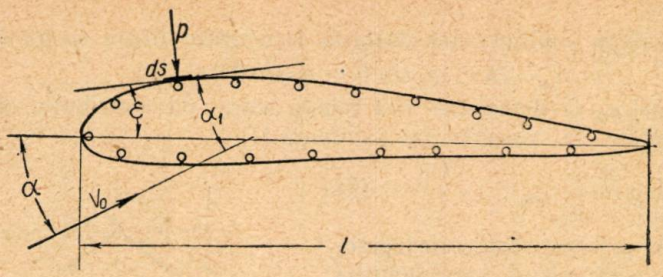


Fig. 3

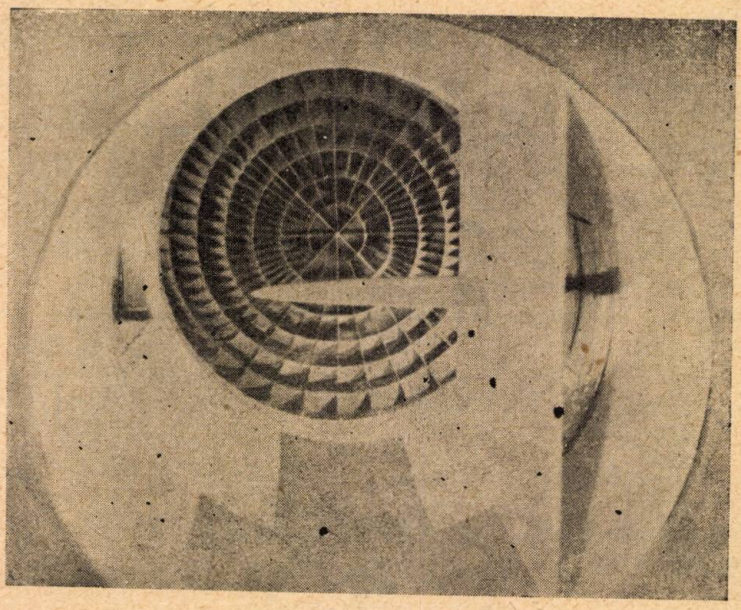


Fig. 4 *a*

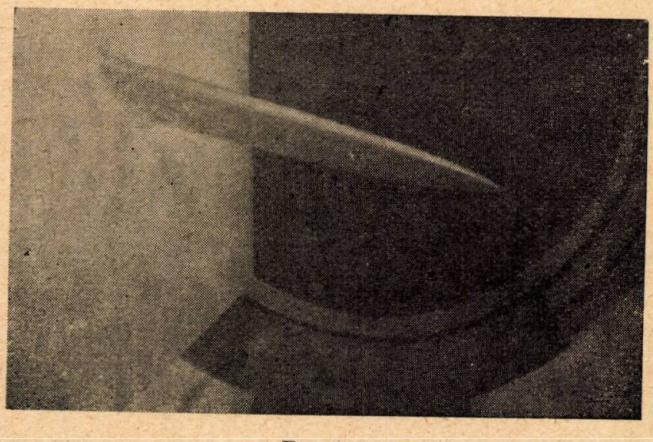


Fig. 4 *b*

Pentru expresile i'_s s-a luat ca valoare limită pe cea de la $\frac{2r_0}{b} = 0{,}167$ în modul indicat în [1], valoare pe care am putut-o constata pe porţiunea centrală.

Punînd

$$i'_s \sin\theta = \frac{1}{4}\lambda A_1 [i'_{1s} \sin\theta + i'_{3s} \sin 3\theta + i'_{5s} \sin 5\theta], \qquad (14)$$

am găsit

$$i'_{1s} = -0{,}63,\ i'_{3s} = 0{,}038,\ i'_{5s} = -0{,}38,$$

cu care am efectuat calculele mai departe.

Metoda experimentală

În principiu, metoda, cunoscută de altfel, constă în a determina presiunile în mai multe secţiuni din lungul anvergurii, pe diverse puncte ale profilului din secţiunile respective. Folosind coeficienţii de presiune deduşi în mod obişnuit, circulaţia din dreptul unei secţiuni rezultă din relaţia

$$\rho V_0 \Gamma = \frac{\rho}{2} V_0^2 \oint_C c_p \cos\alpha_1 \, ds, \qquad (15)$$

integrala de-a lungul conturului C al profilului efectuîndu-se grafic. În relaţia (15) Γ este circulaţia din dreptul secţiunii respective, V_0 este viteza curentului de aer, $C_p = 1 - \frac{V^2}{V_0^2}$ este coeficientul de presiune într-un punct al profilului, iar $\alpha_1 = \alpha - \varepsilon$ (fig. 3).

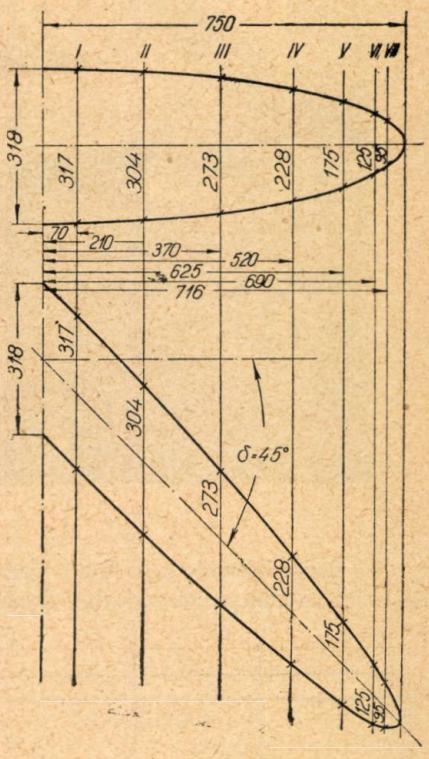


Fig. 5

Încercările s-au executat într-un tunel de secţiune circulară ghidată, de 1,5 m diametru. Pe un panou vertical prins de pereţii tunelului s-a montat aripa prin intermediul unui dispozitiv care permitea din afară variaţia incidenţei aripii (fig. 4 *a* şi 4 *b*).

În fiecare aripă cu profilul nr. 90 [2], modelul fiind construit din lemn, au fost îngropate 18 ţevi de aramă repartizate pe conturul profilului, ca în figura 3.

Aceste ţevi erau închise la capetele dinspre vîrful aripii, avînd găuri de $\Phi = 1$ mm în dreptul secţiunilor dispuse pe anvergură ca în figura 5 şi comunicînd la capetele dinspre coarda centrală cu un multimanometru, prin intermediul unor tuburi de cauciuc, ca în figura 6.

Poziţia panoului a fost definită pe baza sondajului cu tubul Pitot, astfel ca să fie asigurată o bună repartiţie a vitezelor în zona de lucru. Sondajul s-a efectuat în două secţiuni $A - B$ şi $C - D$ (fig. 7), de fiecare dată tubul Pitot urmărind atît diametrul orizontal al venei, cît şi pe cel vertical. Diagrama din figurile 8 *a* şi 8 *b* arată, pe baza măsurătorilor făcute, variaţia raportului $\frac{V}{V_{01}}$

unde V_{0t} este viteza de referinţă a tunelului. Pe baza repartiţiei de viteze din figurile 8 *a* şi 8 *b*, panoul a fost fixat rigid de pereţii tunelului, montîndu-se pe rînd ambele aripi.

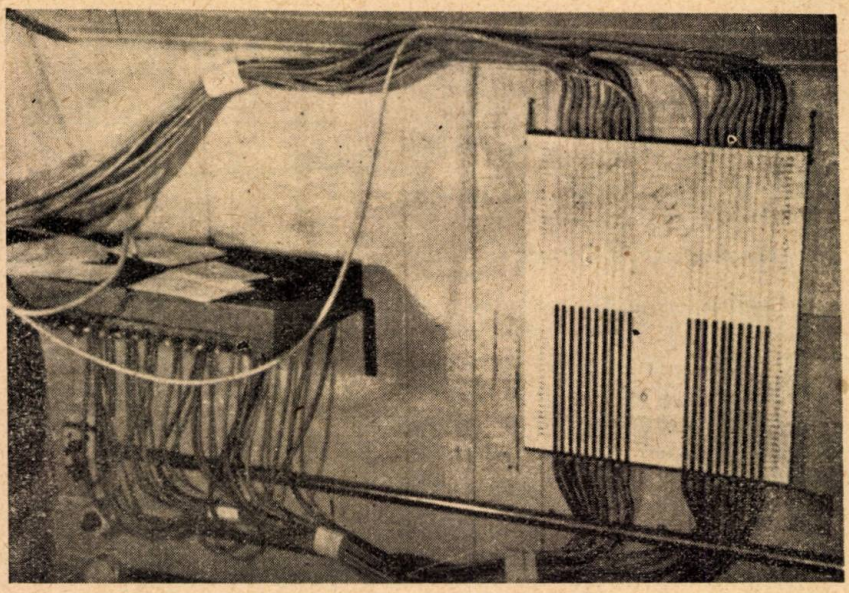


Fig. 6

La fiecare din ele s-au făcut legăturile, s-au astupat găurile tuturor secţiunilor, s-a verificat etanşeitatea şi abia după ce totul a corespuns, s-au destupat pe rînd găurile fiecărei secţiuni, în timp ce celelalte rămîneau astupate. S-a dat apoi drumul curentului de aer, notîndu-se denivelarea h_t a micromanometrului tunelului şi fotografiindu-se concomitent denivelarea h_M a multimanometrului pentru fiecare incidenţă (fig. 9).

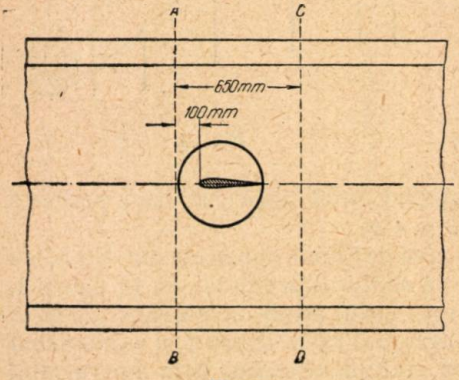


Fig. 7

Cu acestea, coeficientul de presiune C_p intrînd în expresia integralei (15) şi ţinînd seama de toate corecţiile, devine

$$C_p = 1{,}89\frac{h_M}{h_t}. \qquad (16)$$

Aceste valori au permis trasarea diagramelor de presiuni în fiecare din cele şapte secţiuni ale anvergurii, obţinîndu-se conform relaţiei (15), după integrarea grafică, valoarea raportului $\frac{\Gamma}{2bV_0}$.

Valorile experimentale astfel găsite sînt indicate în tablourile nr. 1 — nr. 11 pentru aripa eliptică dreaptă şi în tablourile nr. 12 — nr. 22 pentru aripa eliptică în săgeată.

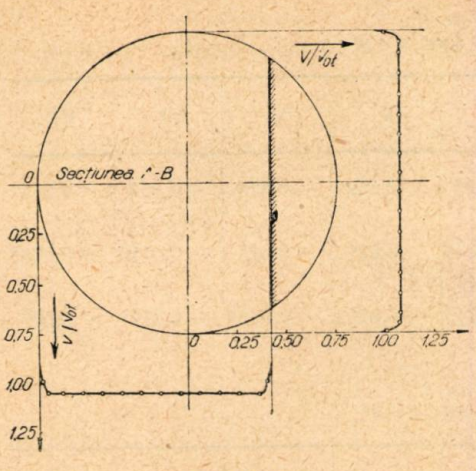


Fig. 8 *a*

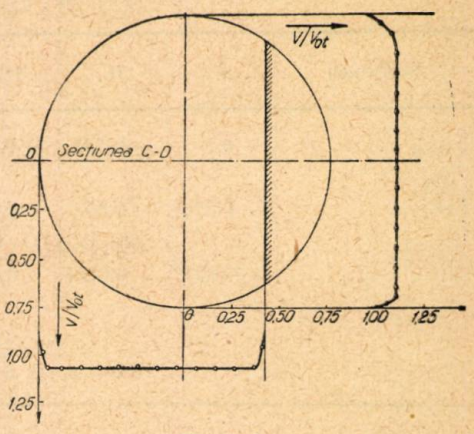


Fig. 8 *b*

Elementele de calcul ale aripilor sînt:

suprafaţa $S=0{,}375$ m²;
alungirea $\lambda = 6$;
profilul E.C. nr. 90 amintit, pentru care am determinat

$$\mu_0 = \frac{KC_0}{2b} = 0{,}319.$$

Rezultatele încercărilor. Comparaţie cu teoria

Pornind de la dezvoltarea teoretică a circulaţiei

$$\Gamma = 2b\, V_0 \sum_1^n A_n \sin n\theta, \quad (17)$$

am calculat raportul $\frac{\Gamma}{2bV_0} = A_1 \sin\theta$ pentru aripa eliptică dreaptă, pe care l-am trecut în tablourile nr. 1 — nr. 11 pentru acelaşi C_z, rezultat experimental.

Comparaţia dintre teorie şi experienţă pentru gama incidenţelor normale de zbor este reprezentată grafic în diagramele din figurile 10—16.

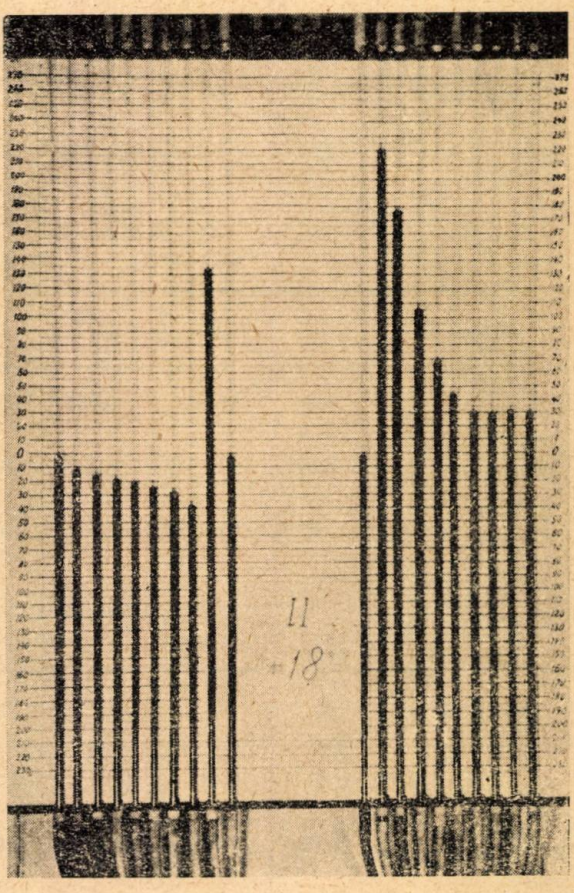


Fig. 9

Tabloul nr. 1

$\alpha = -90°$, $i_{sm} = 0{,}38°$, $\delta = 0°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	− 0,5	− 0,553	− 0,535	− 0,552	− 0,514	− 0,553	− 0,537
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	− 0,0261	− 0,028	− 0,0244	− 0,021	− 0,015	− 0,0115	− 0,0085
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	− 0,0277	− 0,0268	− 0,0243	− 0,0202	− 0,0154	− 0,0109	− 0,008

Tabloul nr. 2

$\alpha = -6$, $i_{sm} = 0{,}234°$, $\delta = 0°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	− 0,31	− 0,328	− 0,319	− 0,328	− 0,328	− 0,338	− 0,302
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	− 0,016	− 0,0167	− 0,0145	− 0,0124	− 0,0096	− 0,007	− 0,0048
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	− 0,0168	− 0,0165	− 0,0149	− 0,0123	− 0,0094	− 0,0067	− 0,005

Tabloul nr. 3

$\alpha = -3°$, $i_{sm} = -0{,}05°$, $\delta = 0$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	− 0,07	− 0,07	− 0,068	− 0,07	− 0,0699	− 0,0728	− 0,067
$\frac{\Gamma_{exp}}{2\nu V_0}$	− 0,0037	− 0,00356	− 0,0031	− 0,002	− 0,00204	− 0,0015	− 0,00107
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	− 0,0367	− 0,00354	− 0,0032	− 0,00266	− 0,00204	− 0,00143	− 0,00108

Tabloul nr. 4

$\alpha = 0°$, $i_{sm} = 0{,}116°$, $\delta = 0°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,162	0,165
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0084	0,0081	0,00735	0,00606	0,00466	0,0034	0,0026
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,00845	0,00815	0,0074	0,00614	0,0047	0,0033	0,0025

Tabloul nr. 5

$\alpha = 3°$, $i_{sm} = 0{,}288°$, $\delta = 0°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,3948	0,4	0,405	0,4	0,395	0,39	0,4
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0208	0,0202	0,0184	0,015	0,0116	0,008	0,0062
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,021	0,0203	0,0182	0,0152	0,0117	0,0082	0,0061

Tabloul nr. 6

$\alpha = 6°$, $i_{sm} = 0{,}427°$, $\delta = 0°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,582	0,598	0,598	0,598	0,602	0,592	0,606
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0307	0,0303	0,027	0,0226	0,0175	0,0107	0,0096
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,031	0,0301	0,027	0,0227	0,017	0,0122	0,0091

Tabloul nr. 7

$\alpha = 9°$, $i_{sm} = 0{,}6°$, $\delta = 0°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,813	0,823	0,833	0,842	0,865	0,82	0,887
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,043	0,041	0,0378	0,032	0,025	0,017	0,014
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,044	0,042	0,038	0,032	0,024	0,0172	0,013

Tabloul nr. 8

$\alpha = 12°$, $i_{sm} = 0{,}776°$, $\delta = 0°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	1,06	1,08	1,088	1,088	1,103	1,088	1,103
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0557	0,0546	0,0493	0,0413	0,0322	0,0225	0,0174
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0567	0,0546	0,0495	0,041	0,0315	0,022	0,017

Tabloul nr. 9
$\alpha = 15°$, $i_{sm} = 0{,}88°$, $\delta = 0°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	1,18	1,204	1,24	1,23	1,3	1,24	1,37
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,062	0,061	0,056	0,046	0,038	0,026	0,021
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,064	0,062	0,056	0,046	0,036	0,025	0,018

Tabloul nr. 10
$\alpha = 18°$, $i_{sm} = 0{,}99°$, $\delta = 0°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	1,275	1,368	1,44	1,355	1,422	1,44	1,64
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,067	0,0694	0,0655	0,0515	0,0415	0,03	0,026
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,721	0,0696	0,063	0,0524	0,04	0,0284	0,0212

Tabloul nr. 11
$\alpha = 21°$, $i_{sm} = 0{,}9°$, $\delta = 0°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	1,18	1,23	1,26	1,303	1,423	1,5	0,975
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0621	0,0623	0,0573	0,05	0,0415	0,0312	0,0154
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,066	0,0635	0,0575	0,0477	0,0365	0,0258	0,0193

Teoretic, după cum s-a arătat, aripa în săgeată se asimilează cu o aripă dreaptă de aceeaşi alungire, în care influenţa săgeţii se traduce printr-o incidenţă suplimentară, datorită vîrtejurilor legate şi libere [1] *).

Şi aici circulaţia se poate pune sub forma

$$\Gamma_t = 2bV_0 \sum_1^n A_{nt} \sin n\theta, \tag{18}$$

în care $A_{nt} = A_n + a_n + a'_n$, unde A_n este datorit aripii drepte, a_n vîrtejurilor libere şi a'_n vîrtejurilor legate.

Calculul acestor coeficienţi, după formulele autorilor citaţi [1], au condus, ţinînd seama de relaţia (18), la valorile raportului $\frac{\Gamma}{2bV_0}$ pentru aripa în săgeată date în tablourile nr. 12 — nr. 22 pentru acelaşi C_z găsit experimental.

În mod analog aripii drepte, am reprezentat pentru aripa în săgeată comparaţia dintre teorie şi experienţă în diagramele din figurile 17—23.

*) p. 329 — 345.

COMPARAȚIE ÎNTRE TEORIE ȘI EXPERIENȚĂ PENTRU ARIPA ELIPTICĂ DREAPTĂ ($\delta = 0°$)

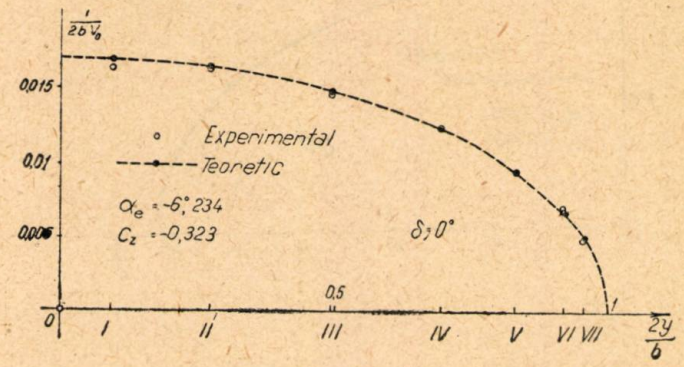


Fig. 10

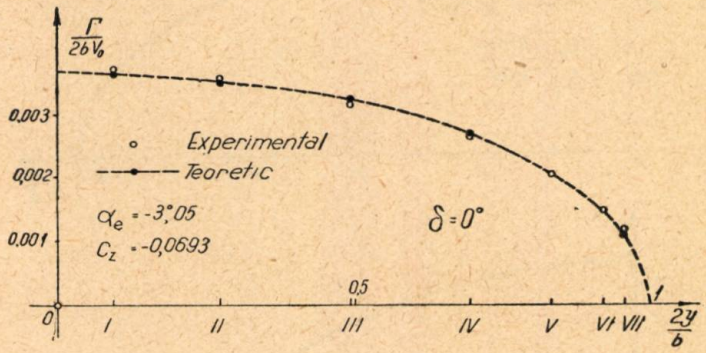


Fig. 11

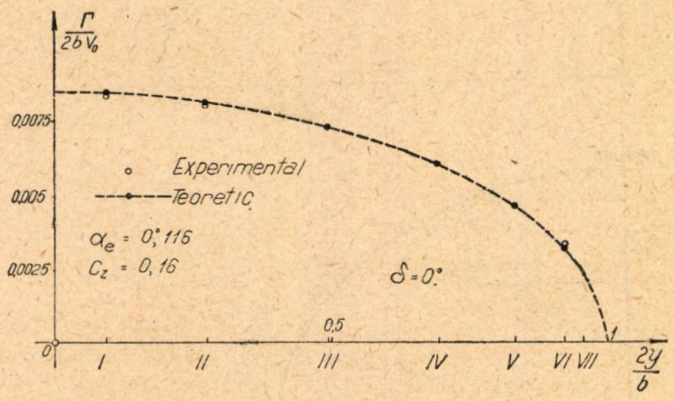


Fig. 12

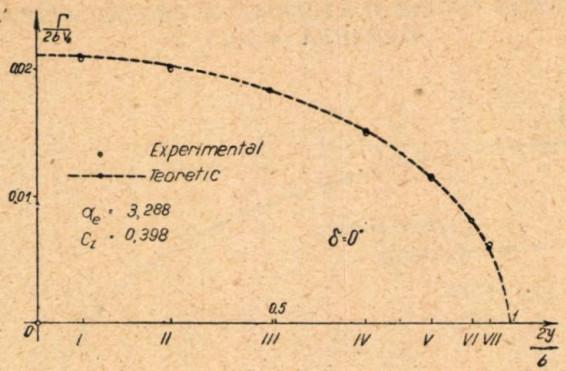


Fig. 13

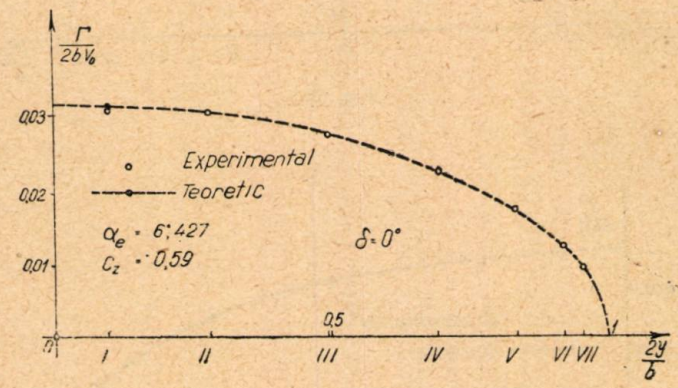


Fig. 14

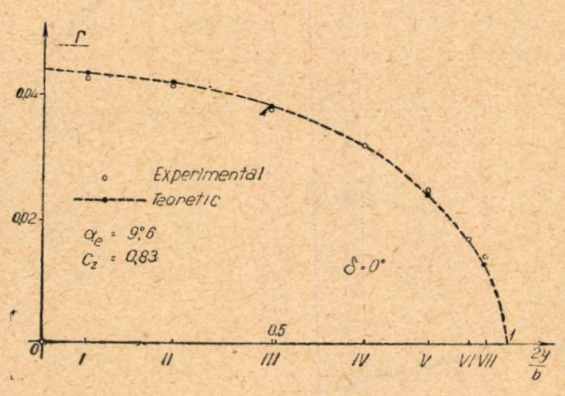


Fig. 15

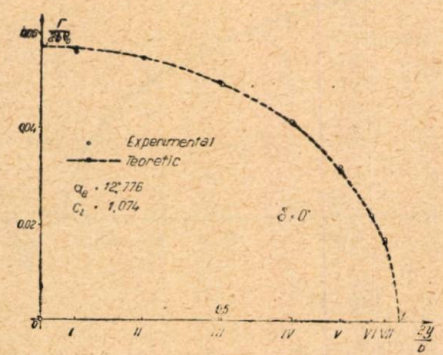


Fig. 16

Tabloul nr. 12

$\alpha = -9°$, $l_{sm} = -0{,}311$, $\delta = 45°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ local}$	— 0,395	— 0,405	— 0,407	— 0,386	— 0,414	— 0,534	— 0,573
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	— 0,0207	— 0,0208	— 0,0185	— 0,01465	— 0,0121	— 0,0111	— 0,009
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	— 0,0188	— 0,0193	— 0,0192	— 0,017	— 0,01305	— 0,0089	— 0,00643

Tabloul nr. 13

$\alpha = -6°$, $l_{sm} = -0{,}133$, $\delta = 45°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ local}$	— 0,166	— 0,18	— 0,179	— 0,178	— 0,18	— 0,176	— 0,173
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	— 0,0095	— 0,0091	— 0,00816	— 0,00675	— 0,00525	— 0,00367	— 0,00274
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	— 0,0082	— 0,00848	— 0,00845	— 0,00745	— 0,00573	— 0,0039	— 0,00282

Tabloul nr. 14

$\alpha = -3°$, $l_{sm} = -0{,}0207$, $\delta = 45°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ local}$	— 0,0239	— 0,027	— 0,03	— 0,0307	— 0,032	— 0,032	— 0,0342
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	— 0,00126	— 0,00136	— 0,00136	— 0,00116	— 0,0009	— 0,00075	— 0,00054
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	— 0,0013	— 0,00134	— 0,00134	— 0,00117	— 0,0009	— 0,00061	— 0,00045

Tabloul nr. 15

$\alpha = 0°$, $l_{sm} = 0{,}122$, $\delta = 45°$

Secțiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ local}$	0,145	0,16	0,175	0,187	0,181	0,235	0,262
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0077	0,00808	0,008	0,0071	0,0052	0,0049	0,00415
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0078	0,00805	0,008	0,0071	0,0054	0,0037	0,00563

Tabloul nr. 16

$\alpha = 3°$, $l_{sm} = 0{,}262$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,303	0,345	0,373	0,385	0,384	0,45	0,516
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,016	0,0175	0,0175	0,0146	0,0111	0,0093	0,008
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0161	0,0169	0,0169	0,0149	0,01147	0,0078	0,0051

Tabloul nr. 17

$\alpha = 6°$ $l_{sm} = 0{,}407$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,492	0,52	0,589	0,555	0,614	0,664	0,726
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,026	0,0264	0,0260	0,0211	0,018	0,014	0,0115
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0251	0,026	0,0259	0,0228	0,0175	0,0119	0,00865

Tabloul nr. 18

$\alpha = 9°$, $l_{sm} = 0{,}545$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,635	0,681	0,746	0,715	0,805	0,855	0,945
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0337	0,0345	0,034	0,0272	0,0235	0,0178	0,0149
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,329	0,0338	0,0337	0,0296	0,0228	0,01505	0,0112

Tabloul nr. 19

$\alpha = 12°$, $l_{sm} = 0{,}655$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
C_z local	0,802	0,843	0,875	0,835	0,805	0,833	0,815
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0423	0,0423	0,04	0,0317	0,0235	0,0173	0,013
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0387	0,04	0,0397	0,035	0,0268	0,0183	0,0132

Tabloul nr. 20

$\alpha = 15°$, $l_{sm} = 0{,}774$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	0,962	1,05	1,06	0,925	0,734	0,795	0,705
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0508	0,0533	0,0483	0,0352	0,0214	0,0165	0,011
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0446	0,046	0,0456	0,0407	0,0312	0,0212	0,015

Tabloul nr. 21

$\alpha = 18°$, $l_{sm} = 0{,}937$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	1,146	1,31	1,055	0,974	0,967	0,8	0,362
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,0605	0,0663	0,0572	0,037	0,0282	0,0167	0,00573
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,053	0,0546	0,0544	0,047	0,0354	0,0252	0,0182

Tabloul nr. 22

$\alpha = 21°$, $l_{sm} = 1{,}11$, $\delta = 45°$

Secţiunea	I	II	III	IV	V	VI	VII
$C_{z\ \text{local}}$	1,343	1,66	1,58	1,088	0,738	0,506	0,337
$\frac{\Gamma_{exp}}{2bV_0}$	0,071	0,0844	0,072	0,039	0,0216	0,0105	0,00533
$\frac{\Gamma_{teoretic}}{2bV_0}$	0,0617	0,0636	0,0635	0,0562	0,0432	0,0294	0,0212

Menţionăm că pentru rezultatele de mai sus am eliminat influenţa venei limitate a tunelului, corectînd unghiul de incidenţă geometric.

Pentru aripa eliptică dreaptă avem situaţia din figura 24, iar pentru aripa eliptică în săgeată situaţia din figura 25, unde poziţia aripii la incidenţe mari se traduce, pentru corecţie, printr-o mărire aparentă a anvergurii. În acest mod, utilizînd expresia unghiului suplimentar mediu

$$i_{sm} = \frac{SC_z}{4\pi b^2} \ln \frac{\pi}{2\tau_0} \frac{\sin 2\tau_1}{\sin \pi \frac{\tau_1}{\tau_0}}, \qquad (19)$$

am calculat corecţiile date în tablourile nr. 1 — nr. 11 şi în tablourile nr. 12 — nr. 22 pentru aripa în săgeată.

Exactitatea rezultatelor experimentale expuse se poate dovedi limpede prin faptul că alura eliptică pentru aripa dreaptă s-a menţinut aproape riguros exactă

COMPARAȚIE ÎNTRE TEORIE ȘI EXPERIENȚĂ PENTRU ARIPA ELIPTICĂ ÎN SĂGEATĂ ($\delta = 45°$)

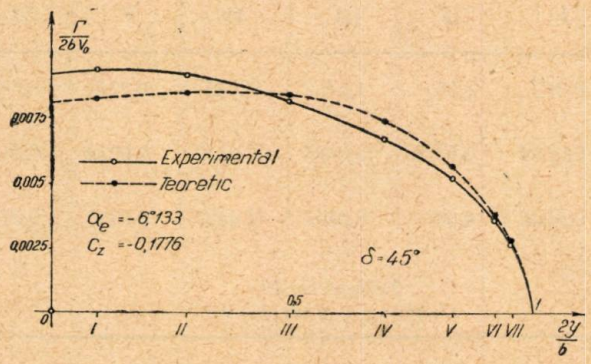


Fig. 17

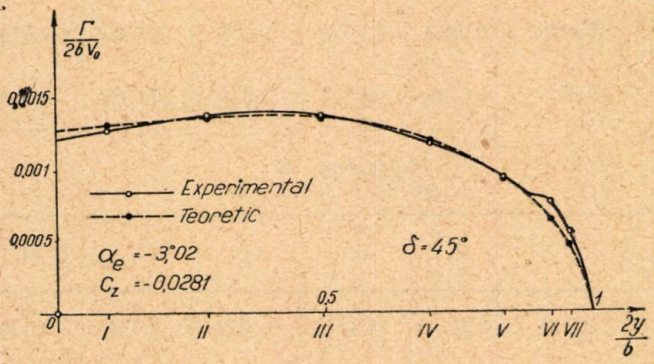


Fig. 18

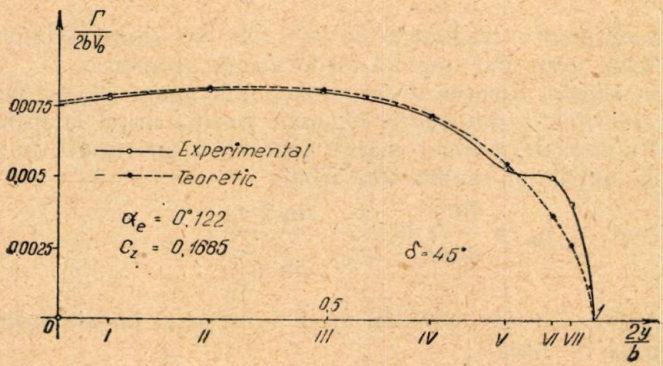


Fig. 19

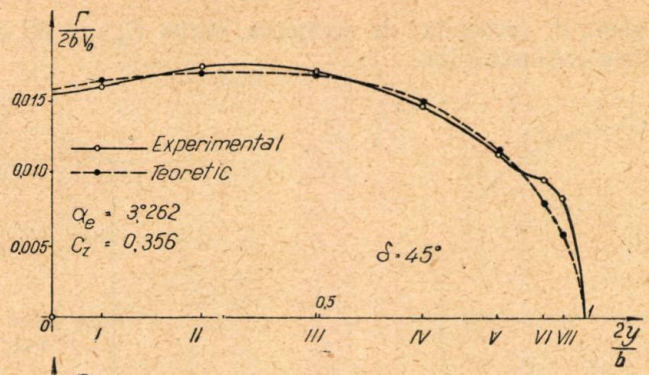


Fig. 20

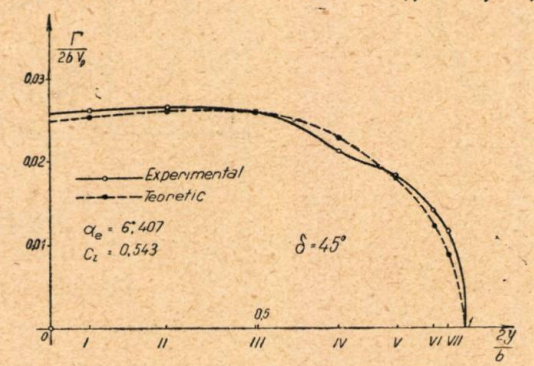


Fig. 21

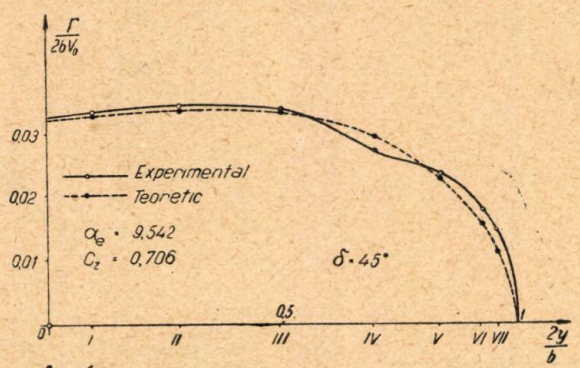


Fig. 22

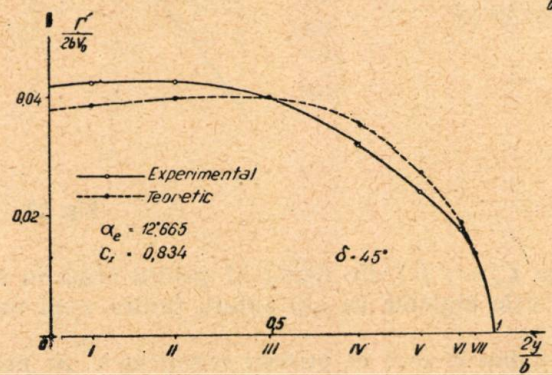


Fig. 23

pentru toată gama de incidenţe; de asemenea, curba $C_z = f(\alpha)$ din figura 26 confirmă precizia măsurătorilor.

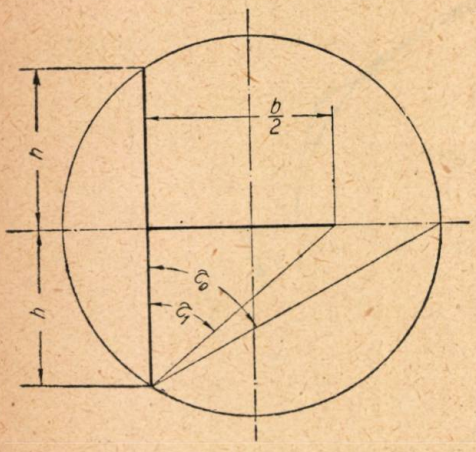


Fig. 24

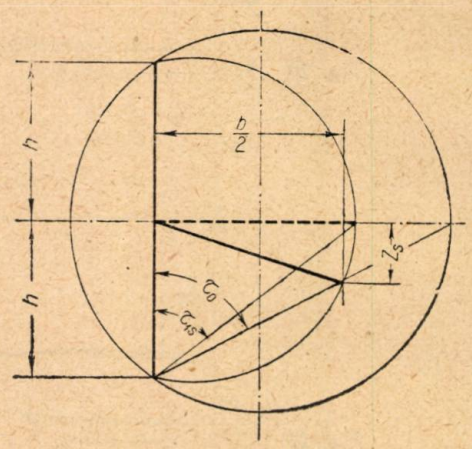


Fig. 25

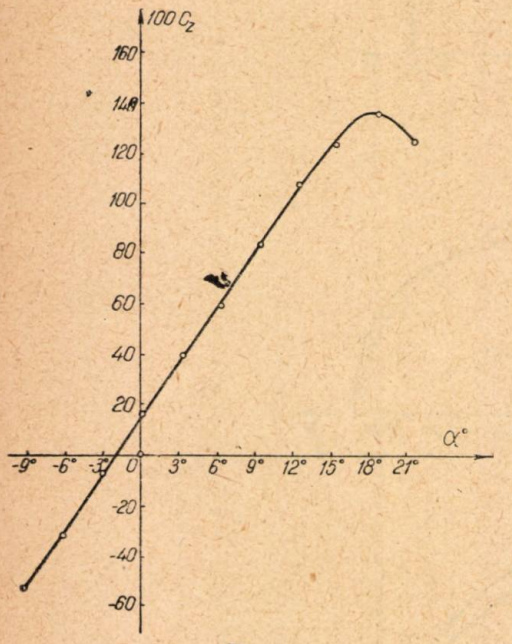


Fig. 26

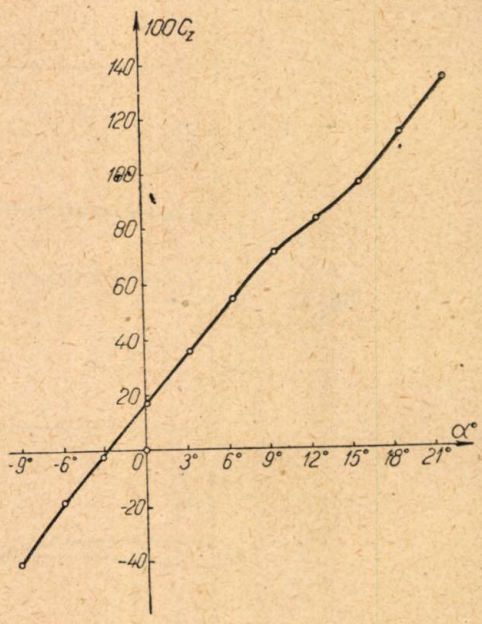


Fig. 27

De altfel şi curba $C_z = f(\alpha)$ din figura 27 pentru aripa în săgeată oferă o alură apropiată de cele obţinute de alţi autori, pentru aripi trapezoidale în săgeată, de exemplu.

Nu poate exista dubiu în ceea ce priveşte experienţele. Se poate spune că s-au eliminat pe cît posibil cauzele de erori.

CONCLUZII

În ceea ce priveşte comparaţia cu teoria, lăsînd la o parte aripa dreaptă care este cunoscută, să ne ocupăm de cea în săgeată. Se constată un foarte bun acord între teorie şi experienţă pentru o gamă de incidenţe cuprinse între $-6°$ şi $+12°$, respectiv pentru C_z cuprins între $-0{,}1776$ şi $+0{,}834$.

Se observă însă şi unele deosebiri, dintre care cea mai importantă pare a fi aceea constînd în fenomenul de margine. Acest fenomen se traduce printr-o

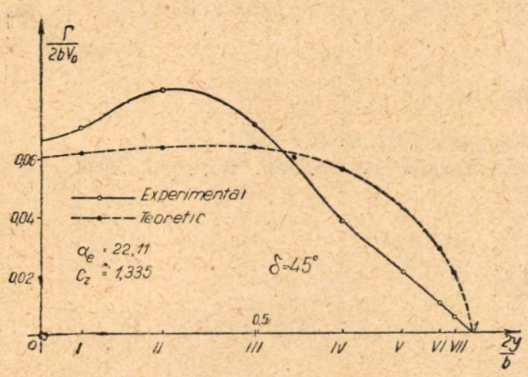


Fig. 28

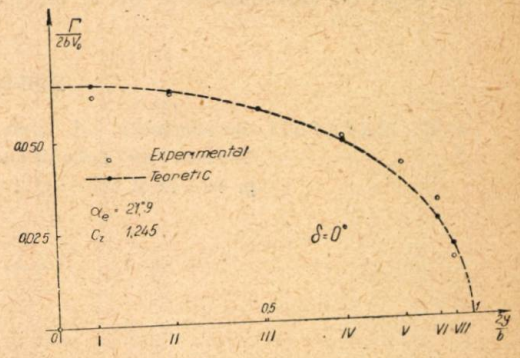


Fig. 29

creştere locală a circulaţiei la extremitatea (marginea) aripii, pentru incidenţe mici (a se vedea diagramele), care apoi degenerează odată cu mărirea incidenţei, ajungînd ca la incidenţe mari (fig. 28) să prezinte o scădere accentuată a circulaţiei pe pătrimea dinspre extremitatea aripii. Odată cu această degenerare către margini, se poate constata o mărire a circulaţiei către mijlocul aripii. Explicaţia acestui fenomen s-ar putea atribui, pentru incidenţe mici, unei difuzări a depresiunii nucleului de vîrtej, localizată către extremitatea aripii, lucru pe care îl arată diagramele de presiuni.

Pe măsură ce incidenţa creşte, din analiza diagramelor de presiune, se constată apariţia unor dezlipiri premature în secţiunile dinspre extremitatea aripii, ceea ce se poate explica prin abaterea scurgerii de la ipoteza plană, în acest caz aripa devenind un corp oarecare în spaţiu, lucru care nu se petrece la aripa eliptică dreaptă (fig. 29).

S-a neglijat în această reprezentare diferenţa de incidenţă datorită corecţiei de tunel, deosebită pentru fiecare caz, această diferenţă fiind de ordinul 0,1° în medie, deci neglijabilă.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ ВДОЛЬ РАЗМАХА ПРЯМОГО И СТРЕЛОВИДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КРЫЛА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы приводят результаты экспериментального исследования двух эллиптических крыльев, прямого и стреловидного, сравнивая их с результатами теоретического исследования распределения циркуляции вдоль размаха.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LA RÉPARTITION DE LA CIRCULATION LE LONG DE L'ENVERGURE, SUR L'AILE ELLIPTIQUE DROITE ET EN FLÈCHE

(RÉSUMÉ)

Cette étude expose les résultats expérimentaux obtenus sur deux ailes elliptiques, l'une droite et l'autre en flèche, par comparaison aux résultats théoriques au sujet de la répartition de la circulation le long de l'envergure.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Aerodinamica*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1951, p. 329–345.
2. – *Travaux du Laboratoire Aerodinamique de Bucarest*. Bucureşti, 1938, p. 10–13 şi 117–211.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

AEROMECANICĂ

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A DISTRIBUŢIEI PRESIUNII DATORITE VÎNTULUI PE ACOPERIŞURI DE TRIBUNE

DE

I. NEDELESCU

Obiectul lucrării

Într-o lucrare anterioară [1] am prezentat rezultatele primei serii de încercări executate în tunelul aerodinamic pe o machetă de tribună. Încercările cuprinse în lucrarea citată au fost efectuate cu atac de vînt frontal asupra părţii deschise din faţa tribunei. În lucrarea de faţă prezentăm rezultatele obţinute în încercările ce s-au efectuat cu atac de vînt diametral opus, adică normal pe faţa închisă din spatele tribunei.

Modelul, dispozitivul experimental şi instalaţia în care s-au efectuat încercările sînt identice cu cele utilizate în lucrarea [1]. S-au menţinut de asemenea şi vitezele de lucru, gama de variaţie a parametrilor α, tg β şi H/L precum şi toate notaţiile a căror semnificaţie este indicată în figura 1.

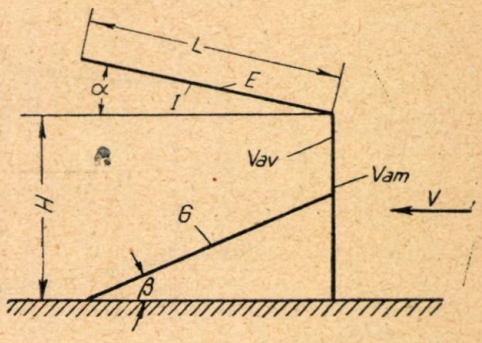


Fig. 1

Prezentarea rezultatelor

În lucrarea de faţă sînt sintetizate rezultatele unei serii de experienţe; nu am reprodus însă decît diagramele referitoare la patru dintre ele (fig. 2—5) alese dintre cele mai caracteristice. În diagramele reproduse sînt trasate curbele de repartiţie ale coeficienţilor de presiune, valoarea acestora fiind reprezentată pe perpendicularele la axa de simetrie a modelului în punctele în care sînt situate prizele de presiune şi măsurată de la piciorul perpendicularei. Coeficienţii de presiune corespunzători prizei din extremitatea acoperişului sînt reprezentaţi pe axa de simetrie a acestuia şi măsuraţi de la linia care îl mărgineşte.

Aspectul general al diagramelor este acelaşi pentru toate încercările, ele diferind numai prin valoarea coeficienţilor de presiune. Toate curbele de presiune

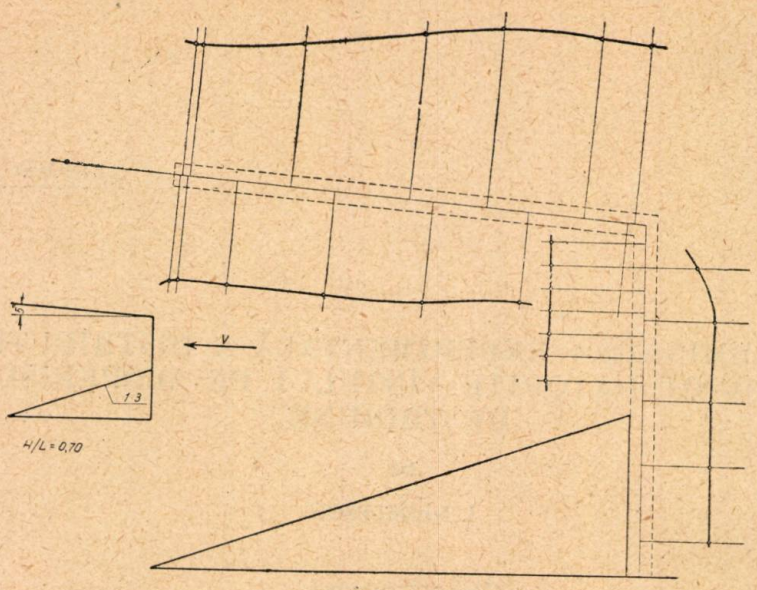


Fig. 2

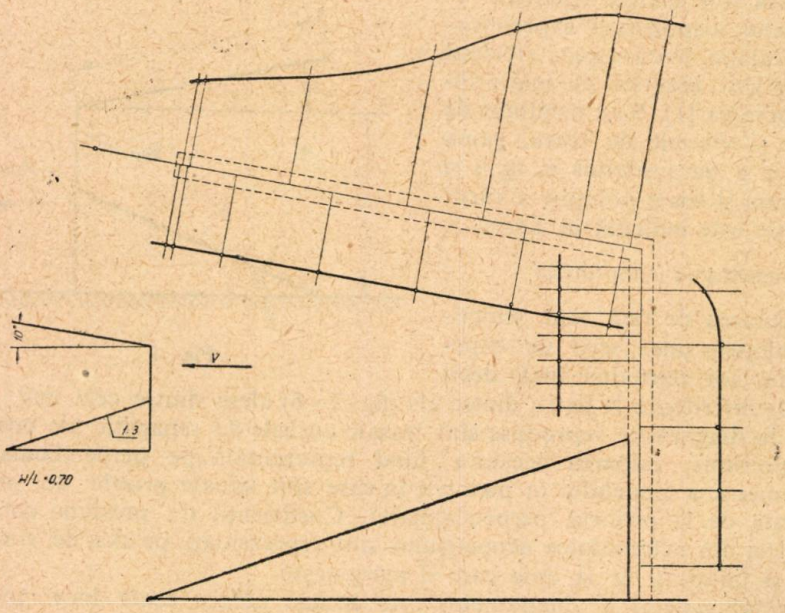


Fig. 3

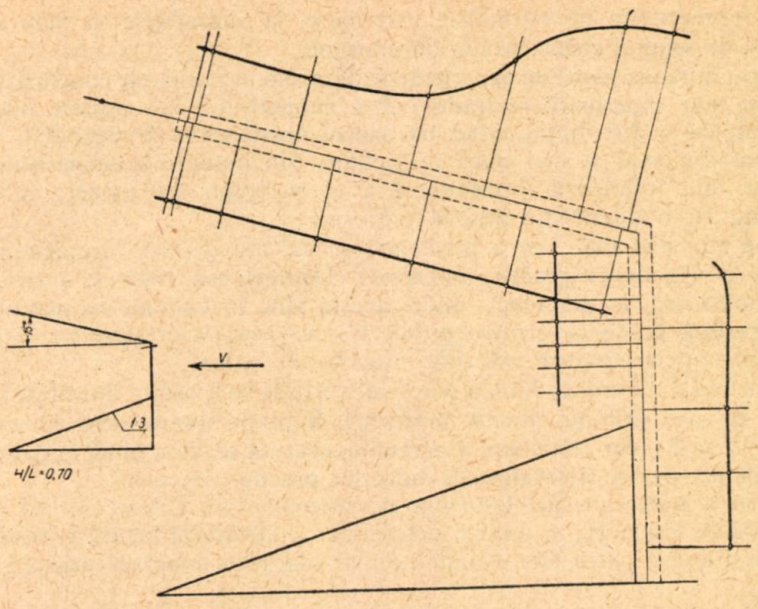


Fig. 4

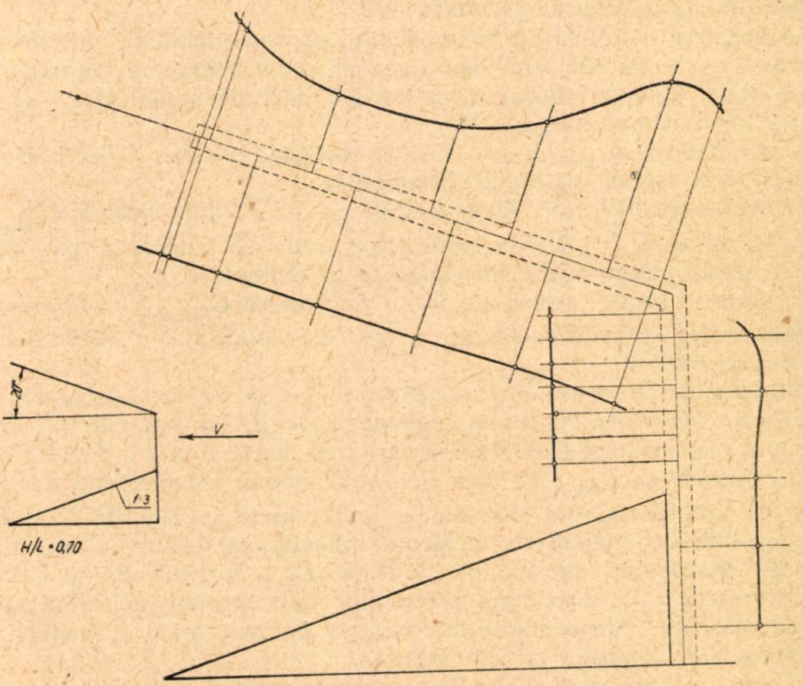


Fig. 5

au fost reprezentate pe normalele exterioare la suprafeţele la care se referă, indiferent de semnul coeficientului de presiune.

Pentru întreaga gamă de experienţe se desprind următoarele concluzii generale:

— pe faţa superioară (extrados) E a acoperişului iau naştere întotdeauna depresiuni, cu o distribuţie avînd un aspect aproximativ trapezoidal, mai mici în treimea din aval şi mai mari în treimea din amonte a acoperişului;

— pe faţa inferioară (intrados) I a acoperişului iau naştere întotdeauna depresiuni, cu o distribuţie practic uniformă;

— pe faţa din aval Vav a peretelui vertical iau naştere întotdeauna depresiuni, cu o distribuţie practic uniformă. Depresiunea tinde să crească înspre partea inferioară a peretelui, unde acesta vine în contact cu planul înclinat care reprezintă gradenele pentru public G, dar această creştere nu este importantă pentru determinarea valorilor practice de calcul;

— pe faţa din amonte Vam a peretelui vertical iau naştere întotdeauna suprapresiuni, cu o distribuţie practic uniformă. Suprapresiunile scad către extremitatea superioară şi cea inferioară a peretelui, această scădere fiind însă de asemenea neglijabilă pentru determinarea valorilor practice de calcul.

Pentru a putea urmări influenţa parametrilor am folosit acelaşi procedeu ca în lucrarea citată [1] şi anume determinarea coeficienţilor de presiune medii pe fiecare din cele patru feţe examinate mai sus, prin integrare grafică.

Interpretarea rezultatelor

Atît în timpul experimentării cît şi comparînd între ele diagramele de distribuţie a presiunilor şi valorile coeficienţilor $C_{p_{med}}$, am făcut următoarele constatări care, de altfel, erau de aşteptat:

— scurgerea aerului în jurul modelului pentru orientarea vîntului adoptată în lucrarea prezentă este mult mai instabilă decît scurgerea obţinută în cazul lucrării citate. Ea este influenţată de variaţii mici ale unghiului de incidenţă α, mai ales în domeniul $5° < \alpha < 10°$;

— parametrul tg β nu are nici o influenţă asupra aspectului scurgerii aerului şi deci asupra distribuţiei presiunilor.

În aceste condiţii, am făcut mediile aritmetice ale valorilor $C_{p_{med}}$ pentru tg $\beta = 1/2$ şi tg $\beta = 1/3$, corespunzătoare aceloraşi valori ale parametrilor α şi H/L; aceste valori medii sînt indicate în tabloul nr. 1.

Cu ajutorul acestor valori am trasat diagramele $C_{p_{med}} = f(\alpha)$ pentru diferitele valori H/L şi pentru cele patru feţe ale modelului pe care am urmărit variaţia presiunilor.

Din examinarea acestor diagrame (fig. 6 şi 7) se pot trage următoarele concluzii:

Influenţa incidenţei. Pentru un unghi de incidenţă α apropiat de 10°, coeficienţii de presiune medii pe faţa E au o valoare maximă, iar pe faţa I şi Vav au o valoare minimă. Coeficienţii $C_{p_{med}}$ pe faţa Vam sînt practic independenţi de incidenţă.

Pe de altă parte, din diagramele reprezentate în figurile 2, 3, 4 şi 5 se poate constata că unghiul de incidenţă influenţează destul de sensibil asupra aspectului distribuţiei presiunilor pe faţa E: la unghiul minim la care s-au făcut încercările (5°), distribuţia presiunilor este aproape uniformă; odată cu creşterea incidenţei, depresiunile din treimea din aval arată o scădere, iar cele din treimea din amonte o creştere relativă.

Influenţa parametrului H/L. Se constată o scădere a valorilor coeficienţilor $C_{p_{med}}$ odată cu scăderea parametrului H/L. Admiţînd o eroare de 3% asupra

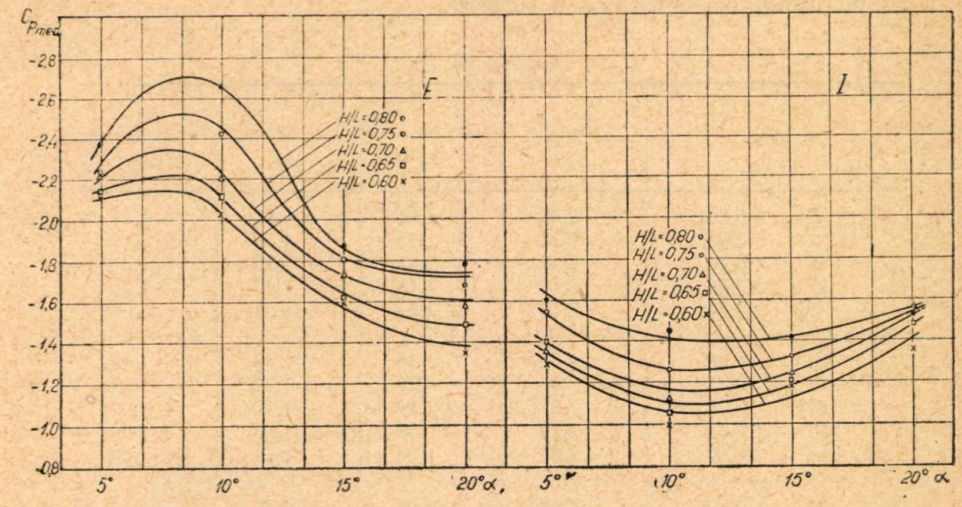

C_{Pmed}
-2,8
-2,6
-2,4
-2,2
-2,0
-1,8
-1,6
-1,4
-1,2
-1,0
-0,8
F
I
H/L=0,80
H/L=0,75
H/L=0,70
H/L=0,65
H/L=0,60
5°
10°
15°
20°α,
5°
10°
15°
20° α

Fig. 6

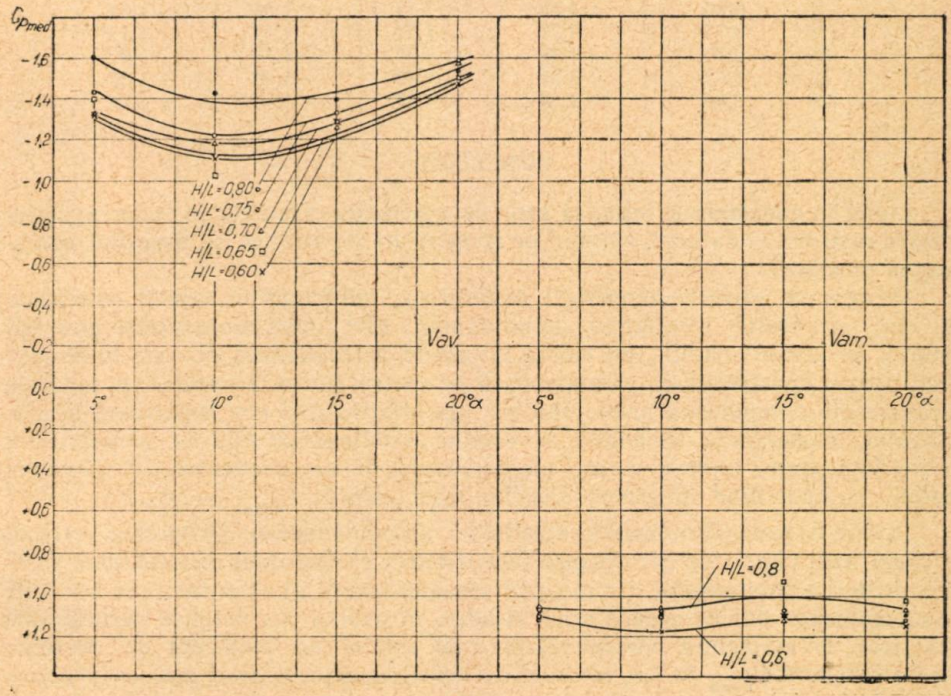

C_{Pmed}
-1,6
-1,4
-1,2
-1,0
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0,0
+0,2
+0,4
+0,6
+0,8
+1,0
+1,2
H/L=0,80
H/L=0,75
H/L=0,70
H/L=0,65
H/L=0,60
Vav.
Vam.
5°
10°
15°
20°α
H/L=0,8
H/L=0,6

Fig. 7

valorilor experimentale ale coeficienților de presiune, aspectul oarecum dezordonat al unora dintre punctele care au servit la construirea diagramelor $C_{p_{med}} = f(\alpha)$ nu trebuie să constituie o surpriză.

Tabloul nr. 1

α	H/L	$C_{p_{med}}$			
		E	I	Vav	Vam
5	0,80	− 2,38	− 1,61	− 1,61	+ 1,11
5	0,75	− 2,24	− 1,57	− 1,43	+ 1,10
5	0,70	− 2,23	− 1,35	− 1,33	+ 1,05
5	0,65	− 2,15	− 1,40	− 1,40	+ 1,06
5	0,60	− 2,12	− 1,29	− 1,32	+ 1,08
10	0,80	− 2,67	− 1,46	− 1,43	+ 1,18
10	0,75	− 2,43	− 1,26	− 1,22	+ 1,09
10	0,70	− 2,21	− 1,12	− 1,18	+ 1,07
10	0,65	− 2,12	− 0,99	− 1,03	+ 1,06
10	0,60	− 2,03	− 1,05	− 1,11	+ 1,08
15	0,80	− 1,88	− 1,42	− 1,40	+ 1,10
15	0,75	− 1,81	− 1,34	− 1,33	+ 1,08
15	0,70	− 1,74	− 1,24	− 1,26	+ 1,12
15	0,65	− 1,62	− 1,21	− 1,28	+ 0,93
15	0,60	− 1,60	− 1,18	− 1,28	+ 1,10
20	0,80	− 1,68	− 1,53	− 1,53	+ 1,09
20	0,75	− 1,79	− 1,57	− 1,59	+ 1,12
20	0,70	− 1,59	− 1,57	− 1,58	+ 1,07
20	0,65	− 1,49	− 1,44	− 1,50	+ 1,02
20	0,60	− 1,34	− 1,35	− 1,48	+ 1,15

CONCLUZII

Luînd în considerație întreaga serie de experiențe efectuate în vederea determinării distribuției datorită vîntului pe acoperișuri de tribune se desprind următoarele concluzii:

În ceea ce privește acoperișul propriu-zis, indiferent de sensul curentului de aer, momentul rezultantei aerodinamice este opus momentului greutății proprii. În aceste condiții, un calcul la sarcini aerodinamice nu este interesant decît pentru construcții cu greutate mică pe metru pătrat. Considerînd sarcinile rezultate din compunerea presiunilor pe fața inferioară și cea superioară a acoperișului, constatăm că solicitarea la sarcini aerodinamice este de același ordin de mărime pentru ambele sensuri ale curentului de aer, coeficientul de presiune mediu rezultant fiind în general cuprins între valorile $C_{p_{med}} = 2{,}0...2{,}5$.

În ceea ce privește momentul rezultantei aerodinamice de pe peretele vertical, în cazul unui curent de aer dinspre fața tribunei el este opus momentului greutății proprii a acoperișului, iar în cazul sensului invers al curentului de aer cele două momente sînt de același sens. Așadar, în primul caz peretele vertical este descărcat de momentul corespunzător unei sarcini cu coeficient de presiune mediu rezultant $C_{p_{med}} \approx 1{,}8$, iar în al doilea caz este încărcat de momentul corespunzător unei sarcini cu $C_{p_{med}} < 3{,}0$.

Date fiind condițiile de anvergură infinită în care au fost executate încercările, precum și datorită faptului că aspectul scurgerii aerului și deci valoarea sarcinilor aerodinamice pe o clădire dată sînt sensibil influențate de configurația locală a solului și de obstacolele învecinate, rezultatele încercărilor sintetizate aici prezintă un aspect general calitativ, iar cifrele indicate au o valoare informativă. Ca urmare a acestui fapt, pentru determinarea exactă a solicitărilor aerodinamice pe astfel de construcții, este necesar să se facă încercări care să țină seama de condițiile locale. Este de asemenea necesar să se facă încercări speciale, cu modele corespunzătoare, pentru cazurile în care se prevede construirea unor tribune cu ferestre sau goluri în peretele vertical sau în acoperiș.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ВЕТРА НА КРЫШИ ТРИБУН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе приводятся результаты опытов, проведенных в аэродинамической трубе над макетом крытой трибуны, с целью определения распределения давления ветра на крышу и вертикальную стенку при нормальном воздушном течении с задней стороны трибуны. Автор высказывает также соображения и заключения о ряде проведенных в этом направлении опытов при ветре, дующем на трибуну как спереди, так и сзади.

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA DISTRIBUTION DES PRESSIONS DUES AU VENT, SUR LES TOITURES DES TRIBUNES

(RÉSUMÉ)

Cet article expose les résultats des expériences effectuées sur une maquette de tribune couverte, afin de déterminer la distribution des pressions dues au vent sur le toit et la paroi verticale, considérant un courant d'air normal à la paroi postérieure de la tribune. On fait également des considérations sur toute la série d'expériences effectuées dans ce domaine.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu și I. Nedelescu, Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. V, nr. 1—2, ianuarie-iunie 1954 p. 163.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

AEROMECANICĂ

ASUPRA VENTILAŢIEI BĂILOR INDUSTRIALE PREVĂZUTE CU SUFLANTĂ ŞI ASPIRATOR MARGINAL

DE

I. DRESCHER

În această lucrare ne propunem să dăm o metodă de calcul a debitelor de aer ce trebuie puse în mişcare pentru ventilarea unei băi industriale prevăzute cu suflantă şi aspirator marginal. O problemă analogă, studiată într-un cadru mai simplificat de ing. A. G u ţ u, ne-a servit ca sugestie.

Vom studia cazul cînd baia este aşezată lîngă un perete vertical, astfel încît dimensiunea sa paralelă cu acest perete este mare faţă de cealaltă dimensiune (fig. 1).

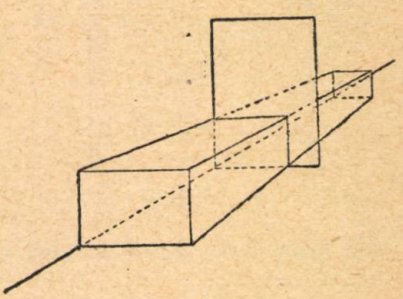


Fig. 1

Presupunînd că mişcarea aerului şi a gazelor nocive ce ies din baie este identică în orice plan normal pe latura mare a băii, ipoteză de altfel foarte apropiată de realitate, putem utiliza metodele hidrodinamice plane.

Vitezele fiind reduse, putem considera cu mare exactitate fluidul incompresibil.

Mişcarea studiată o vom construi prin suprapunerea a patru mişcări componente: mişcarea datorită jetului suflantei, mişcarea creată de aspiratorul marginal, mişcarea ascendentă a gazelor nocive degajate de lichidul din baie şi mişcarea aerului din încăpere, datorită unei eventuale ventilaţii generale existente.

Pentru mişcarea datorită jetului suflantei, pentru cea datorită aspiratorului şi cea a aerului din încăpere, atît suprafaţa lichidului din baie cît şi suprafaţa peretelui vertical adiacent acesteia sînt suprafeţe de curent. Pentru mişcarea ascendentă a gazelor nocive suprafaţa lichidului este o echipotenţială, la care vitezele sînt normale, iar suprafaţa peretelui este suprafaţă de curent.

Funcţiile de curent ale celor patru mişcări componente trebuie să satisfacă aceste condiţii la limită.

Jetul suflantei este asimilat cu jumătatea unui jet liber turbulent, axul acesteia din urmă coincizînd cu suprafaţa lichidului din baie (fig. 2).

Cu notaţiile:
b — lărgimea fantei de refulare a suflantei;
c_0 — viteza în această fantă;
$Q_j = c_0 b$ — debitul refulat de suflantă pe unitatea de lungime a băii;
B — lăţimea băii;
a — coeficientul structurii turbulente a jetului;

$$\xi = \frac{x}{B}, \eta = \frac{y}{B}, \beta = \frac{b}{B}$$

şi folosind rezultatele expuse în legătură cu calculul perdelelor de aer într-o lucrare a lui I. A. Sepelev [1], expresia funcţiei de curent a mişcării datorită jetului suflantei va fi

$$\psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} c_0 \sqrt{a2bx}\, \text{th}\frac{y}{ax} = Q_j \sqrt{\frac{3a}{2\beta}} \sqrt{\xi}\, \text{th}\frac{\eta}{a\xi}. \tag{1}$$

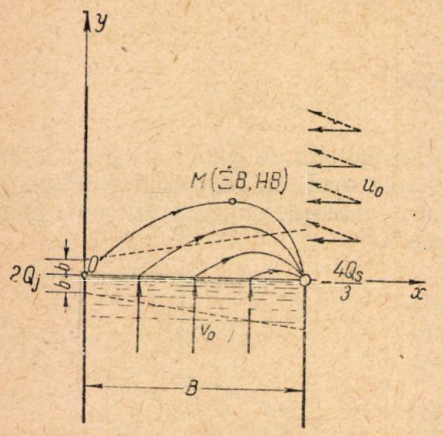


Fig. 2

Aspiratorul marginal este reprezentat ca o sursă teoretică plasată pe suprafaţa lichidului din baie (axul jetului), astfel încît funcţia de curent a mişcării corespunzătoare va fi

$$\psi_2 = -\frac{4}{3}\frac{Q_s}{2\pi}\left[\text{argtg}\frac{y}{x-B} + \text{argtg}\frac{y}{x+B}\right] = -\frac{2Q_s}{3\pi}\left[\text{argtg}\frac{\eta}{\xi-1} + \text{argtg}\frac{\eta}{\xi+1}\right], \tag{2}$$

unde Q_s este debitul absorbit de aspirator pe unitatea de lungime a băii.

Viteza mişcării ascendente a gazelor nocive v_0 fiind presupusă constantă şi uniformă pe întreaga suprafaţă a lichidului din baie, vom scrie expresia funcţiei de curent sub forma

$$\psi_3 = -v_0 x = -v_0 B\xi; \quad 0 < \xi < 1. \tag{3}$$

Considerînd componenta orizontală a vitezei mişcării datorită ventilaţiei generale egală cu $-u_0$ pe verticala $x = B$, vom putea scrie

$$\psi_4 = -\frac{u_0 xy}{B} = -u_0 B\xi\,\eta. \tag{4}$$

Acestea fiind cunoscute, urmează că funcţia de curent a mişcării rezultante va avea expresia

$$\psi = Q_j \sqrt{\frac{3a}{2\beta}} \sqrt{\xi}\, \text{th}\frac{\eta}{a\xi} - \frac{2Q_s}{3\pi}\left[\text{argtg}\frac{\eta}{\xi-1} + \text{argtg}\frac{\eta}{\xi+1}\right] - v_0 B\xi - u_0 B\xi\,\eta, \tag{5}$$

avînd un sens fizic numai în domeniul $0 < \xi < 1$; $\eta > 0$.

Putem acum să determinăm punctul cel mai de sus pînă la care se ridică gazele nocive emanate de lichidul din baie, punct ale cărui coordonate le notăm cu $X = \Xi B$, $Y = \text{H}\, B$.

Într-adevăr, după cum se poate vedea din figura 2, zona în care există astfel de gaze este limitată de suprafața lichidului și de linia de curent ce trece prin punctele $x = y = 0$ și $x = B$; $y = 0$. Punctul cel mai de sus al acestei curbe este punctul căutat pentru care $\xi = \Xi$, $\eta = \mathrm{H}$.

Se poate vedea ușor din (5) că ecuația liniei de curent căutate este

$$Q_j \sqrt{\frac{3a}{2\beta}} \sqrt{\xi}\, \mathrm{th}\, \frac{\eta}{a\xi} - \frac{2Q_s}{3\pi}\left[\mathrm{arctg}\, \frac{\eta}{\xi - 1} + \mathrm{arctg}\, \frac{\eta}{\xi + 1} - \pi\right] - v_0 B \xi - u_0 B \xi \eta = 0\ ;\quad 0 < \xi < 1;\ \eta > 0. \tag{6}$$

În punctul de maxim al acestei linii de curent, componenta vitezei de-a lungul axei Oy, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$, este nulă și deci punctul căutat se află la intersecția curbei dată de (6) cu curba $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0$, adică

$$Q_j \sqrt{\frac{3a}{2\beta}} \frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left[\mathrm{th}\frac{\eta}{a\xi} - \frac{2\eta}{a\xi}\frac{1}{\mathrm{ch}^2 \frac{\eta}{a\xi}}\right] + \frac{2Q_s}{3\pi}\left[\frac{\eta}{(\xi-1)^2 + \eta^2} + \frac{\eta}{(\xi+1)^2 + \eta^2}\right] - v_0 B - u_0 B \eta = 0;\quad 0 < \xi < 1;\ \eta > 0. \tag{6'}$$

Pentru o poziție dată a acestui punct, expresiile (6) și (6′) devin, după substituția $\xi = \Xi$, $\eta = \mathrm{H}$, un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute Q_j și Q_s care permit determinarea imediată a acestora.

Cu notațiile

$$q_j = \frac{Q_j}{v_0 B \sqrt{\beta}},\ q_s = \frac{Q_s}{v_0 B} \text{ și } \mathrm{ctg}\alpha = \frac{u_0}{v_0},$$

ecuațiile problemei devin

$$q_j \sqrt{\frac{3a}{2}} \sqrt{\Xi}\, \mathrm{th}\, \frac{\mathrm{H}}{a\Xi} - q_s \frac{2}{3\pi}\left[\mathrm{arctg}\, \frac{\mathrm{H}}{\Xi - 1} + \mathrm{arctg}\, \frac{\mathrm{H}}{\Xi + 1} - \pi\right] = \Xi + \Xi\, \mathrm{H}\, \mathrm{ctg}\alpha,$$

$$q_j \sqrt{\frac{3a}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\Xi}}\left[\mathrm{th}\, \frac{\mathrm{H}}{a\Xi} - \frac{2\,\mathrm{H}}{a\Xi}\frac{1}{\mathrm{ch}^2 \frac{\mathrm{H}}{a\Xi}}\right] + q_s \frac{2}{3\pi}\left[\frac{\mathrm{H}}{(\Xi - 1)^2 + \mathrm{H}^2} + \frac{\mathrm{H}}{(\Xi + 1)^2 + \mathrm{H}^2}\right] = 1 + \mathrm{H}\, \mathrm{ctg}\alpha. \tag{7}$$

Soluțiile sistemului (7) pot fi puse sub forma

$$\begin{aligned} q_j &= q_{j0}\ (1 + \mathrm{H}\ \mathrm{ctg}\,\alpha), \\ q_s &= q_{s0}\ (1 + \mathrm{H}\ \mathrm{ctg}\,\alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

unde q_{s0} și q_{j0} sînt soluțiile sistemului (7) pentru cazul $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$ ($u_0 = 0$), caz care corespunde ventilației generale inexistente.

Pentru q_{j0} şi q_{s0} avem expresiile

$$q_{j0} = \sqrt{\frac{2}{3a}}\frac{1}{\Lambda}\left\{\Xi\, H\left[\frac{1}{(1-\Xi)^2+H^2}+\frac{1}{(1+\Xi)^2+H^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\operatorname{argtg}\frac{2\,\Xi\,H}{1-\Xi^2+H^2}\right\},\quad q_{s0}=\frac{3\pi}{4}\frac{\sqrt{\Xi}}{\Lambda}\left[\operatorname{th}\frac{H}{a\,\Xi}+\frac{2\,H}{a\,\Xi}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\dfrac{H}{a\,\Xi}}\right], \tag{9}$$

în care am notat

$$\Lambda = H\sqrt{\Xi}\operatorname{th}\frac{H}{a\,\Xi}\left[\frac{1}{(1-\Xi)^2+H^2}+\frac{1}{(1+\Xi)^2+H^2}\right]-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{\Xi}}\operatorname{argtg}\frac{2\,\Xi\,H}{1-\Xi^2+H^2}\left[\operatorname{th}\frac{H}{a\,\Xi}-\frac{2\,H}{a\,\Xi}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\dfrac{H}{a\,\Xi}}\right].$$

Pentru a uşura aplicaţiile practice, valorile q_{j0} şi q_{s0} calculate cu ajutorul formulelor (9) sînt date în diagramele din figura 3, pentru $\Xi = 0{,}5$, 0,7 şi 0,9 în intervalul $0{,}05 \leqslant H \leqslant 0{,}3$.

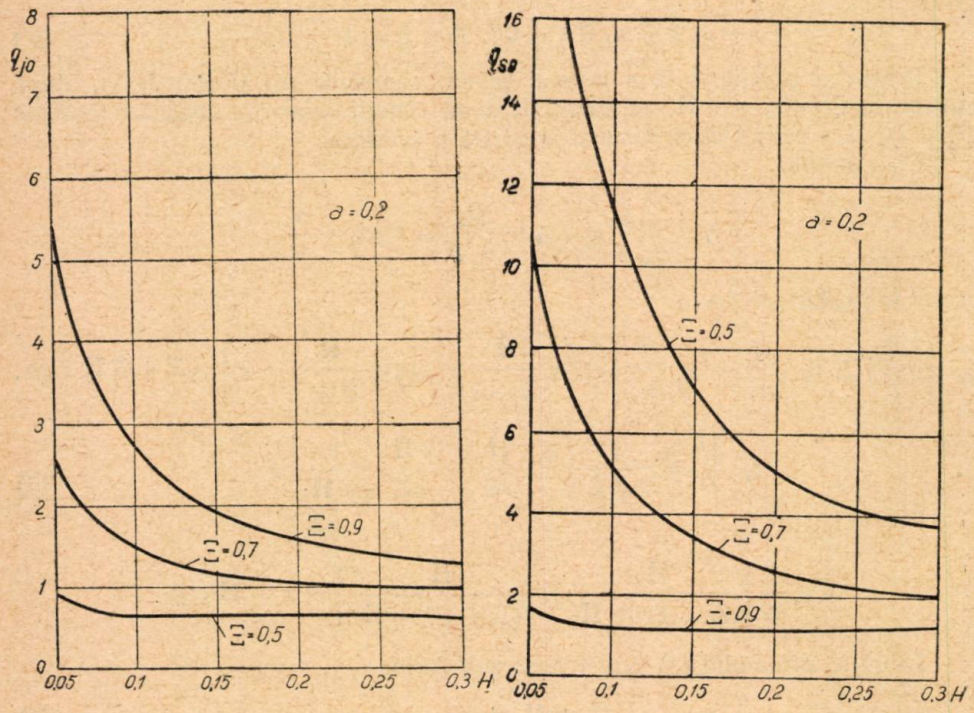


Fig. 3

S-a considerat $a = 0{,}2$ corespunzător unei fante de refulare prevăzute cu pereţi despărţitori pentru uniformizarea curentului de aer, fantă de tipul celor folosite pentru perdelele de aer [1].

Aplicație numerică

Fie o baie industrială avînd lărgimea $B = 2{,}0$ m, lungimea $L = 5{,}0$ m, lărgimea fantei de refulare a aerului $b = 0{,}1$ m și deci $\beta = b/B = 0{,}1/2{,}0 = 0{,}05$. În încăpere există un curent orizontal pentru care $u_0 = 0{,}3$ m/s, iar viteza de degajare a gazelor nocive din baie este $v_0 = 0{,}15$ m/s.

Alegînd $\Xi = 0{,}9$ și $H = 0{,}1$, cu ajutorul formulelor (9) sau din figura 3 rezultă

$$q_{j0} = 2{,}76, \quad q_{s0} = 1{,}18.$$

Pentru $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{u_0}{v_0} = \frac{0{,}30}{0{,}15} = 2$ calculăm cu ajutorul formulelor (8)

$$q_j = q_{j0}\,(1 + H \operatorname{ctg} \alpha) = 2{,}76\,(1 + 0{,}1 \times 2{,}0) = 3{,}312,$$

$$q_s = q_{s0}\,(1 + H \operatorname{ctg} \alpha) = 1{,}18\,(1 + 0{,}1 \times 2{,}0) = 1{,}416,$$

și în cele din urmă debitele

$$Q_j = 3\,600\ q_j\ v_0\ BL\sqrt{\beta} = 3\,600 \times 3{,}312 \times 0{,}15 \times 2{,}0 \times 5{,}0 \times \sqrt{0{,}05}$$

$$\approx 4\,000 \text{ m}^3/\text{h}.$$

$$Q_s = 3\,600\ q_s\ v_0\ BL = 3\,600 \times 1{,}416 \times 0{,}15 \times 2{,}0 \times 5{,}0 \approx 7\,650 \text{ m}^3/\text{h}.$$

ВЕНТИЛЯЦИЯ ПРИМЕНЯЕМЫХ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ ВАНН С ПРОДУВАЮЩИМ И РАСПОЛОЖЕННЫМ НА КРАЮ ИХ АСПИРАЦИОННЫМ УСТРОЙСТВОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе изучается движение воздуха и вредных газов у поверхности жидкости, содержащейся в применяемых в промышленности ванных, снабженных продувающим и расположенном на краю ванн аспирационным устройством, и выводится соответствующая функция воздушного течения (5). Определяется посредством уравнений (6) и (6′) высшая точка, до которой поднимаются вредные газы, выделяющиеся из ванны, и при данном положении этой точки выводятся формулы для вычисления дебита продувающего и аспирационного устройств (9).

Для облегчения вычислений на практике, формулы (9), представлены на диаграмме, изображенной на рис. 3.

AU SUJET DE LA VENTILATION DES BAINS INDUSTRIELS POURVUS D'UNE SOUFFLANTE ET D'UN ASPIRATEUR MARGINAL

(RÉSUMÉ)

On étudie le mouvement de l'air et des gaz nocifs, au voisinage de la surface du liquide contenu dans l'intérieur d'un bain industriel, ventilé par une soufflante et un aspirateur marginal, en écrivant la fonction respective du courant (5). Par le système d'équations (6) et (6′). on détermine le point le plus haut

atteint par les gaz nocifs qui sortent du bain et, en considérant donnée la position de ce point, on obtient les formules de calcul pour le débit de la soufflante et de l'aspirateur (9).

Pour faciliter le calcul pratique, les formules (9) sont représentées sur les diagrammes de la figure 3.

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. Sepelev, *Osnovi rasciota vozduşnîh zares, pritocinîh strui i poristîh filtrov.* Stroiizdat, Moscova, 1950, p. 35 şi 50.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

AEROMECANICĂ

CONSIDERAŢII ASUPRA VRIEI PERMANENTE A AVIOANELOR

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Vria este unul dintre cele mai interesante regimuri de zbor ale avioanelor, atît din punct de vedere teoretic (reducîndu-se la problema studiului mişcării unui solid cu 6 grade de libertate), cît şi din punct de vedere practic (deoarece de ea este legată în mare măsură securitatea zborului).

De aceea, ea a constituit obiectul a numeroase cercetări, îndeosebi experimentale, datorită complexităţii fenomenului, făcute cu scopul de a explica producerea şi cauzele vriei, modul de pilotaj pentru scoaterea avionului din vrie, ca şi mijloacele pentru evitarea ei.

Cercetările teoretice s-au mărginit în general la studiul unor fenomene simplificate, cu un număr redus de grade de libertate şi care prezintă analogii cu vria reală, ca de exemplu: autorotaţia, sau vria cu 3 grade de libertate (vria prototip). Încercări de a prezenta problema în ansamblul ei au fost destul de puţine [1], [2] şi în ipoteze simplificatoare destul de restrînse.

În cele ce urmează, se va căuta să se studieze regimul permanent de vrie cu 6 grade de libertate, dîndu-se o metodă de obţinere a regimului de vrie în anumite condiţii iniţiale date şi analizînd în prealabil geometria, cinematica şi ecuaţiile de mişcare ale vriei. În continuare se va examina mai amănunţit echilibrul forţelor în vrie, din care se pot deduce imediat unele caracteristici importante ale vriei; echilibrul momentelor în timpul vriei este o problemă relativ cunoscută, fiind studiată amănunţit de către diverşi autori [3], [4].

În general, prin regim permanent de vrie sau mai simplu vrie, se înţelege regimul (cu traiectoria centrului de greutate helicoidală) caracterizat printr-o rază a traiectoriei R/b relativ mică (R fiind raza elicei şi b anvergura aripii; pentru a fixa ideile $\frac{R}{b} < 1$). Regimul de vrie poate fi stabil sau nestabil şi se produce la incidenţe mari.

Geometria vriei. Deriva

Pentru a putea scrie ecuaţiile de echilibru ale vriei libere, este necesar mai întîi să se stabilească precis care este geometria vriei, prin geometria vriei înţelegîndu-se determinarea poziţiei pe care o ocupă avionul la un moment dat,

față de un sistem de referință fix în raport cu traiectoria, precum și legătura care există între incidența și derapajul avionului și poziția lui absolută.

Pentru aceasta, se consideră un avion care se găsește într-un regim permanent de vrie, avînd față de traiectorie o poziție oarecare (compatibilă însă cu regimul de vrie considerat) și se definește poziția avionului în funcție de un triedru de referință Euler, în modul următor:

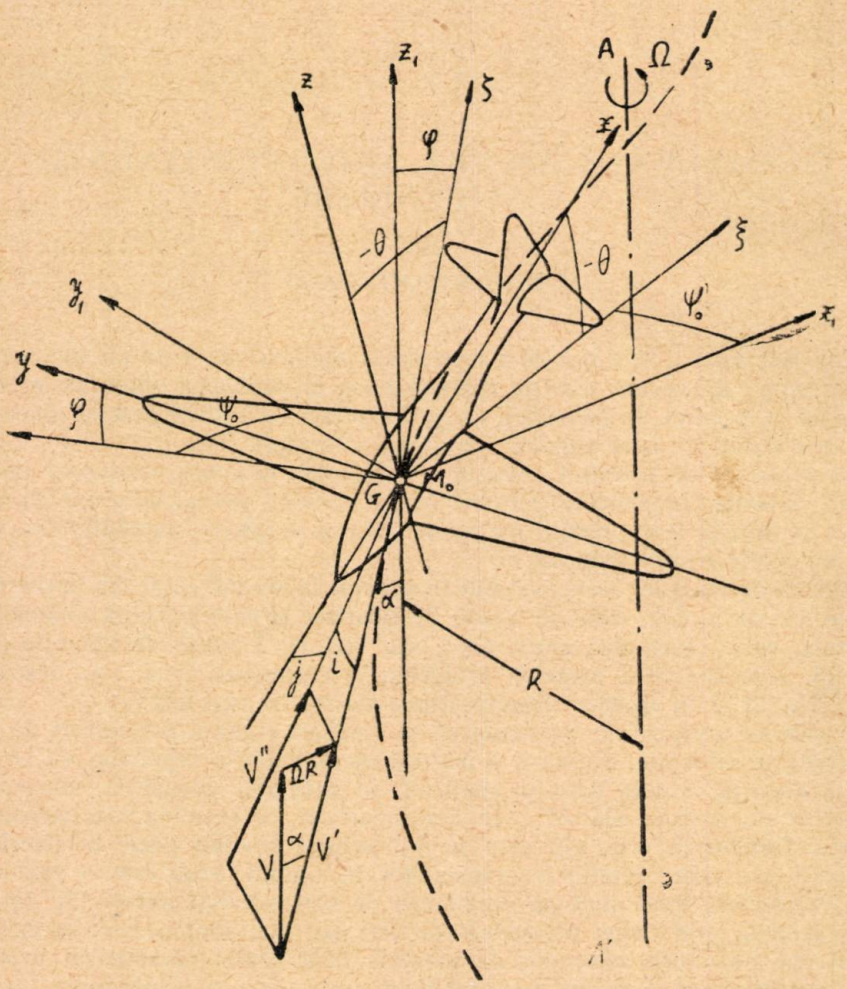


Fig. 1

Se va considera un sistem de referință ortogonal drept $Gxyz$ legat de avion, cu originea în centrul de greutate G al avionului, planul $G\,x\,z$ fiind situat în planul de simetrie al avionului. Se presupune în continuare că poziția finală $G\,x\,y\,z$ a avionului (fig. 1) a fost obținută printr-o serie de rotații, plecînd de la o poziție paralelă cu un sistem de referință fix, astfel: se pleacă de la sistemul de referință fix $G\,x_1\,y_1\,z_1$ cu axa $G\,z_1$ verticală și planul $G\,x_1\,y_1$ orizontal; avionul capătă apoi poziția $G\,\xi\,\eta\,z_1$ obținută printr-o rotație de unghi ψ în jurul axei verticale $G\,z_1$; în continuare, avionul ocupă poziția $G\xi y\zeta$ obținută din cea precedentă

printr-o rotație de unghi φ în jurul axei orizontale $G\xi$; în sfîrșit, avionul ocupă poziția finală $G\,x\,y\,z$ printr-o rotație de unghi θ în jurul axei de tangaj $G\,y$ (în figura 1 s-a luat θ negativ, deoarece în cazul vriei, avionul nu este cabrat, ci are botul sub orizontală).

Rotația $\overline{\Omega}$ în jurul axei $A\,A'$ se consideră pozitivă cînd vectorul $\overline{\Omega}$ este dirijat în sus, respectiv are același semn ca o rotație în jurul lui $G\,z_1$ (pozitivă cînd se produce de la x_1 la y_1). Viteza $\overline{V}$ de cădere este verticală, raza spiralei este R, iar pasul spiralei α (față de verticală). Pentru a avea $\overline{\Omega}$ pozitiv, în figura 1 s-a luat avionul executînd o vrie pe stînga.

Unghiul de incidență i se definește ca unghiul dintre viteza relativă rezultantă

$$\overline{V'} = \overline{V} + \overline{R} \wedge \overline{\Omega} \tag{1}$$

și planul $G\,x\,y$, iar unghiul de derivă (derapaj) j se definește ca fiind unghiul dintre proiecția vitezei rezultante în planul $G\,x\,y$ și axa de ruliu $G\,x$ (fig. 1). Evident, cînd viteza $\overline{V'}$ este cuprinsă în planul de simetrie al avionului $G\,x\,z$, deriva j este nulă, iar unghiul de incidență este egal cu unghiul dintre viteza rezultantă și axa $G\,x$. În realitate există un calaj Δi între aripă și axa $G\,x$, incidența astfel definită nerestrîngînd însă cu nimic generalitatea problemei, deoarece este vorba numai de o origine a măsurării unghiurilor de incidență.

Între unghiurle ψ, ω, θ care definesc poziția avionului și unghiurile i și j există o legătură biunivocă, care va fi dată mai jos.

Problema este mai simplă în cazul cînd nu intervine viteza de rotație $R\Omega$, adică $R = 0$ (autorotația, vria rectilinie). În acest caz, ținînd seama că viteza $\overline{V}$ este verticală (dirijată după $G\,z_1$) și notînd cu u, v, w componentele vitezei după direcțiile x, y, z, se poate scrie imediat

$$\left.\begin{aligned} u &= -V \cos \omega \sin \theta, \\ v &= V \sin \omega, \\ w &= V \cos \varphi \cos \theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de cele spuse mai sus despre i și j,

$$\left.\begin{aligned} u &= V \cos i \cos j, \\ v &= V \cos i \sin j, \\ w &= V \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

de unde, comparînd relațiile (2) cu (3), rezultă

$$\left.\begin{aligned} \cos i \cos j &= -\cos \omega \sin \theta, \\ \cos i \sin j &= \sin \varphi, \\ \sin i &= \cos \varphi \cos \theta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sistem care dă legătura dintre i, j și φ, θ. Evident, valoarea unghiului ψ este indiferentă, deoarece este indiferentă poziția de la care se pornește.

Sistemul (4) este întotdeauna compatibil și determinat, deoarece în realitate conține numai două relații independente. Într-adevăr, eliminînd între (4_1) și (4_2) pe j (prin ridicare la pătrat și adunare), se obține succesiv

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 i &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta, \\ \sin^2 i &= \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

sau

$$\sin i = \cos \varphi \cos \theta, \tag{6}$$

adică tocmai relaţia (4_3), care este deci o combinaţie a primelor două ecuaţii ale sistemului (4) şi care dă direct incidenţa în funcţie de unghiurile φ şi θ.

Împărţind (4_2) la (4_1), se obţine expresia derivei j în funcţie de φ şi θ

$$\operatorname{tg} j = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \theta}. \tag{7}$$

În cazul $j = 0$, din (7) rezultă $\varphi = 0$ şi din (6)

$$\sin i = \cos \theta; \quad -\theta = \frac{\pi}{2} - i. \tag{8}$$

În general însă, $-\theta \neq \frac{\pi}{2} - i$ şi $\varphi \neq j$.

Dacă $R \neq 0$ (cazul real) şi notînd cu ψ_0 unghiul ψ la timpul $t = t_0$, există relaţia

$$\psi = \psi_0 + \Omega (t - t_0). \tag{9}$$

Se va presupune în cele ce urmează că sistemul de referinţă $G x_1 y_1 z_1$ este astfel ales încît la $t = t_0$, planul vertical $G x_1 z_1$ este tangent la cilindrul elicei în punctul M_0, în care se găseşte centrul de greutate al avionului, la momentul considerat $t = t_0$.

Deoarece mişcarea este uniformă şi permanentă ($\overline{V}$ şi $\overline{\Omega}$ constante), avionul are în orice moment o poziţie relativă constantă faţă de traiectorie şi deci i şi j sînt constante în timp, ca şi unghiurile ψ_0, φ, θ (ψ variind după relaţia (9)). Momentul la care se calculează i şi j fiind deci indiferent, se vor calcula aceste unghiuri la $t = t_0$.

Pentru a găsi acum mărimea componentelor u, v, w în cazul general trebuie să se ţină seama şi de viteza de rotaţie $V_r = R\Omega$ care la $t = t_0$ este conform celor spuse paralelă cu axa $G x_1$ şi dirijată în sensul ei pozitiv (vorbind de viteza aerului faţă de avion — fig. 1). Componentele lui V_r după axele $G\xi$ şi $G\eta$ sînt

$$\left.\begin{aligned} V_{r\xi} &= R\Omega \cos \psi_0, \\ V_{r\eta} &= -R\Omega \sin \psi_0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

iar proiecţiile după $G x y z$ sînt

$$\left.\begin{aligned} V_{rx} &= R\Omega (\cos \psi_0 \cos \theta - \sin \psi_0 \sin \varphi \sin \theta) \\ V_{ry} &= -R\Omega \sin \psi_0 \cos \varphi \\ V_{rz} &= R\Omega (\cos \psi_0 \sin \theta + \sin \psi_0 \sin \varphi \cos \theta) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

astfel încît $u\ v\ w$ vor fi, ţinînd seama de (2),

$$\left.\begin{aligned} u &= -V \cos \varphi \sin \theta + R\Omega (\cos \psi_0 \cos \theta - \sin \psi_0 \sin \varphi \sin \theta), \\ v &= V \sin \varphi - R\Omega \sin \psi_0 \cos \varphi, \\ w &= V \cos \varphi \cos \theta + R\Omega (\cos \psi_0 \sin \theta + \sin \psi_0 \sin \varphi \cos \theta). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pe de altă parte, în loc de (3), în acest caz vor exista relațiile

$$\left.\begin{aligned} u &= V' \cos i \cos j = V\sqrt{1+\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}\cos i\cos j,\\ v &= V' \cos i \sin j = V\sqrt{1+\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}\cos i\sin j,\\ w &= V' \sin i = V\sqrt{1+\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

și din compararea sistemelor (12) și (13)

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1+\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}\cos i\cos j &= -\cos\varphi\sin\theta + \\ &+\frac{R\Omega}{V}(\cos\psi_0\cos\theta - \sin\psi_0\sin\varphi\sin\theta),\\ \sqrt{1+\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}\cos i\sin j &= \sin\varphi - \frac{R\Omega}{V}\sin\psi_0\cos\varphi,\\ \sqrt{1+\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}\sin i &= \cos\varphi\cos\theta + \\ &+\frac{R\Omega}{V}(\cos\psi_0\sin\theta + \sin\psi_0\sin\varphi\cos\theta), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

sau, deoarece (fig. 1)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R\Omega}{V}, \tag{15}$$

sistemul (15) se mai poate pune sub forma

$$\left.\begin{aligned} \cos i\cos j &= -\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta + \sin\alpha(\cos\psi_0\cos\theta - \sin\psi_0\sin\varphi\sin\theta),\\ \cos i\sin j &= \cos\alpha\sin\varphi - \sin\alpha\sin\psi_0\cos\varphi,\\ \sin i &= \cos\alpha\cos\psi_0\cos\theta + \sin\alpha(\cos\psi_0\sin\theta + \sin\psi_0\sin\varphi\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Sistemul (14) sau (16) dă pe i și j în funcție de ψ_0, φ, θ sau invers. În realitate, sistemul conține numai două relații distincte, lucru de care ne putem convinge cu ușurință, eliminînd pe j din primele două ecuații, cînd, ca și în cazul precedent ($R = 0$), se obține ultima relație. De aceea, dacă se consideră drept necunoscute i și j, sistemul este determinat; dacă se consideră drept necunoscute ψ_0, φ, θ, sistemul este nedeterminat, cu alte cuvinte, în anumite condiții de compatibilitate se poate da arbitrar unul din unghiuri, de exemplu ψ_0.

Relația care dă incidența i în funcție de ψ_0, φ și θ, este relația (14_3) sau (16_3), adică

$$\sin i = \frac{\cos\varphi\cos\theta + \dfrac{R\Omega}{V}(\cos\psi_0\sin\theta + \sin\psi_0\sin\varphi\cos\theta)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{R\Omega}{V}\right)^2}}, \tag{17}$$

sau

$$\sin i = \cos\alpha\cos\varphi\cos\theta + \sin\alpha(\cos\psi_0\sin\theta + \sin\psi_0\sin\varphi\cos\theta), \tag{18}$$

iar pentru deriva j, raportul dintre (14_2) şi (14_1) sau dintre (16_2) şi (16_1) dă

$$\operatorname{tg} j = \frac{\sin\varphi - \dfrac{R\Omega}{V}\sin\psi_0\cos\varphi}{-\cos\varphi\sin\theta + \dfrac{R\Omega}{V}(\cos\psi_0\cos\theta - \sin\psi_0\sin\varphi\sin\theta)}, \tag{19}$$

sau

$$\operatorname{tg} j = \frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\sin\psi_0\cos\varphi}{-\cos\varphi\sin\theta + \operatorname{tg}\alpha(\cos\psi_0\cos\theta - \sin\psi_0\sin\varphi\sin\theta)}, \tag{20}$$

de unde se vede că în cazul vriei libere, i şi j depind în afară de φ şi de θ şi de ψ_0 şi de α (respectiv de R, Ω şi V). De exemplu, în cazul vriei prototip (adică vria la care planul de simetrie al avionului este tot timpul vertical şi conţine axa AA' de rotaţie) $\psi_0 = 90°$, $\varphi = 0$ şi atunci din (20) *)

$$\operatorname{tg} j = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\theta} \tag{21}$$

iar din (18)

$$\sin i = \cos\alpha\cos\theta, \tag{22}$$

relaţii care se pot deduce şi direct (fig. 2 *b*).

Condiţia $j = 0$ (20) dă

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R\Omega}{V}\sin\psi_0 = \operatorname{tg}\alpha\sin\psi_0, \tag{23}$$

de unde se vede că există o infinitate de valori φ, ψ_0 care dau $j = 0$. În realitate, poziţia avionului este una şi aceeaşi (fig. 2 *d*), însă modul în care ea este obţinută este diferit, alte poziţii fiind incompatibile cu condiţiile de echilibru, ca de exemplu

$$\varphi = \psi_0 = 0, \tag{24}$$

în care caz forţele centrifuge nu pot fi echilibrate. De asemenea, condiţia

$$\varphi = 0;\ \psi_0 \neq 0 \tag{25}$$

conduce la

$$\alpha = R = 0, \tag{26}$$

adică la vria rectilinie.

În figura 2 s-au desenat proiecţiile pe un plan vertical tangent la cilindrul elicei, a cîtorva poziţii tipice de vrie pe stînga. Poziţiile din figurile 2 *b* şi 2 *d* sînt unice, iar restul poziţiilor reprezintă o infinitate de cazuri.

Unghiul de derivă j are o mare importanţă în studiul vriei. O derivă pozitivă $j > 0$, este, după cum se va arăta, nefavorabilă vriei şi se numeşte « derivă antivrie» [5], iar o derivă negativă (pentru vria pe stînga considerată) $j < 0$ este favorabilă vriei şi se numeşte « derivă provrie».

Într-adevăr, ca şi în cazul autorotaţiei [1], dacă $\Omega > 0$ (cazul de faţă), o derivă pozitivă dă naştere unor forţe şi momente contrare autorotaţiei sau vriei, micşorînd parametrul de autorotaţie

$$\Lambda_a = \frac{\Omega b}{2V} \tag{27}$$

*) În expresia (21) j este în realitate negativ, deoarece membrul drept este mai mic decît zero, θ fiind negativ.

și domeniul de incidență în care vria este posibilă (deriva antivrie), iar o derivă negativă pentru $\Omega > 0$ mărește pe Λ_a și incidența (deriva provrie). În cazul cînd $\Omega < 0$ (vrie pe dreapta), $j > 0$ este deriva provrie și $j < 0$ deriva antivrie.

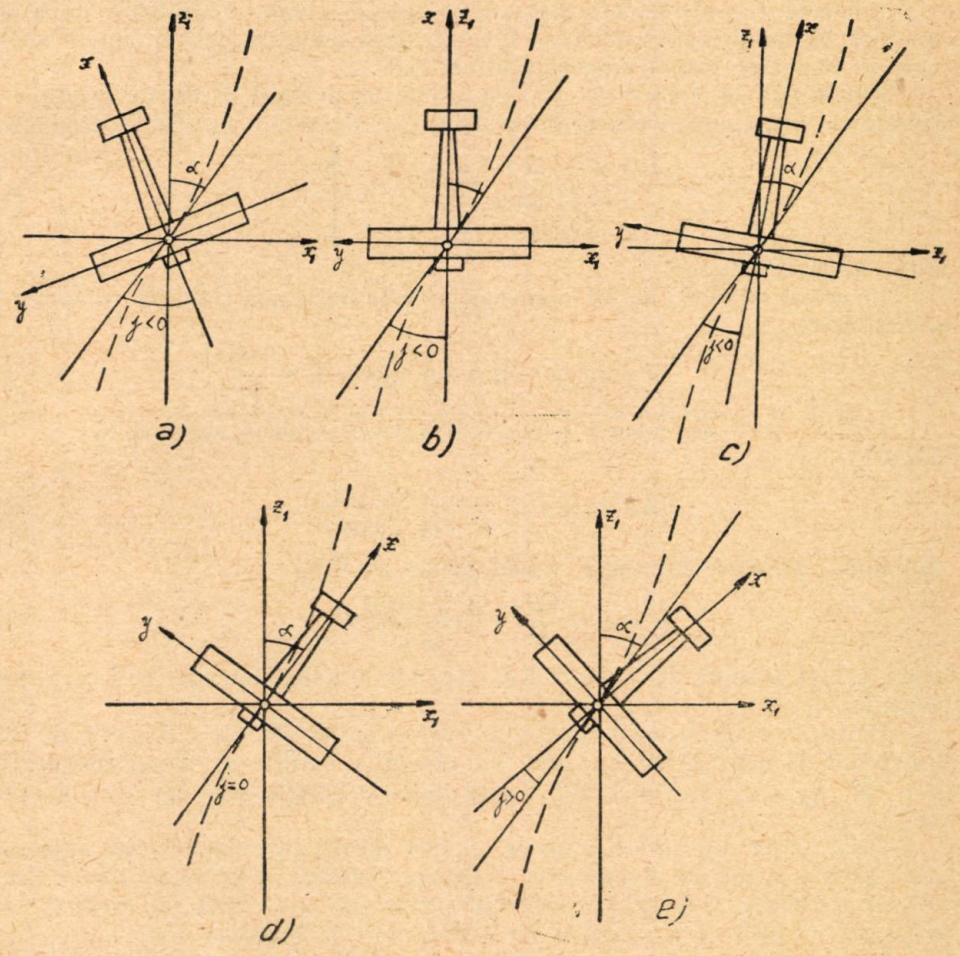


Fig. 2

Rezultă deci că se poate aprecia influența diverșilor parametri, după influența lor asupra derivei: dacă măresc deriva provrie sau micșorează deriva antivrie, ajută, întreține vria. Dimpotrivă, dacă măresc deriva antivrie sau micșorează deriva provrie, anihilează vria.

Din relația (20), ținînd seama că numitorul este negativ ($\theta < 0$) și că α și ψ_0 sînt întotdeauna pozitivi, pentru vria pe stînga, condiția ca să existe derivă provrie ($j < 0$) este

$$\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \psi_0 \cos \varphi < 0 \tag{28}$$

sau

$$\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha \sin \psi_0, \tag{29}$$

iar condiția ca să existe deriva antivrie ($j > 0$),

$$\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} \alpha \sin \psi_0. \tag{30}$$

Dacă unghiurile φ sînt relativ mari şi cum în toate cazurile α este mic ($\alpha < 10°$), atunci într-o primă aproximaţie $\varphi < 0$ corespunde unei derive provrie ($j < 0$), iar $\varphi > 0$ unei derive antivrie ($j > 0$).

Influenţa considerabilă a derivei, în special asupra posibilităţii de a ieşi din vrie, apare şi mai evident, da ă se studiază influenţa derivei asupra ampenajelor, mai ales asupra ampenajului vertical.

Pentru aceasta trebuie să se ţină seama că avionul în fiecare moment se roteşte cu viteza unghiulară Ω în jurul lui $G z_1$, respectiv cu vitezele unghiulare

$$\left.\begin{aligned} p &= -\Omega \cos\varphi \sin\theta, \\ q &= \Omega \sin\varphi, \\ r &= \Omega \cos\varphi \cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

după axele $G x, y, z$.

În aceste condiţii, deriva ampenajelor este micşorată datorită rotaţiei r şi are valoarea

$$\operatorname{tg} j' = \frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha \sin\psi_0 \cos\varphi - \dfrac{rL}{V'}}{-\cos\varphi \sin\theta + \operatorname{tg}\alpha\,(\cos\psi_0 \cos\theta - \sin\psi_0 \sin\varphi \sin\theta)}, \tag{32}$$

adică

$$\operatorname{tg} j' = \operatorname{tg} j - \frac{rL}{V' \cos i \cos j}, \tag{33}$$

sau într-o primă aproximaţie, ţinînd seama de (31_3)

$$j' = j - \frac{\Omega L}{V} \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\cos i}, \tag{34}$$

unde L este distanţa de la centrul de greutate al avionului pînă la focarul ampenajului.

Deriva ($j' - j$) datorită rotaţiei are valori destul de mari (5°—25°), de acelaşi ordin de mărime cu j. Astfel, de exemplu, pentru un avion cu $i = 35°$, $\varphi = 20°$, $\Lambda_a = 0{,}5$ şi $j = +17°$, deriva datorită rotaţiei este egală cu j, astfel că $j' = 0$.

Dacă există deci derivă antivrie ($j > 0$), deriva ampenajului este mult mai mică decît a aripii; cu alte cuvinte, ampenajul vertical, pentru care deriva joacă rol de incidenţă, lucrează la incidenţe mici, sub cea critică (corespunzătoare portanţei maxime) şi are deci o bună eficacitate la bracarea direcţiei.

Dacă însă avionul are o derivă provrie ($j < 0$), cele două efecte se adună în valoare absolută şi deriva j' a ampenajului vertical poate atinge valori destul de mari, 30°—40° în valoare absolută şi, în consecinţă, eficacitatea ampenajului este extrem de redusă.

Efectele derivei sînt analoge, însă de o importanţă mai mică, şi asupra ampenajului orizontal, care tot timpul are o eficacitate redusă, datorită incidenţei mari la care lucrează.

Ecuaţiile generale de echilibru ale vriei libere

Vria constînd dintr-o evoluţie în spaţiu, avionul posedă 6 grade de libertate şi ecuaţiile de echilibru vor fi ecuaţiile generale de echilibru ale mecanicii raţionale, pentru regimuri permanente, adică

$$\overline{G} + \overline{F} = 0 \tag{35}$$

pentru forțe, în care $\overline{G}$ este greutatea avionului, iar $\overline{F}$ rezultanta forțelor aerodinamice și centrifuge, și

$$\overline{\Omega} \Lambda \overline{K} = \overline{\mathfrak{M}} \tag{36}$$

pentru momente, în care s-a notat cu $\overline{K}$ momentul cinetic al avionului și cu $\overline{\mathfrak{M}}$ momentul aerodinamic rezultant.

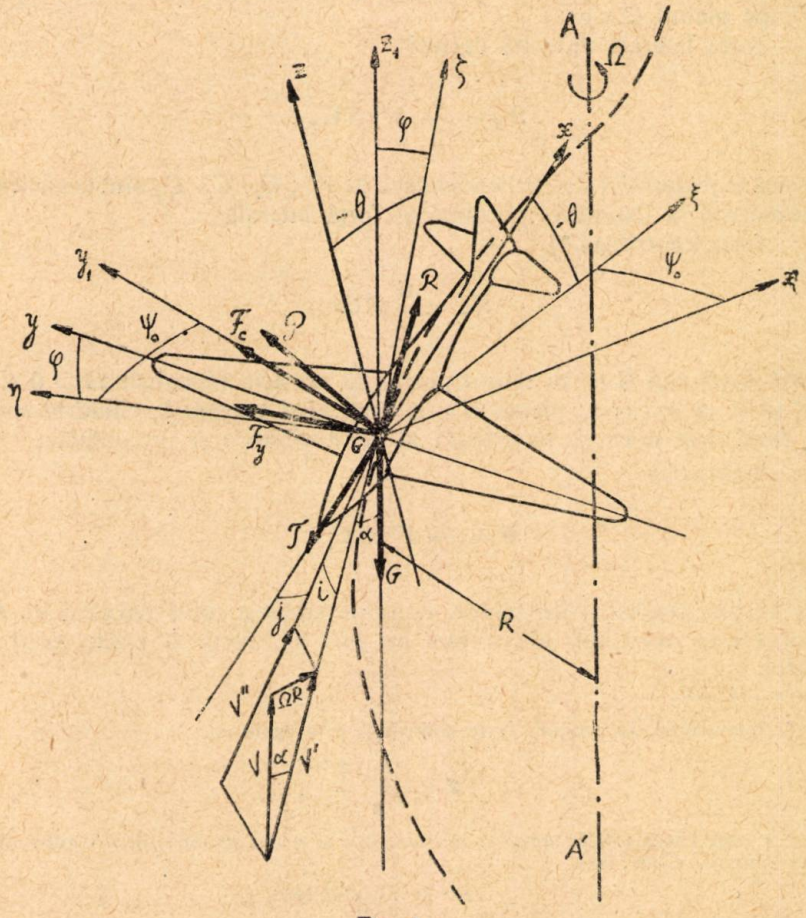


Fig. 3

Pentru a explicita ecuația (35) se va observa că, după cum s-a mai arătat, regimul fiind permanent, momentul la care se scriu ecuațiile de echilibru este indiferent, fie el, ca și pînă acum, $t = t_0$.

În aceste condiții, în centrul de greutate al avionului, în afară de greutatea G, acționează următoarele forțe (fig. 3):

— rezistența la înaintare

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho}{2} V'^2 S C_x, \tag{37}$$

ρ fiind densitatea aerului şi S suprafaţa aripii, dirijată după direcţia vitezei rezultante V';

— portanţa

$$\mathfrak{F} = \frac{\rho}{2} V'^2 S C_z, \tag{38}$$

perpendiculară pe viteză şi cuprinsă în planul definit de viteza V' şi proiecţia ei V'' pe planul $G\,x\,y$;

— forţa laterală datorită derivei

$$\mathfrak{F}_y = \frac{\rho}{2} V'^2 S C_y, \tag{39}$$

cuprinsă în planul $G\,x\,y$ şi perpendiculară pe V''; C_x, C_z, C_y sînt coeficienţi unitari de rezistenţă la înaintare, portanţă şi forţă laterală;

— forţa centrifugă *)

$$\mathfrak{F}_c = \frac{G}{g} R\,\Omega^2, \tag{40}$$

dirijată după axa $G\,y_1$, în sensul pozitiv al acesteia (deoarece $\Omega > 0$ şi s-a convenit să se ia la $t = t_0$, planul $G\,x_1\,z_1$ vertical şi tangent la cilindrul spiralei, axa $G\,y_1$ fiind deci normala exterioară la acest cilindru şi orizontală);

— tracţiunea

$$\mathfrak{T} = \frac{\rho}{2} V'^2 S C_t, \tag{41}$$

dacă se ţine seama şi de motor, considerînd axa elicei paralelă cu $G\,x$ (dacă motorul este oprit sau elicea este cu pas fix, forţa $\mathfrak{T}$ poate fi o forţă de frînare).

---

*) Într-adevăr, în general, forţa centrifugă este egală cu

$$\mathfrak{F}_c = \frac{G}{g} \frac{V'^2}{r},$$

în care V' este viteza totală, tangentă la traiectorie şi r raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat. Cum însă

$$V'^2 = V^2 + (R\,\Omega)^2,$$

iar pentru spirală

$$r = \frac{R}{\sin^2\alpha},$$

avînd direcţia orizontală şi cuprinsă în planul osculator al spiralei, în punctul respectiv care intersectează planul orizontal după Gy_1 rezultă

$$\mathfrak{F}_c = \frac{G}{g} \frac{V^2 + (R\,\Omega)^2}{R} \frac{\left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2}{1 + \left(\frac{R\Omega}{V}\right)^2},$$

adică relaţia [40].

În aceste condiții, ecuația (35) se scrie pe direcțiile $G\ x, y, z$ sub forma

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{R}\cos i\cos j - \mathfrak{T} - \mathfrak{S}\sin i\cos j - \mathfrak{F}_y\sin j + \mathfrak{F}_c(\sin\psi_0\cos\theta + \\
&\quad + \cos\psi_0\sin\varphi\sin\theta) + G\cos\varphi\sin\theta = 0,\\
&\mathfrak{R}\cos i\sin j - \mathfrak{S}\sin i\sin j + \mathfrak{F}_y\cos j + \mathfrak{F}_c\cos\psi_0\cos j - \\
&\quad - G\sin\varphi = 0,\\
&\mathfrak{R}\sin i + \mathfrak{S}\cos i + \mathfrak{F}_c(\sin\psi_0\sin\theta - \cos\varphi_0\sin\varphi\cos\theta) - \\
&\quad - G\cos\varphi\cos\theta = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

sau, împărțind cu $\frac{\rho}{2}V'^2S$ și ținînd seama de relațiile (37), (38), (39), (40) și (41),

$$\left.\begin{aligned}
&C_x\cos i\cos j - C_t - C_s\sin i\cos j - C_y\sin j + \frac{2}{\rho gR}\frac{G}{S}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}(\sin\psi_0\cos\theta + \\
&\quad + \cos\psi_0\sin\varphi\sin\theta) + \frac{2}{\rho V^2}\frac{G}{S}\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta = 0,\\
&C_x\cos i\sin j - C_z\sin i\sin j + C_y\cos j + \\
&+ \frac{2}{\rho gR}\frac{G}{S}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\cos\psi_0\cos\varphi - \frac{2}{\rho V^2}\frac{G}{S}\cos\alpha\sin\varphi = 0,\\
&C_x\sin i + C_z\cos i + \frac{2}{\rho gR}\frac{G}{S}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}(\sin\psi_0\sin\theta - \\
&- \cos\psi_0\sin\varphi\cos\theta) - \frac{2}{\rho V^2}\frac{G}{S}\cos\alpha\cos\varphi\cos\theta = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

i, j fiind dați în funcție de ψ_0, φ, θ de relațiile

$$\left.\begin{aligned}
&\sin i = \cos\alpha\cos\varphi\cos\theta + \sin\alpha(\cos\psi_0\sin\theta + \sin\psi_0\sin\varphi\cos\theta),\\
&\operatorname{tg} j = \frac{\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi_0\cos\varphi}{-\cos\varphi\sin\theta + \operatorname{tg}\alpha(\cos\psi_0\cos\theta - \sin\psi_0\sin\varphi\sin\theta)}
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

sau invers θ, φ, ψ_0 în funcție de i și j.

Considerînd axele Gx, y, z dirijate după axele principale de inerție ale avionului, echilibrul momentelor în jurul centrului de greutate (36) se scrie

$$\left.\begin{aligned}
L &= (C - B)qr,\\
M &= (A - C)pr,\\
N &= (B - A)pq,
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

în care s-au notat cu A, B, C momentele principale de inerție ale avionului (după respectiv Gx, y, z) și cu L, M, N momentele exterioare (aerodinamice, giroscopice etc.) de ruliu, tangaj și giratie.

Ţinînd seama de relaţiile (31), sistemul (45) devine

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(C-B)\,\Omega^2 \sin 2\varphi \cos\theta, \\ M &= -\frac{1}{2}(A-C)\cos^2\varphi \sin 2\theta, \\ N &= -\frac{1}{2}(B-A)\sin 2\varphi \sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

sau, împărţind cu $\frac{\rho}{2}V'^2S\frac{b}{2}$ şi notînd

$$\left.\begin{aligned} C_l &= \frac{L}{\frac{\rho}{2}V'^2S\frac{b}{2}}, \quad C_m = \frac{M}{\frac{\rho}{2}V'^2S\frac{b}{2}}, \quad C_n = \frac{N}{\frac{\rho}{2}V'^2S\frac{b}{2}}, \\ \mu &= \frac{2G}{\rho g S b}, \quad \Lambda_a = \frac{b\Omega}{2V'}, \\ k_A &= \frac{4Ag}{Gb^2}, \quad k_B = \frac{4Bg}{Gb^2}, \quad k_C = \frac{4Cg}{Gb^2}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

ecuaţiile (46) se pot scrie în cele din urmă

$$\left.\begin{aligned} C_l &= \mu\Lambda_a^2 (k_C - k_B)\sin 2\varphi \cos\theta, \\ C_m &= -\mu\Lambda_a^2 (k_A - k_C)\cos^2\varphi \sin 2\theta, \\ C_n &= -\mu\Lambda_a^2 (k_B - k_A)\sin 2\varphi \sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Ecuaţiile care definesc mişcarea sînt sistemele (43) şi (48), în care intervin mărimile necunoscute

$$\{\ i,\ j,\ \beta_a,\ \beta_0,\ \beta_v,\ V,\ \Omega,\ R,\ \rho,\ C_l\ \} \tag{49}$$

β_a, β_o, β_v fiind bracajele celor trei comenzi ale avionului (aripioare, ampenaj orizontal, ampenaj vertical).

Cu alte cuvinte, pentru un avion dat, avînd la dispoziţie 6 ecuaţii şi 10 necunoscute, problema comportă 4 parametri arbitrari. De obicei, se consideră ca fiind date înălţimea (ρ) şi C_l (în particular $C_l = 0$, adică vria fără motor, rezistenţa elicei putînd fi eventual înglobată în C_x). În aceste condiţii, problema comportă 2 parametri arbitrari, faţă de unul singur pentru vria rectilinie şi 6 pentru autorotaţia cu un grad de libertate.

Dacă se fixează, de exemplu, i şi j, rezultă ce poziţii trebuie să aibă comenzile (β_a, β_o, β_v) şi caracteristicile traiectoriei (V, Ω, R), existînd un număr finit de soluţii, sau nici una.

Rezolvarea problemei este destul de laborioasă, datorită formei sistemelor (43) şi (48), şi relativ dificilă, deoarece nu se pot da relaţii analitice pentru variaţia coeficienţilor C_x, C_y, C_z, C_l, C_m, C_n cu i, j, β_a, β_o, β_v, pentru un calcul mai mult sau mai puţin exact, trebuind făcute experienţe pe macheta avionului respectiv, care să dea aceste variaţii.

În aceste condiţii, soluţiile problemei pot fi găsite prin aproximaţii succesive în felul următor. Considerînd bracajele cunoscute (de exemplu $\beta_a = \beta_v = \beta_o = 0$)

și fiind date i și j, sistemul de trei ecuații (43) conține numai trei necunoscute: V, R, Ω, care deci se pot determina cu ușurință (ρ, C_t se consideră date, iar c_x, c_y, c_z variază cu i și j după legi cunoscute, conform celor spuse mai sus). Odată cunoscute V, R, Ω, din sistemul (48) se pot deduce β_a, β_o, β_v (se consideră de asemenea cunoscute variațiile coeficienților C_1, C_m C_n cu i, j, β_a, β_o, β_v). Cu aceste valori pentru β_a, β_o, β_v, se reia calculul într-o a doua aproximație etc.

Echilibrul forțelor în vrie

S-a arătat în cele de mai sus care sînt ecuațiile generale de echilibru ale forțelor și momentelor în vrie și s-a indicat o metodă de rezolvare a problemei, destul de simplu de aplicat în aparență, dar care în realitate dă oarecare dificultăți de calcul și nu permite să se vadă într-un mod mai simplu și mai expeditiv cum variază V, R, Ω, factorul de sarcină n etc., în funcție de diverșii parametri ai vriei.

Pentru aceasta, în cele ce urmează se vor studia mai amănunțit ecuațiile de echilibru ale forțelor (43), considerînd că ecuațiile de moment (48) sînt satisfăcute.

Se va presupune pentru simplificare că deriva j nu este prea mare, ceea ce se întîmplă în multe cazuri reale de vrie. În această situație, se poate presupune în primă aproximație, ca și în cazul vriei prototip, că rezultanta aerodinamică

$$C_r = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \tag{50}$$

este dirijată după axa Gz.

Atunci sistemul (43) (cu $c_t = 0$) se poate scrie sub o formă mai simplă

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\rho}{2}V^2SC_y \sin j + \frac{G}{g}R\Omega^2(\sin\psi_0\cos\theta + \cos\psi_0\sin\varphi\sin\theta) + \\ + G\cos\varphi\sin\theta = 0, \\ \frac{\rho}{2}V^2SC_y\cos j + \frac{G}{g}R\Omega^2\cos\psi_0\cos\varphi - G\sin\varphi = 0, \\ \frac{\rho}{2}V^2SC_r + \frac{G}{g}R\Omega^2(\sin\psi_0\sin\theta - \cos\psi_0\sin\varphi\cos\theta) - G\cos\varphi\cos\theta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

în care s-a presupus

$$V' \cong V, \tag{52}$$

aproximație ce introduce o eroare cu totul neglijabilă, fiindcă în toate cazurile reale $\alpha < 10°$.

Deoarece s-a presupus că deriva j nu este mare, se poate neglija termenul $C_y \sin j$ în ecuația (52_1), care capătă astfel forma

$$G\frac{R\Omega^2}{g}(\sin\psi_0\cos\theta + \cos\varphi_0\sin\varphi\sin\theta) + G\cos\varphi\sin\theta = 0, \tag{53}$$

de unde

$$\frac{R\Omega^2}{g} = \frac{-\operatorname{tg}\theta}{\sin\psi_0 + \cos\psi_0\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}. \tag{54}$$

De asemenea, dacă în ecuaţia (51_3) se pune

$$G = \frac{\rho}{2} V^2_{\min} S C_{z\max}, \tag{55}$$

unde $V_{\min}$ este viteza minimă a avionului la înălţimea de zbor respectivă, se poate scrie

$$\frac{V^2}{V^2_{\min}} \frac{C_r}{C_{z\max}} + \frac{R\Omega^2}{g} (\sin \psi_0 \sin \theta - \cos \psi_0 \sin \varphi \cos \theta) - \cos \varphi \cos \theta = 0 \tag{56}$$

sau, ţinînd seama de relaţia (54),

$$V = V_{\min} \sqrt{\frac{C_{z\max}}{C_r}} \sqrt{\cos\theta \left(\cos\varphi + \operatorname{tg}\theta \frac{\sin \psi_0 \operatorname{tg} \theta - \cos \psi_0 \sin \varphi}{\sin \psi_0 + \cos \psi_0 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta} \right)}. \tag{57}$$

Factorul de sarcină n este în prima aproximaţie egal cu

$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{R\Omega^2}{g} \right)^2} \tag{58}$$

adică, conform relaţiei (54),

$$n = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{(\sin \psi_0 + \cos \psi_0 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta)^2}}. \tag{59}$$

În cazul vriei plate pronunţate, $i \to 90°$, $\theta \to 0$ şi atunci din (54)

$$R\,\Omega^2 \to 0, \tag{60}$$

adică R scade foarte mult şi Ω creşte foarte mult. În acelaşi caz, din (57) se deduce

$$V \to V_{\min} \sqrt{\frac{C_{z\max}}{C_r}}, \tag{61}$$

şi cum $C_r \cong C_{z\max}$ la incidenţe mari, rezultă că în cazul vriei plate

$$V \cong V_{\min}, \tag{62}$$

adică viteza de cădere scade pe măsură ce creşte incidenţa, tinzînd către $V_{\min}$.

În sfîrşit, în cazul vriei plate, din (59) se deduce

$$n \to 1. \tag{63}$$

Pentru cazul vriei prototip, punînd în relaţiile (54), (56), (59), $\psi_0 = 90°$, $\varphi = 0$, se obţine succesiv

$$\frac{R\,\Omega^2}{g} = -\operatorname{tg}\theta, \tag{64}$$

$$V = V_{\min} \sqrt{\frac{C_{z\max}}{C_r}} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}, \tag{65}$$

$$n = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta}, \tag{66}$$

regăsindu-se astfel ecuaţiile vriei prototip, deduse de diverşi autori [5].

Pentru un calcul efectiv, din ecauţiile (54) şi (51_2), înlocuind ψ_0, φ, θ cu ajutorul relaţiilor (44) $\left(\text{în care intervine şi } \alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{R\Omega}{V}\right)$ şi punînd în loc de V expresia dată de relaţia (57), se obţin două ecuaţii în care necunoscutele sînt R şi Ω. Odată cunoscute R şi Ω, din (57) se calculează şi ultima necunoscută, viteza de cădere V.

Sistemul (51), sau relaţiile (54), (57), (59), arată imediat şi influenţa încărcării aripii G/S care, în consideraţiile făcute, s-a presupus cunoscută, făcînd parte din caracteristicile avionului respectiv. Astfel, din relaţiile mai sus amintite se constată că o încărcare mare favorizează vria, mărind pe V şi Ω şi micşorînd pe α.

Din calculele ce se pot face uşor, se constată în sfîrşit că factorul de sarcină n ia valori reduse, în toate cazurile reale fiind cuprins între 1 şi 3.

ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ШТОПОРЕ САМОЛЕТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор рассматривает с теоретической точки зрения истинный штопор с шестью степенями свободы.

Прежде всего точно определяется геометрия штопора (рис. 1) и выводятся отношения (16) и соответственно (18) и (20), показывающие связь между наклоном самолета i и сносом j, в зависимости от углов Эйлера ψ_0, φ и θ (ψ_0 есть ψ при $t = t_0$). Равным образом указывается значение сноса j для характеристики штопора и эффективности действия тяжей управления (34), причем уточняется понятие сноса в «направлении штопора» $j < 0$ (24) и в «направлении, обратном штопору» $j > 0$ (30) (при $\Omega > 0$ — рис. 2).

Далее приводятся относящиеся к принятой системе осей (рис. 3) общие уравнения равновесия (43) и (48), из которых вытекает, что в задаче допускаются 4 произвольные данные (так как имеется 6 уравнений с 10 неизвестными (49)), которые в практических случаях сводятся к двум, так как обычно плотность ρ и коэффициент тяги C_t известны (в отличие от прямолинейного штопора, допускающего при тех же условиях один произвольный параметр и самовращение с одной степенью свободы, допускающее 6 произвольных данных). Автор показывает также практический способ решения задачи последовательными приближениями в том случае, когда теоретическим или экспериментальным путем выяснено, как изменяются коэффициенты C_x, C_y, C_z, C_l, C_m, C_n, в зависимости от наклона самолета i, сноса j и положения тяжей управления β_a, β_0, β_v.

Рассматривается, наконец, более подробно равновесие сил, из которого путем некоторых приближений можно вывести для истинных положений отношения (54), (57), и (59), дающие характеристики траектории V, Ω и R.

CONSIDÉRATIONS SUR LA VRILLE PERMANENTE DES AVIONS

(RÉSUMÉ)

L'Auteur émet dans cette étude quelques considérations théoriques sur la vrille réelle, à 6 degres de liberté.

Il définit, en premier lieu, d'une façon précise, la géométrie de la vrille (fig. 1), en déduisant les relations (16) resp. (18) et (20) qui donnent la relation entre l'incidence de l'avion i et le dérapage j en fonction des angles d'Euler ψ_0, φ, θ (ψ_0 étant l'angle ψ pour $t = t_0$). Il montre également l'importance du dérapage j sur la caractéristique de la vrille et sur l'efficacité des commandes (34) en définissant le dérapage « pro vrille » $j < 0$ (24) et le dérapage « antivrille » $j > 0$ (30) (pour $\Omega > 0$ — fig. 2).

L'Auteur pose ensuite les équations générales d'équilibre (43) et (48) ayant trait au système d'axes adopté (fig. 3); on en déduit que le problème comporte 4 données arbitraires (puisqu'on dispose de 6 équations avec 10 inconnues (49)) lesquelles, dans les cas pratiques, se réduisent à deux, car d'habitude la densité ρ et le coefficient de traction C_t sont donnés (par comparaison à la vrille rectiligne, laquelle, dans les mêmes conditions, comporte un seul paramètre arbitraire et à l'autorotation à un seul degré de liberté qui comporte 6 données arbitraires). L'Auteur indique également une méthode pratique de résolution du problème par des approximations successives, dans le cas ou l'on connaît, théoriquement ou expérimentalement, la manière dont varient les coefficients C_x, C_y, C_z, C_l, C_m, C_n, par rapport à l'incidence i, au dérapage j et à la position des gouvernes β_a, β_0, β_v.

Finalement, l'Auteur examine d'une façon détaillée l'équilibre des forces, dont on peut obtenir, avec des approximations suffisamment petites, pour les situations réelles, les relations (54), (57), (59), qui donnent les caractéristiques de la trajectoire V, Ω, R.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Roy, *Leçons sur la mécanique de l'aviation.* Cours École Sup. Nat. de l'aéro., Paris, 1933.
2. J. Crowe, *An Elementary Study of the Spin.* Aircraft Engineering, 1939, p. 111.
3. I. V. Ostovslavski şi Titov, *Aerodinamiceskii rascet samoliota.* Oboronghiz, Moscova, 1947.
4. L. W. Briant F. B. Gates, *The Spinings of Aeroplanes.* Reports of the Royal Aeron. Soc. 1927. nr. 1001.
5. M. Jones, *The Spin. Aerodynamic Theory.* (Durand, vol. V) J. Springer, Berlin, 1935.
6. A. Eula, *L'avittamento dell'aeroplano.* Aerotecnica, 1937, p. 1011.
7. A. M. Martînov, *Experimentalnaia aerodinamika.* Oboronghiz, Moscova, 1951.
8. V. S. Pîşnov, *Dinamiceskie svoistva samoliota.* Oboronghiz, Moscova, 1951.
9. S. G. Popov, *Nekotorîe zadaci i metodî experimentalnoi aeromehaniki.* GITTI, Moscova, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

ÎNCERCĂRI EXPERIMENTALE PE LAGĂRE CU ALUNECARE

DE

N. TIPEI

În experienţele executate la bancul de încercări, s-a urmărit verificarea rezultatelor teoretice asupra repartiţiei presiunilor, portanţei, momentelor de frecare şi legăturii dintre poziţia relativă a arborelui — cuzinet în funcţie de încărcarea lagărului [1].

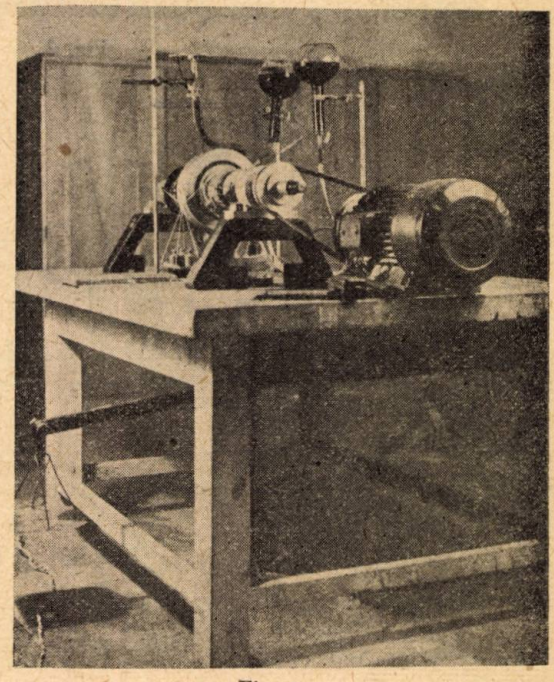


Fig. 1

Aparatul (fig. 1—4) se compune dintr-un lagăr experimental *1* (fig. 3 şi 4) avînd cuzinetul imobil şi arborele rotit de un motor electric. Arborele se reazemă pe două lagăre cu bile, iar antrenarea acestuia se realizează cu o transmisie prin curea trapezoidală, avînd raportul de demultiplicare 2 : 1.

Inelul exterior *13* se poate roti în jurul cuzinetului, fiind montat pe un lagăr cu bile. Acest inel are, la rîndul său, o ureche de fixare pentru tija *14*, prin care se realizează încărcarea lagărului. În acest scop, tija are celălalt cap articulat la pîrghia *15* care serveşte pentru demultiplicarea sarcinii aplicate pe talerul *16* în raportul 9,33 : 1. Pîrghia este susţinută de suportul *17* fixat de sol prin şuruburi de fundaţie. Ţinînd seama de caracteristicile dispozitivului de încărcare a lagărului, se deduce forţa P aplicată acestuia în funcţie de sarcina G aplicată sistemului

$$P = 110 + 9{,}33\ G.\ \text{Kg}. \qquad (1)$$

Corpul lagărului are două brăţări, prelungite prin braţele *18*, la extremitatea cărora sînt suspendate talerele *19* de o parte şi de alta a axului cuzinetului, la 105 mm de acest ax şi servind pentru măsurarea momentelor.

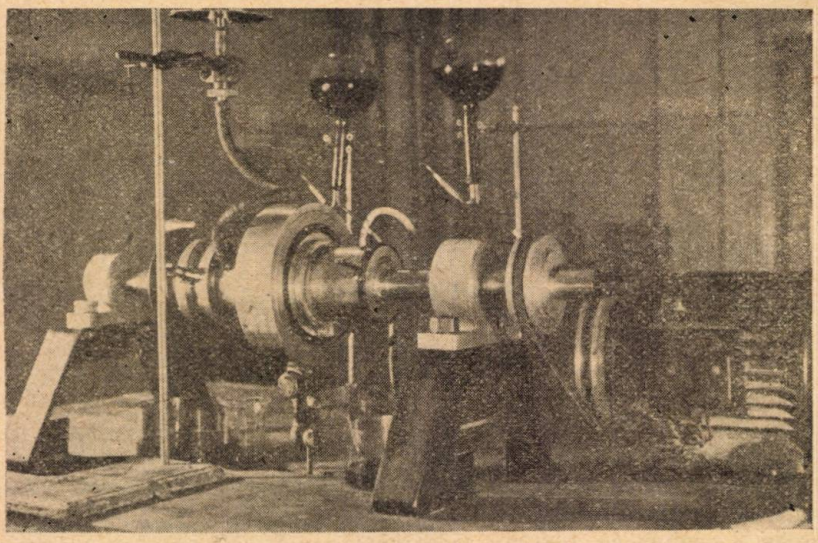


Fig. 2.

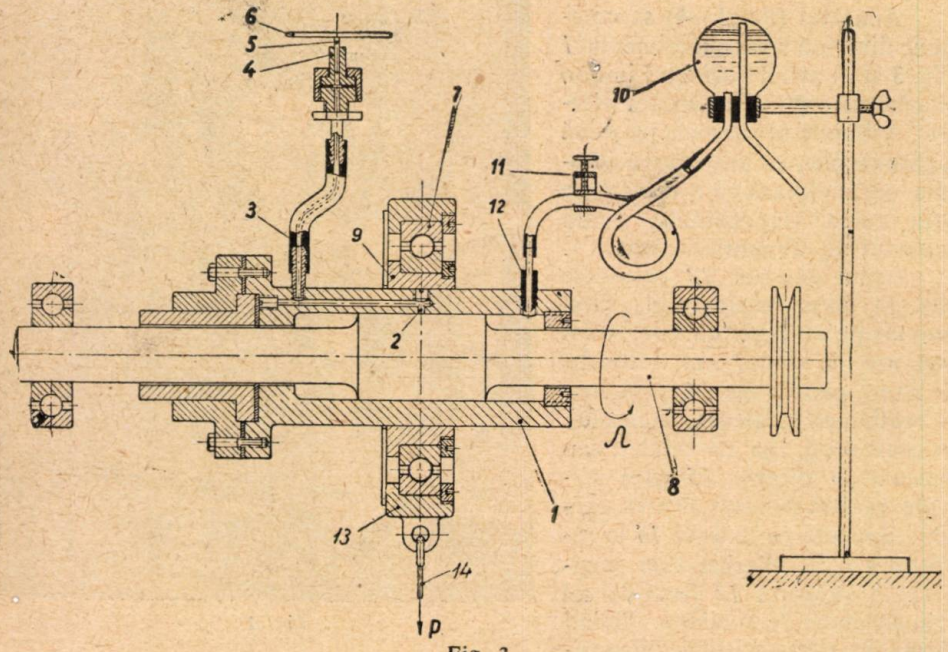


Fig. 3

În mijlocul cuzinetului de bronz formînd corpul lagărului, s-a aşezat priza de presiune *2*, constînd dintr-o gaură normală pe axa aparatului de 2,5 mm ⌀. Această priză comunică prin tubul de cauciuc *3*, cu un corp de pompă *4*, în inte-

riorul căruia se mişcă un piston *5* bine păsuit şi avînd la extremitatea superioară un taler pentru greutăţi *6*.

Forţa exterioară *P*, fixă ca poziţie, se transmite cuzinetului prin intermediul lagărului cu bile *7* şi apoi fusului *8*. Priza *2* poate ocupa diferite poziţii faţă de zona centrală a fusului care lucrează în interiorul cuzinetului. Acest lucru se obţine prin rotaţia corpului *1* sau prin alunecarea sa de-a lungul axului şi prin interiorul inelului *9*, care are o poziţie fixă faţă de ax.

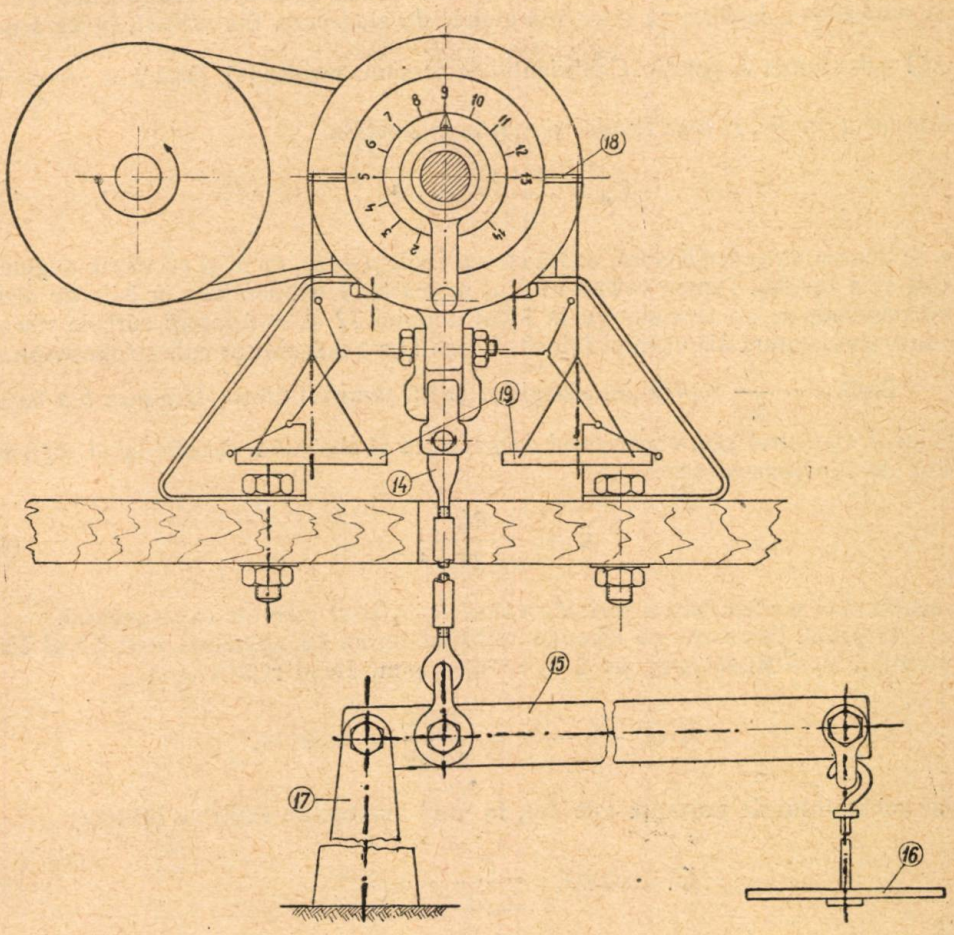


Fig. 4

Alimentarea cu ulei se face din vasul *10* care comunică cu interiorul cuzinetului printr-un tub de cauciuc, avînd la capete două tuburi de sticlă: unul din acestea pătrunde în vasul *10*, iar celălalt în interiorul lagărului. Reglajul debitului se face prin strangularea tubului de cauciuc cu ajutorul clemei *11*, iar alimentarea are loc prin căderea liberă a uleiului.

Pentru măsurători se pun greutăţi pe talerul *6*, după ce în prealabil s-a notat poziţia prizei faţă de zona centrală a axului, pînă cînd pistonul *5* cu talerul *6* rămîn în echilibru.

Suprafaţa pistonului 5 este $s = 0{,}5$ cm^2, deci, dacă G sînt greutăţile puse pe taler pentru echilibru, rezultă presiunea în kg/cm^2.

$$p - p_0 = \frac{G}{s} = 2G, \tag{2}$$

unde G este măsurat în kg, iar p_0 este presiunea atmosferică.

Fie μ_1 viscozitatea uleiului în baia de ulei din interiorul cuzinetului, egală cu viscozitatea la intrarea între suprafeţele de alunecare, fus-cuzinet, în kg s/m^2 şi Ω rad/s viteza de rotaţie. Coeficientul de presiune rezultă [1], dacă $\psi = \frac{r_2 - r_1}{r_1}$ este jocul relativ, r_1 raza fusului şi r_2 raza cuzinetului

$$C_p = \frac{p - p_0}{\mu_1 \Omega} \psi^2 \cdot 10^4 \tag{3}$$

şi se determină experimental, odată cu mărimile $p - p_0$, cu μ_1 şi cu viteza unghiulară Ω a fusului. Pentru calculul lui μ_1 se măsoară temperatura în baia de ulei, introducîndu-se un termometru în locul dopului *12* şi se folosesc curbele viscozitate-temperatură ale uleiului folosit. Viteza Ω s-a măsurat pe cale stroboscopică.

Dacă $\lambda = \frac{b}{2r_1}$ reprezintă alungirea, adică raportul dintre lărgimea b a lagărului şi diametrul său, coeficientul de portanţă al lagărului, caracterizînd regimul său de funcţionare este

$$\zeta = \frac{P\psi^2}{4\mu_1 \Omega \lambda r_1^4} \tag{4}$$

rezultă deci pentru fiecare serie de valori P, μ_1 şi Ω stabilite experimental.

O primă încercare s-a efectuat utilizînd un ax cu alungirea $\lambda = 1{,}5$ şi diametrul $2r_1 = 50{,}48$ mm, iar $2r_2 = 50{,}54$ mm. Jocul relativ este

$$\psi = \frac{r_2 - r_1}{r_1} = \frac{0{,}06}{50{,}48} = 0{,}00119,$$

iar coeficientul de portanţă este dat, în mod analog, de expresia (4) sau

$$\zeta = 0{,}000371 \frac{P}{\mu_1 \Omega} = 0{,}1255. \tag{5}$$

Tabloul

$\theta'°$	53°	48°5	45	42	37	28	23	−19	−20
G	0,250	0,75	1,25	1,75	2,25	3,25	3,75	4,25	3,75
$C_{p\text{exp.}}$	0,0155	0,0466	0,0777	0,1087	0,14	0,202	0,2330	0,264	0,233

Cu această valoare s-a dedus excentricitatea relativă

$$\alpha = \frac{e}{\Delta} = 0{,}65,$$

e fiind distanța dintre axele fusului și cuzinetului, iar $\Delta = r_2 - r_1$.

Viscozitatea uleiului (STAS 403) în baie, la 50°C este $\mu_1 = 0{,}00252 \frac{\text{kg}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$, iar viteza de rotație $\Omega = 181$ rad/s. S-a obținut astfel tabloul nr. 1, în care $\theta' = \pi - (\theta + \theta^*)$ reprezintă unghiul dintre direcția încărcării și punctul unde s-a determinat presiunea ($\theta^* = 44°3$, fig. 5).

Valorile teoretice ale coeficientului de presiune au fost calculate pentru condițiile la limită rezultate experimental, și anume admițînd un unghi la centru al zonei de presiune $H = 100°$. Considerînd că zona de presiuni se termină în punctul în care începe porțiunea divergentă a filmului de ulei, rezultă unghiul de ieșire $\theta_2 = 180°$ [1] și unghiul de intrare în regiunea activă a lagărului $\theta_1 = \theta_2 - H = 80°$.

După cum s-a arătat [1], soluția generală a ecuației presiunilor pentru un lagăr de alungire λ se construiește plecînd de la soluția p_∞ pentru $\lambda = \infty$, a cărei expresie este

$$p_\infty = C_2 + \frac{6\mu_1\Omega}{\psi^2(1+\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}}\left\{\left[1 - \frac{\delta_0}{(1-\alpha)\Delta}\right]\arccos\frac{\alpha+\cos\theta}{1+\alpha\cos\theta} - \frac{\alpha\delta_0}{\sqrt{1-\alpha^2}\,\Delta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\alpha\cos\theta}\right\} \tag{6}$$

Pentru ușurința calculelor se aproximează termenul în arc cos și anume

$$\arccos\frac{0{,}35+\cos\theta}{1+0{,}35\cos\theta} \cong \frac{\pi}{2}(2-\sin\theta) \tag{7}$$

care este aproape riguros exactă pe intervalul 100°—180° și suficient de corespunzătoare între 80°—100° (fig. 6).

În acest din urmă interval, de altfel, valorile absolute mici ale presiunilor nu cer o precizie mare a calculelor, iar aproximațiile nu modifică substanțial

nr. 1

$\theta'°$	−24	−25	−29.°5	−32	−33	−33,5	−35	Observații
G	3,25	3,25	1,25	2,25	1,25	0,750	0,250	Ulei STAS 403 $P = 154{,}26$ kg $\lambda = 1{,}5$ $\theta^* = 44°{,}3$ $\psi = 0{,}00119$ $\alpha = 0.35$
$C_{p\text{exp.}}$	0,202	0,202	0,078	0,14	0,078	0,0466	0,0155	

curba de presiuni. Ca urmare, pentru condiţiile la limită fixate rezultă următoarele valori ale constantelor C_2 şi $\frac{\delta_0}{\Delta}$:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= F_0 - \frac{6\pi\mu_1\Omega}{\psi^2(1+\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}}\left[1 - \frac{\delta_0}{(1-\alpha^2)\,\Delta}\right], \\ \frac{\delta_0}{\Delta} &= \frac{1}{\dfrac{1}{1-\alpha^2} + \dfrac{2\alpha}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \dfrac{1}{1+\alpha\cos\theta_1}} = 0{,}733\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

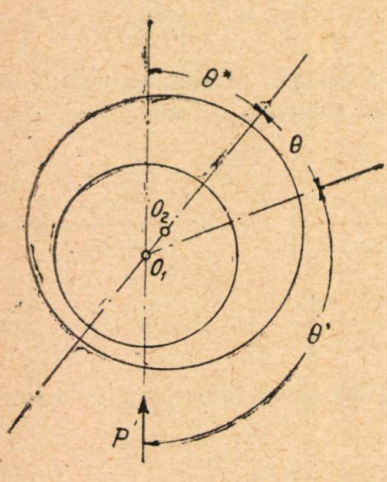


Fig. 5

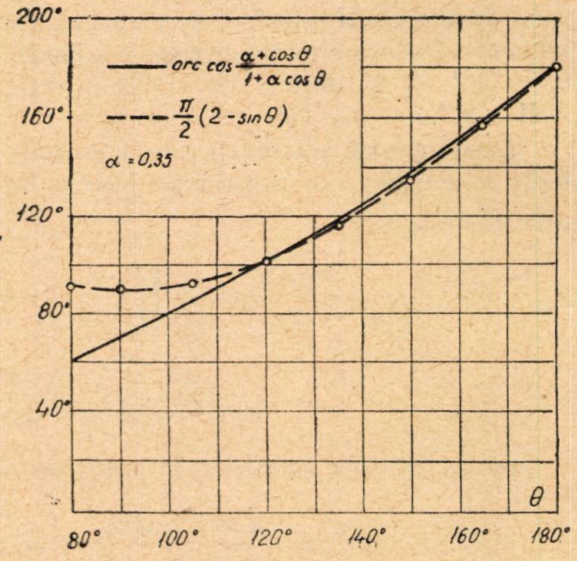


Fig. 6

Pentru lagărul de alungire ∞ presiunile sînt [1] astfel

$$p_\infty = p_0 - \frac{\mu_1\Omega}{\psi^2} \cdot \frac{0{,}0\,38\,\sin\theta - 0{,}1995\,\sin 2\theta - 0{,}037\,\sin 3\theta}{(1+0{,}35\,\cos\theta)^2}. \tag{9}$$

Coeficienţii A_{11}, A_{21} [1] sînt daţi de sistemul

$$\left.\begin{aligned} A_{11} + A_{21} &= 0{,}038\,\frac{\mu_1\Omega}{\psi^2}, \\ 0{,}25\,A_{11} + 8\,A_{21} &= -0{,}1995\,\frac{\mu_1\Omega}{\psi^2}. \end{aligned}\right\} \quad A_{11} = 0{,}0653,\ A_{21} = -0{,}0273 \tag{10}$$

Coeficienţii $k_1 A$, $k_2 A$ sînt, pentru $\lambda = 1{,}5$,

$$k_{2A} = 1, k_{1A} = \frac{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\lambda}}{1 - \frac{1}{\mathrm{ch}2\lambda}} = 0{,}638, \tag{11}$$

iar valorile $\frac{Am_3}{Am_1}$ sînt $\frac{A_{13}}{A_{11}} = 0{,}008$, $\frac{A_{23}}{A_{21}} = 1{,}88$. Construind soluţia pentru lagărul de alungire finită $\lambda=1{,}5$, după cum s-a arătat [1], rezultă cu aceste valori

$$C_p = \frac{0{,}0137 \sin\theta - 0{,}2081 \sin 2\theta - 0{,}0515 \sin 3\theta}{(1 + 0{,}35 \cos\theta)^2} \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{ch}\ 6\frac{x_3}{b}}{10{,}068}\right]. \tag{12}$$

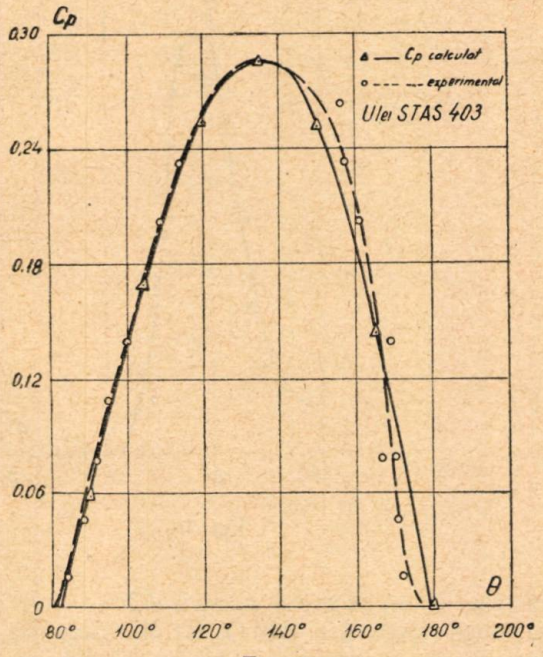


Fig. 7

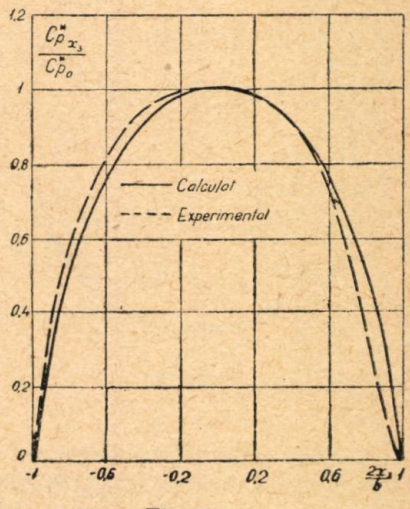


Fig. 8

În diagrama din figura 7 s-au trasat curbele de variaţie ale coeficientului de presiune, deduse teoretic şi experimental pentru secţiunea mediană $x_3 = 0$. Se observă astfel un acord foarte bun între aceste curbe, care confirmă valabilitatea formulelor utilizate. Acelaşi acord satisfăcător se constată şi pentru distribuţia presiunilor în lungul axului. În figura 8 s-a trasat variaţia raportului dintre coeficientul C_p într-un punct oarecare şi coeficientul C_{p0} la mijlocul lagărului, ambele valori corespunzînd aceluiaşi unghi θ, adică

$$\frac{C_p}{C_{p0}} = \frac{1 - \frac{\mathrm{ch}\ 6\frac{x_3}{b}}{10{,}068}}{0{,}9006.} \tag{13}$$

Deplasarea ușoară a curbei experimentale față de curba teoretică este datorită atît jocului în lungul axului, cît și repartiției inegale a intensității sursei de alimentare cu ulei după axa Ox_3.

În figura 9 s-a trasat diagrama polară a coeficientului de presiune, care de asemenea pune în evidență coincidența satisfăcătoare dintre datele teoretice și experimentale.

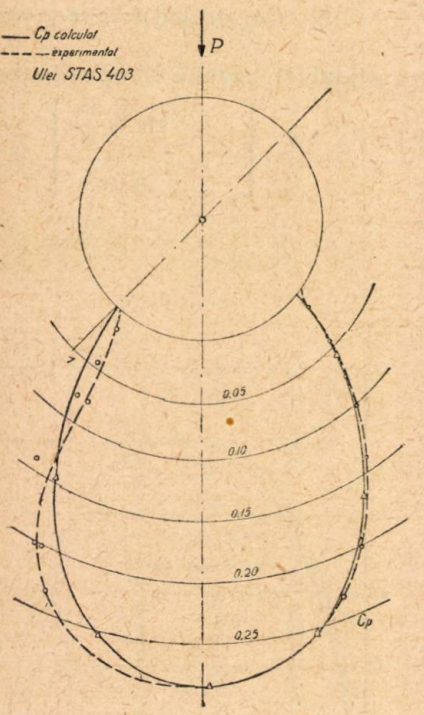


Fig. 9

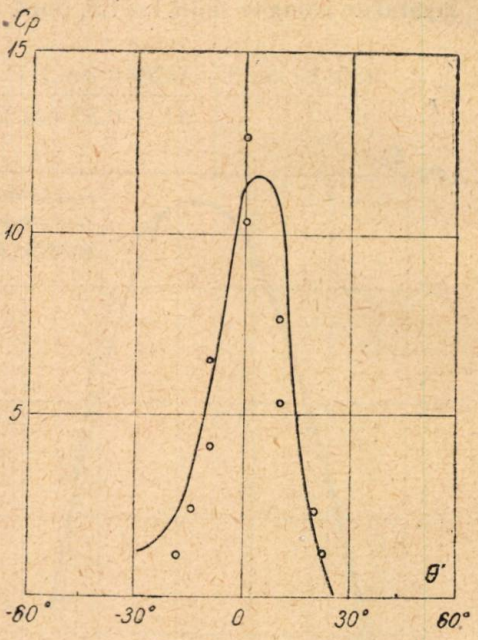


Fig. 10

O altă serie de experiențe s-a efectuat cu un ax avînd diametrul $2r_1 = 49{,}955$ mm. Rezultă, pentru același cuzinet, jocul relativ $\psi = 0{,}0117$, iar alungirea lagărului $\lambda = 2$. S-au folosit două uleiuri diferite și anume un ulei format din amestecul în părți egale ale uleiurilor STAS 102 și STAS 122, apoi uleiul STAS 102 neamestecat. În primul caz temperatura de lucru a fost $t° = 46°C$, corespunzînd unei viscozități $\mu_1 = 0{,}00302 \frac{kg \cdot s}{m^2}$ iar în al doilea caz $t° = 37°C$, corespunzînd viscozității $\mu_1 = 0{,}00167 \frac{kg \cdot s}{m^2}$, cu vitezele respective $\Omega = 182{,}5 \frac{rad}{s}$ și $\Omega = 178{,}9 \frac{rad}{s}$.

S-au obținut astfel datele din tablourile nr. 2 și 3, cu ajutorul cărora s-au trasat curbele $C_{p_{exp}} = f(\theta')$, considerîndu-se un sistem de axe rectangulare (fig. 10 și 11), apoi aceleași curbe sub forma de diagrame polare (fig. 12 și 13).

Și pentru curbele din figurile 10—13 se pot determina valorile teoretice ale coeficientului de presiune, introducînd condițiile la limită rezultate experimental. Este mai interesant totuși să se considere curbele în cazul unor condiții la limită

admise *a priori*, aşa cum este cazul la proiectarea lagărelor, cînd nu se cunosc condiţiile reale, care de altfel variază cu regimul de lucru al maşinii, cu uzura ei etc. Pentru aceasta se admite că presiunea este egală cu aceea exterioară p_0 pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$ (fig. 5).

Tabloul nr. 2

$\theta'°$	G	$C_{p\,exp}$	Observaţii
— 19°	0,250	1,134	Ulei amestecat
— 15°	0,520	2,36	STAS 102 +
— 10°	1,450	6,57	STAS 122
— 10°	1,150	4,08	
0°	2,700	12,68	$P = 60{,}75$ kg
0°	2,270	10,30	$\lambda = 2$
10°	1,450	6,57	$\psi = 0{,}0117$
10°	1,700	7,70	
19°,5	0,500	2,267	
21°,5	0,250	1,134	
26	0	0	

Tabloul nr. 3

$\theta'°$	G	$C_{p\,exp}$	Observaţii
— 30°	0,250	2,295	Ulei STAS 102
— 25°	0,440	4,040	
— 20°	0,950	8,72	$P = 60{,}75$ kg
— 15°	1,500	13,76	$\lambda = 2$
— 10°	2,150	19,73	$\psi = 0{,}0117$
0°	2,500	22,95	
10°	2,050	18,81	
15°	1,550	14,22	
20°	1,150	10,55	
25°	0,670	6,15	
30°	0,350	3,21	
37°	0,250	2,295	

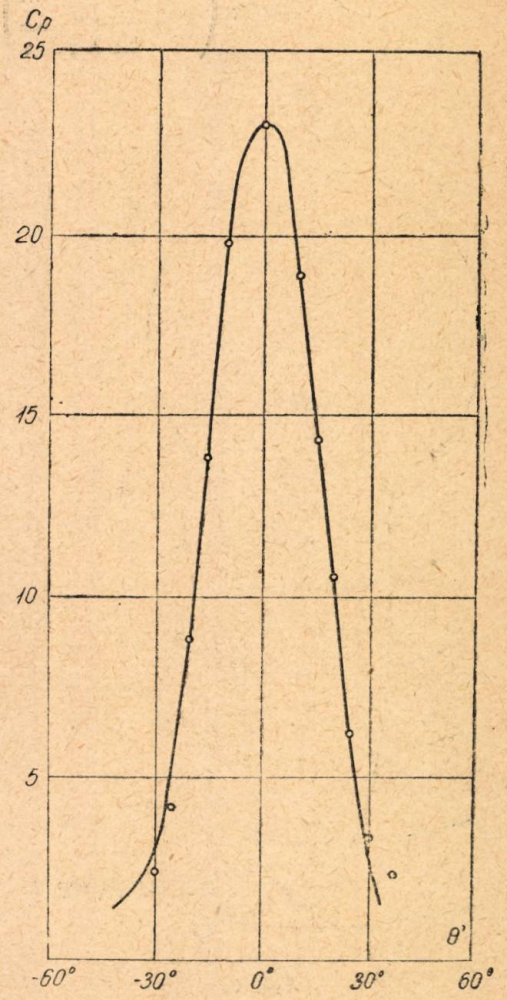


Fig. 11

În ultimele două experienţe, cu lagărul de alungire $\lambda = 2$, coeficienţii de încărcare sînt $\zeta = 3{,}03$ (încercarea cu ulei STAS 102 + ulei STAS 122) şi $\zeta = 5{,}6$ (încercarea cu ulei STAS 102). Din curbele $\zeta = f(\alpha)$ [2] pentru lagărele cu aceste condiţii la limită, rezultă excentricităţile relative $\alpha = 0{,}91$ şi $\alpha = 0{,}953$, valori mari care arată că regimurile de ungere sînt aproape de limita practică.

Rezultă apoi unghiul θ^* dintre linia centrelor şi direcţia forţei exterioare P, dacă se cunoaşte traiectoria axei fusului, a cărei urmă în planul de rotaţie este punctul O_1 (fig. 14), faţă de punctul O_2 care reprezintă urma axei cuzinetului. Această diagramă a fost calculată şi prezentată într-o lucrare anterioară [3], pentru diferite alungiri. Intersectînd traiectoria axei fusului cu un arc de cerc de rază $\overline{O_1O_2} = \alpha\,(r_2 - r_1)$, se deduce imediat punctul O_1 şi deci unghiul θ^*.

Considerînd ca origine a unghiurilor θ linia O_1O_2, se deduce uşor prin calcul coeficientul de presiune, pentru un θ dat şi la o distanţă $\underline{x_3}$ a prizei de presiune faţă de mijlocul fusului [2],

$$C_p = \frac{6\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{x_3}{r_1}\sqrt{\beta_{1A}}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\beta_{1A}}}\right)\cdot\frac{\sin\theta\,(1+2\,\bar{a}\cos\theta)}{(1+\alpha\cos\theta)^2}, \tag{14}$$

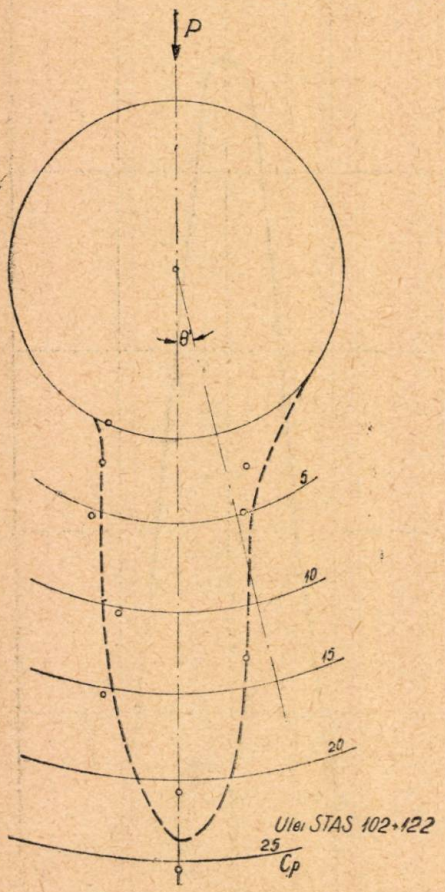


Fig. 12

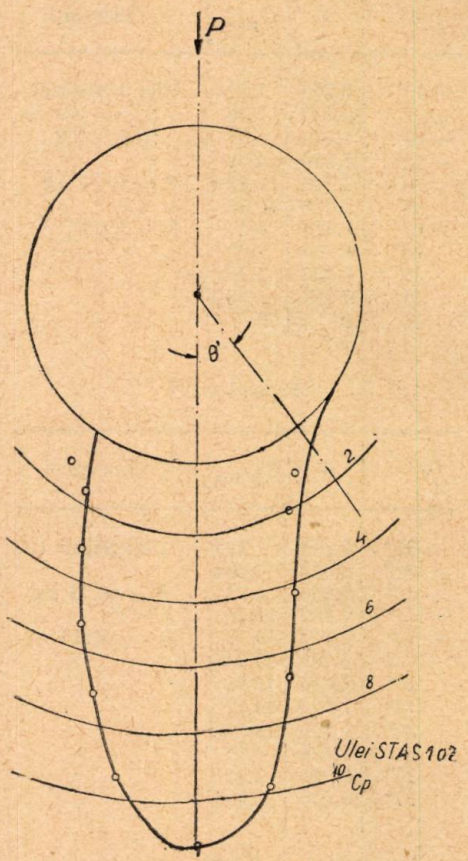


Fig. 13

în care [2]

$$\beta_{1A} = 0{,}9312 + 0{,}242\,\alpha,$$

$$2\,\bar{a} = 0{,}0314 + 1{,}254\,\alpha - \frac{1-\frac{1}{\operatorname{ch}2\lambda}}{1-\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda}}\cdot\frac{(22{,}68-19{,}2\,\alpha)\,(0{,}0157+0{,}127\,\alpha)}{11{,}34-10{,}10\,\alpha}. \tag{15}$$

Cu ajutorul formulei (5) se poate trasa curba $C_p = f(\theta)$ pentru un $\underline{x_3}$ dat, sau $C_p = f(\underline{x_3})$ pentru un θ dat.

S-au trasat astfel diagramele din figurile 15 şi 16, cu valorile $\alpha = 0{,}91$ şi $\alpha = 0{,}953$. $\lambda = 2$, pentru mijlocul lagărului ($x_3 = 0$).

Aceste curbe arată că între unghiurile la care C_p are valoarea maximă teoretic şi experimental, dar pentru condiţii diferite care au fost precizate, există

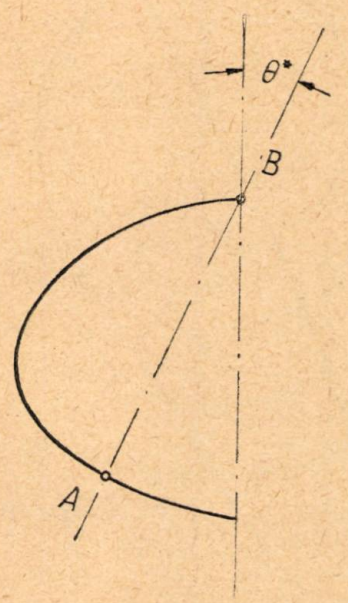
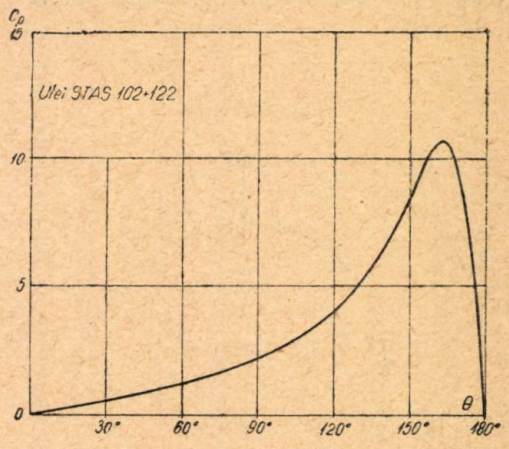


Fig. 14

Fig. 15



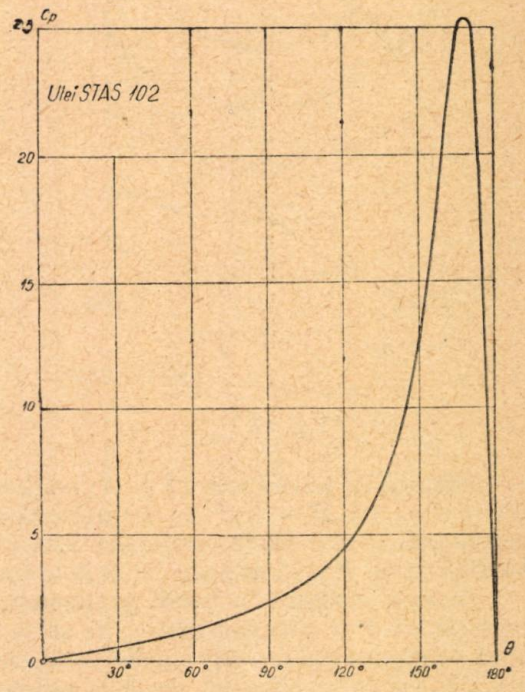


Fig. 16

un decalaj de 25° pentru uleiul STAS 102 + STAS 122 şi de 18° pentru uleiul STAS 102. Curbele experimentale prezintă o simetrie în raport cu acest maximum a cărui direcţie coincide cu aceea a forţei exterioare. Diferenţele dintre presiunile maxime teoretice şi experimentale sînt sub 10%, iar alura curbelor este sensibil aceeaşi. Ca urmare, valorile forţelor totale şi ale momentelor calculate teoretic

corespund în mod satisfăcător cu acelea reale, fapt constatat şi într-o serie de experienţe expuse mai departe. Această corespondenţă constituie astfel o concluzie importantă, care arată că pentru calculele de dimensionare a lagărelor se pot admite condiţiile $p = p_0$ pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$, chiar dacă în realitate aceste condiţii sînt sensibil diferite, după cum se vede din diagramele din figurile 10—13 şi 15—16.

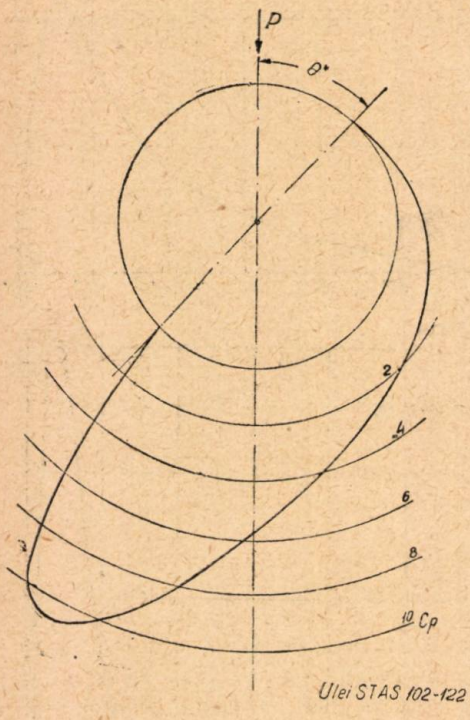


Fig. 17

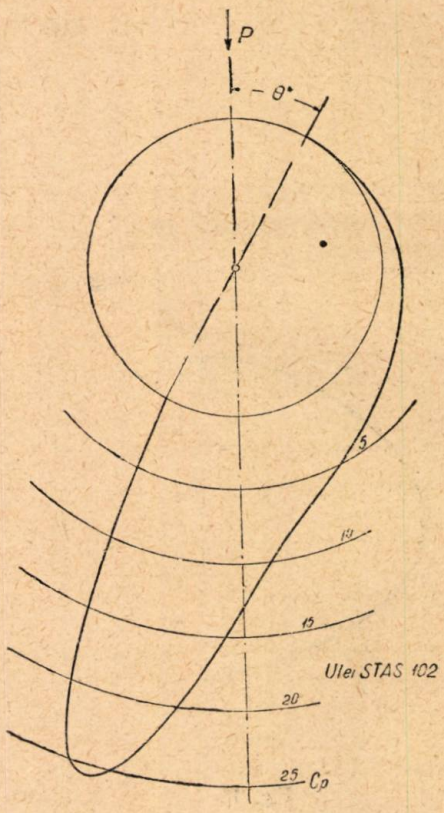


Fig. 18

Diagramele polare (fig. 17 şi 18) arată imediat că presiunile teoretice reduse dintre $\theta° = 0$ şi $\theta° \sim 120°$, cu o rezultantă aproape normală pe forţa exterioară, deplasează sensibil bucla presiunilor maxime, astfel încît rezultanta să coincidă cu direcţia lui P şi să fie egală cu această forţă.

Această deplasare a buclei presiunilor, fiind produsă de presiuni aproape normale pe P şi mici în valoare, nu schimbă însă valorile coeficientului C_p în zona de presiuni mari şi nici unghiul la centru pe care se exercită acestea. În consecinţă, nu are o influenţă sensibilă asupra rezultatelor globale, după cum s-a arătat. Faptul că s-a constatat experimental o valoare destul de mare a unghiului θ de la care C_p începe să crească, se explică prin trei cauze:

1. Valoarea mare a jocului relativ (de 3—5 ori valoarea normală de proiectare), aleasă astfel pentru a obţine o excentricitate relativă $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ mare şi, odată

cu aceasta, o repartiţie de presiuni mai caracteristică, cu maxime mari pentru C_p şi un unghi mai mic la centru corespunzător valorilor ridicate ale acestui coeficient. Datorită mărimii lui ψ, jocul radial este de ordinul 0,6 mm. Distanţa mare dintre fus şi cuzinet la valori mici ale unghiului θ şi lungimea finită a lagărului, cu presiunea atmosferică la cele două extremităţi, întîrzie formarea presiunilor în pelicula de lubrifiant. Acesta se scurge pe la capete şi numai cînd grosimea peliculei ia valori suficient de reduse, apar presiuni mai mari decît cea atmosferică.

2. Influenţa prizei de presiune asupra valorii locale a acesteia. Pentru a se obţine măsurători corecte şi a evita înfundarea orificiului cu impurităţi, diametrul prizei s-a luat de 2,5 mm ø. Pierderile de sarcină la valori mai mici ale diametrului pot fi importante, deoarece fluctuaţiile în timp ale presiunii provoacă continuu o mişcare a fluidului prin priza de presiune şi canalele cu care aceasta este în legătură. Din cauza viscozităţii uleiului, această mişcare, deşi cu viteză redusă, dă piederi de sarcină care alterează măsurătorile efectuate. Prezenţa prizei de presiune exercită o influenţă însă asupra valorii locale a presiunii, deoarece, în momentul aducerii prizei în punctul unde se face determinarea, presiunile în canalele de ulei ce duc la dispozitivul de măsură diferă de acelea din filmul de lubrifiant; acest lucru modifică temporar condiţiile la limită ale fenomenului şi, odată cu aceasta, întreaga repartiţie de presiuni.

3. Debitul mic de ulei, datorit alimentării din baie, fără presiune. Admiţînd în calcule $p = p_0$ pentru $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{2\pi}{3}$, se pot obţine curbele de presiuni cu o aşezare analogă aceleia a curbelor experimentale faţă de direcţia sarcinii P, ca în primul caz (fig. 7 şi 8). În calculele teoretice s-a admis apoi $p = p_0$ pentru $\theta = \pi$, în timp ce alte ipoteze consideră $p = p_{max}$ pentru $\theta = \pi$, sau $p = p_0$ în acelaşi punct în care $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$. Aceste ipoteze reduc într-o măsură oarecare valoarea lui θ^*, dar nu scad decalajul unghiular faţă de experienţe, deoarece la $\theta = \pi$, p are valori maxime sau foarte mari; în ambele cazuri deci, presiunile pozitive continuă şi pentru $\theta > \pi$, fapt care tinde să accentueze acest decalaj. Ca urmare, condiţia la limită $p = p_0$ pentru $\theta = \pi$, apare justificată. Din curbele reprezentate în figurile 10 şi 11 se vede că $p = p_0$ pentru $\theta \cong 165°$ în cazul uleiului STAS 102 + STAS 122 şi pentru $\theta \cong 190° - 200°$ în cazul uleiului STAS 102. Abaterile în plus şi în minus faţă de $\theta = 180°$ arată că această valoare se încadrează bine între rezultatele experienţelor.

Alte încercări au urmărit verificarea caracteristicilor globale ale lagărului.

Grosimea minimă a peliculei de ulei este

$$\delta_2 = (1 - \alpha)\,\Delta. \tag{16}$$

Folosind rezultatele găsite anterior [2], se pot găsi uşor coeficienţii ζ cunoscînd viteza unghiulară Ω a fusului. Cum funcţiile $\zeta\,(\lambda, \alpha)$ au fost determinate [2], rezultă excentricitatea α. Măsurînd apoi momentul de frecare pe fus M_f, se poate deduce coeficientul de moment

$$km_{exp} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \frac{M_f}{P.\Delta} \tag{17}$$

pentru diversele încărcări P. Din valorile teoretice $km = f_1\,(\alpha, \lambda)$ [2], se deduce coeficientul teoretic de frecare

$$f = \frac{\pi}{6}(1 - \alpha)\,\psi\,km \tag{18}$$

care se compară cu valorile experimentale

$$f_{exp} = \frac{M}{Pr_1}, \tag{19}$$

valorile km_{exp} putîndu-se compara de asemenea cu acelea teoretice deduse pe curbele $km = f_1(\alpha, \lambda)$, [2].

Experienţele au urmărit aceste verificări asupra coeficienţilor km, f şi deoarece α nu a fost măsurat direct, ci s-a dedus de pe curbele teoretice $\zeta = f_2(\lambda, \alpha)$, concordanţa dintre valorile teoretice şi cele experimentale ale acestor coeficienţi implică de asemenea valabilitatea curbelor $\zeta = f_2(\lambda, \alpha)$ care pot fi verificate indirect pe această cale.

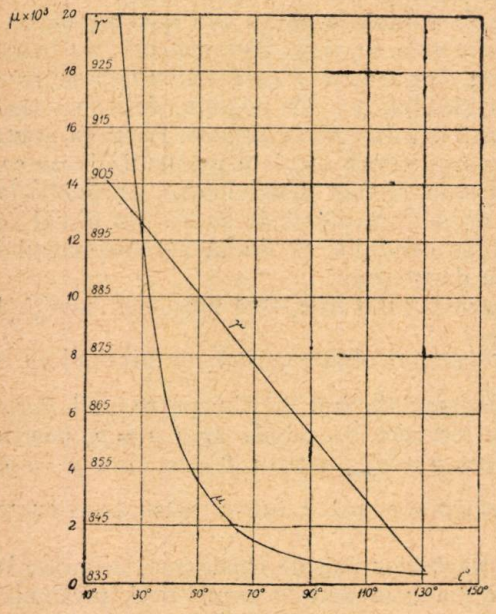


Fig. 19

Pentru experienţe s-a folosit uleiul romînesc corespunzător STAS 305, din categoria acelora folosite pentru autovehicule. Deoarece temperatura $t°$ a lagărului variază în timpul experienţei şi odată cu aceasta şi viscozitatea μ_1 a uleiului din baie, s-a determinat experimental pentru acest ulei curba $\mu = f(t°)$, după cum rezultă din diagrama din figura 19 şi din tabloul nr. 4, în care s-au dat şi valorile viscozităţii cinematice ν în centistokes şi densitatea relativă γ.

S-au încercat, ca şi în studiul repartiţiei de presiuni, doi arbori cu acelaşi cuzinet, avînd însă suprafaţa de contact de lungimi şi raze diferite, astfel încît s-au realizat două valori pentru λ ($\lambda_1 = 1{,}5$, $\lambda_2 = 2$) şi tot cîte două valori pentru Δ respectiv ψ conform tabloului nr. 5, în care r_2 este raza cuzinetului, aceeaşi în ambele cazuri.

Tabloul nr. 4

$t°$	20	37,8	50	60	80	98,5	125
vcs	240,2	77,8	40,6	26,2	12,7	7,6	4,5
γ	0,9039	0,8932	0,8859	0,8799	0,8679	0,8566	0,8409
$\mu \times 10^3$	22,1	7,08	3,67	2,346	1,124	0,663	0,385

Tabloul nr. 5

Arborele	λ	r_1 mm	r_2 mm	Δ mm	ψ
1	1,5	50,48	50,54	0,06	0,00119
2	2	49,955	50,54	0,585	0,0117

Măsurînd temperatura în baia de ulei la începutul şi la sfîrşitul experienţelor şi admiţînd o variaţie liniară a acesteia, se poate deduce valoarea viscozităţii μ_1 de pe diagrama din figura 19 corespunzătoare fiecărei determinări. S-au obţinut astfel seriile de valori cuprinse în tabloul nr. 6.

Tabloul nr. 6

λ	G	F	Ω	μ_1	ζ_{exp}	α	$\delta_2 \times 10^3$	M	km_{exp}	f_{exp}	f	f'
	0	110	178	0,0047	0,0488	0,06	0,0282	0,0962	59,2	0,0346	0,0281	0,0293
	5	156,6	178	0,0039	0,0838	0,07	0,0278	0,1017	44,6	0,0257	0,0257	0,0266
	8	184,7	173	0,0032	0,124	0,09	0,0273	0,088	33,3	0,0189	0,0218	0,0226
1,5	10	193,3	178	0,0033	0,122	0,09	0,0273	0,0825	29,85	0,0169	0,0218	0,0226
	13	231,3	172,5	0,0027	0,184	0,125	0,0263	0,0962	30,2	0,0165	0,0167	0,01715
	15	250	178	0,0027	0,193	0,130	0,0261	0,0825	24,15	0,0131	0,0161	0,01656
	18	278	172,5	0,0022	0,272	0,190	0,0243	0,0962	27,15	0,0137	0,0106	0,01095
	20	296,9	178	0,0023	0,270	0,190	0,0243	0,0935	24,75	0,0125	0,0106	0,01095
		34	178,5	0,0057	0,918	0,5	0,146	0,021	8,08	0,0248	0,0286	0,02295
		57,5	178,5	0,0051	1,74	0,73	0,079	0,0341	14,33	0,0237	0,0182	0,01355
	0	110	179	0,010	1,69	0,77	0,0673	0,0561	14,5	0,0204	0,0166	0,0124
	0	110	178,5	0,0053	3,20	0,916	0,0246	0,0383	27	0,0139	0,00957	0,0074
	2	128,66	179	0,0092	2,15	0,85	0,0439	0,0561	9,95	0,00913	0,0131	0,00972
	2	128,66	178,5	0,0056	3,54	0,927	0,0214	0,0378	26,2	0,0113	0,00882	0,00692
2	5	156,6	179	0,0085	2,83	0,90	0,0293	0,055	12	0,00735	0,0106	0,00795
	5	156,6	178,5	0,0059	4,095	0,94	0,01755	0,0351	24,4	0,00898	0,0078	0,00642
	10	193,3	178,5	0,0063	4,45	0,945	0,0161	0,0394	24,2	0,00816	0,00734	0,00612
	15	250	178	0,0067	5,76	0,952	0,01405	0,0533	29	0,00853	0,00676	0,00581
	20	296,9	178	0,0071	6,47	0,954	0,0135	0,0486	23,2	0,00653	0,0067	0,00568
	25	343	178	0,0076	6,98	0,958	0,0123	0,0507	22,95	0,006	0,00643	0,0054
	40	483	178	0,0099	7,54	0,96	0,0117	0,0549	18,55	0,00455	0,00613	0,00533
	45	530	178	0,0125	6,55	0,955	0,0132	0,0696	19	0,00524	0,00661	0,00567

Pentru determinarea momentelor (fig. 3 şi 4), se observă că, notînd prin Q greutatea situată pe talerul 9 şi prin M_r momentul rulmentului exterior, dacă sînt satisfăcute condiţiile

$$M - M_r \leqslant 0{,}105\, Q \leqslant M + M_r, \tag{20}$$

braţele 18 solidare cu corpul 1 îşi vor păstra poziţia de echilibru orizontală. La limită, cînd se amorsează mişcarea de rotaţie a cuzinetului într-un sens sau într-altul, greutăţile corespunzătoare pe taler Q_1 şi Q_2 satisfac relaţiile

$$M - M_r = 0{,}105\, Q_1 \quad \text{şi} \quad M + M_r = 0{,}105\, Q_2. \tag{21}$$

Determinînd aceste greutăţi în cele două cazuri limită, se poate elimina astfel momentul de frecare pe rulmentul exterior, deci

$$M = 0{,}105 \frac{Q_1 + Q_2}{2} = 0{,}0525\,(Q_1 + Q_2), \tag{22}$$

formulă cu care s-au calculat momentele M. În realitate, acest moment este egal cu momentul de frecare pe fus, nu pe cuzinet, deoarece frecarea de rostogolire dintre inelul 9 şi corpul 1, montate cu joc, împiedecă deplasarea relativă a acestora sub efectul mişcărilor mici pe care le execută cuzinetul faţă de axul fix al fusului. Punctul de contact între cele două piese rămîne acelaşi, iar prin aceasta forţa exterioară aplicată cuzinetului suferă o deviaţie unghiulară care o face

să treacă foarte aproape de axul fusului. Cum rezultanta presiunilor trece neapărat prin axul cuzinetului şi este paralelă cu sarcina exterioară P, aceste două forţe dau un moment care se adaugă la momentul de frecare pe cuzinet. Se ştie în acest caz că momentul total măsurat este egal cu momentul de frecare pe fus, aşa cum s-a admis mai sus.

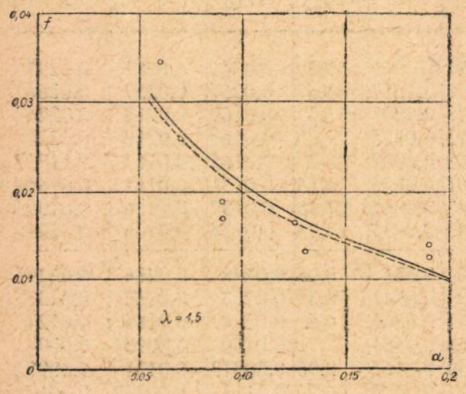


Fig. 20

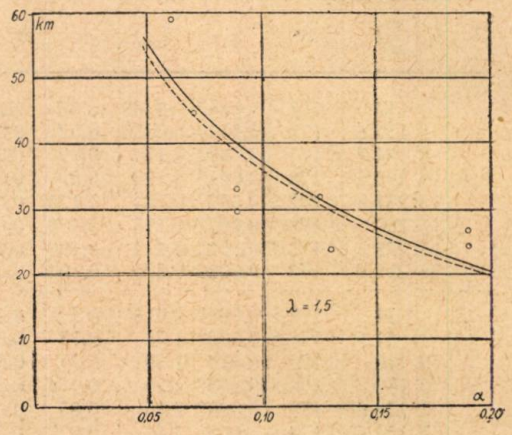


Fig. 21

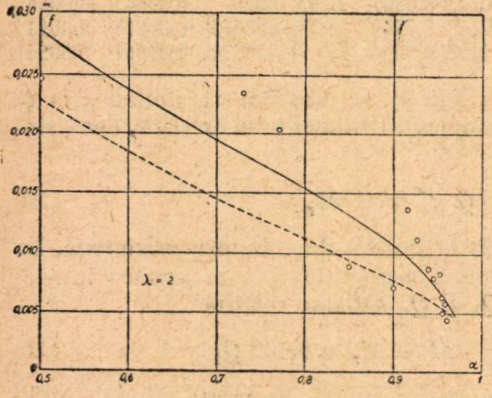


Fig. 22

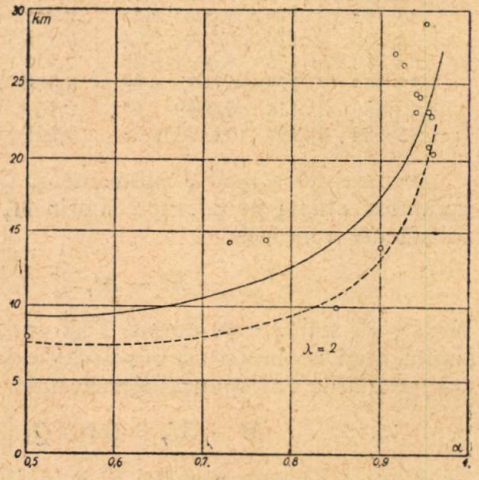


Fig. 23

În diagramele din figurile 20—23 s-au trasat valorile teoretice [2] $km = f_1(\alpha)$, $f = f(\alpha)$ şi s-au indicat prin puncte datele experimentale, cuprinse în tabloul nr. 6. Atît coeficienţii km cît şi f au fost reprezentaţi prin două serii de curbe, acelea pline corespunzînd cazului cînd uleiul umple complet zona divergentă a spaţiului dintre suprafeţe (fus-cuzinet), iar acelea punctate (valorile f') pentru funcţionarea cu alimentare mai redusă, cînd lubrifiantul umple numai parţial această zonă [2].

Din confruntarea datelor teoretice cu cele rezultate din experienţe, rezultă că lagărul de alungire $\lambda = 2$, avînd jocul radial mare ($\psi = 0{,}0117$) deci un inter-

val mare între suprafeţe în zona de alimentare, a funcţionat în general la regimul de umplere completă, favorizat şi de valorile mari ale excentricităţii; pentru lagărul $\lambda = 1{,}5$, cu joc redus, diferenţele teoretice sînt minime în domeniul cercetat ($\alpha = 0{,}06-0{,}2$), amîndouă curbele plasîndu-se între valorile experimentale. Se observă apoi că şi pentru $\lambda = 2$ o parte din punctele experimentale se aşează lîngă curba punctată, arătînd astfel că în general cele două regimuri nu sînt stabile, ele putînd să alterneze.

Curbele teoretice sînt bine încadrate prin rezultatele de laborator, ceea ce permite să se tragă concluzia că valorile obţinute prin calcul sînt juste, pentru coeficienţii km, f şi ζ. Din relaţia (17), se vede că în km, pe lîngă valorile măsurate M_f, P, Δ, intră şi α, care se determină cu ajutorul curbei calculate $\zeta = f_2(\alpha)$. Dimpotrivă, f poate fi dedus direct din (11), folosind măsurătorile efectuate, iar confruntarea cu datele teoretice se poate face nemijlocit, luînd α ca variabilă independentă.

În prezentarea rezultatelor s-a considerat numai această variabilă, în loc de parametrul $\zeta = f_2(\lambda, \alpha)$, aşa cum se procedează uneori pentru a se evita dificultatea ce apare prin necunoaşterea funcţiei respective; în realitate, excentricitatea relativă α este elementul care condiţionează funcţionarea lagărului şi trebuie să apară de îndată ce s-a înlăturat această greutate.

Rezultatele se referă la două alungiri diferite, punînd în evidenţă astfel influenţa acestui parametru şi arătînd, şi din acest punct de vedere, că funcţiile $f_1(\alpha, \lambda)$, $f_2(\alpha, \lambda)$ deduse anterior [2] sînt valabile.

Se observă în general o dispersiune destul de mare a valorilor experimentale. Pe lîngă cauzele arătate mai sus, aceasta se datoreşte şi dificultăţii de a se determina exact temperatura uleiului din baie, în timpul fiecărei măsurători. Această temperatură a fost dedusă prin interpolare, cunoscînd valorile la începutul şi sfîrşitul fiecărei serii de determinări, iar variaţia ei poate fi sensibil influenţată prin adăugirile de ulei proaspăt, necesare în timpul lucrului.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении излагаются опыты, проведенные на двух подшипниках скольжения, с соотношением ширины и диаметра 1,5 и 2. В первой части сообщения описывается построенный с этой целью аппарат с приспособлениями для нагрузки и измерения давлений и моментов, а затем распределение давлений на периферии цапфы и вдоль ее оси. Автор констатировал, что экспериментальные результаты вполне соответствуют теоретическим, изложенным в одном из более ранних сообщений [1]. В то же время результаты сравниваются с результатами, полученными при принятии некоторых общих предельных условий, причем констатируется, что эти условия не изменяют существенно общие результаты, как максимальные давления, равнодействующие давлений, моменты и коэффициент трения.

Во второй части сообщения приводятся общие характеристики подшипников, испытанных при разных режимах работы, и определяется при помощи теоретических кривых [2] относительная эксцен-

тричность в каждом отдельном случае. Сравнивая затем теоретические значения коэффициентов нагрузки, моментов, коэффициентов трения и пр. с экспериментальными значениями, автор также приходит к заключению, что опыты подтверждают теоретические результаты, изложенные в других работах [1] и [2].

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES PALIERS LISSES

(RÉSUMÉ)

L'Auteur décrit les expériences effectuées sur deux paliers lisses, dont le rapport largeur-diamètre est 1,5 et 2. La première partie du travail donne la description de l'appareil construit dans ce but, avec les différents dispositifs de chargement et de mesure des pressions et des moments. On y donne ensuite les courbes des pressions, en ce qui concerne leur répartition sur le contour du tourillon et le long de l'axe du palier. On constate à cette occasion que les résultats expérimentaux et les résultats théoriques, exposés dans un ouvrage précédent [1], concordent. On compare également ces résultats aux valeurs données par l'application des conditions à la limite ayant un caractère général et l'on constate que les coefficients caractéristiques, tels les pressions maxima, leur résultante, les moments et les coefficients de frottement, ne subissent pas d'écarts substantiels.

Dans la deuxième partie, l'Auteur donne les caractéristiques globales des paliers essayés en différents régimes de fonctionnement et, à l'aide des courbes théoriques [2], détermine l'excentricité relative correspondante. Comparant ensuite les valeurs théoriques et expérimentales des coefficients de charge, des moments, des coefficients de frottement, etc., on conclut à l'existence d'un accord satisfaisant entre l'expérience et la théorie, exposée dans les ouvrages précédents [1], [2].

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *O metodă generală pentru studiul mişcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafeţe de dimensiuni finite*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951, p. 27.
2. — *Consideraţii asupra calculului lagărelor prin alunecare*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice t. IV, nr. 3—4, 1952, p. 291.
3. — *Calculul lagărelor cu alunecare supuse la forţe variabile*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 125.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

CÎTEVA ASPECTE ALE UTILIZĂRII ULEIURILOR LUBRIFIANTE DIN GRUPE STANDARDIZATE INFERIOARE

DE

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU

NOTAŢII UTILIZATE

F = forţa medie care acţionează asupra cuzinetului în timpul unui ciclu, în kg
p_m = presiunea medie pe cuzinet, în kg/cm²
b = lăţimea cuzinetului, în m
r = raza fusului, în m
R = raza cuzinetului, în m
Δ = jocul radial $(R - r)$, în m
ψ = jocul relativ
$\Delta\psi$ = variaţia jocului relativ în funcţie de temperatură
e = excentricitatea, în m
ψ_{cor} = jocul relativ corectat $(\psi \pm \Delta\psi)$
α = excentricitatea relativă
δ_2 = grosimea minimă a peliculei de lubrifiant, în m
ζ = coeficientul de încărcare a lagărului
θ^* = unghiul dintre linia centrelor şi direcţia forţei, în radiani
$\Delta\theta^*$ = variaţia unghiului θ^*, în radiani
ω = viteza unghiulară, în radiani
μ_1 = vîscozitatea lubrifiantului, în kg s/m²
λ = alungirea $\left(\frac{2r}{b}\right)$
R^* = raza manivelei, în m
l = lungimea bielei, în m
h = înălţimea medie a asperităţilor suprafeţelor de alunecare, în m

Utilizarea uleiurilor lubrifiante din grupe standardizate inferioare prezintă numeroase aspecte.

Unele — de exemplu cele în legătură cu comportarea chimică a uleiurilor — se pot analiza numai de la caz la caz, în funcţie de compoziţia chimică şi procesul de fabricaţie a uleiurilor respective.

Altele — de exemplu cele în legătură cu vîscozitatea şi variaţia vîscozităţii uleiurilor în funcţie de temperatură — se pot analiza în general, trăgîndu-se concluzii valabile în toate împrejurările.

Din acest al doilea punct de vedere problema se poate reduce la a utiliza uleiuri mai fluide la temperatura de regim a agregatului şi uleiuri mai vîscoase la pornire, deoarece în comparaţie cu uleiurile din grupe superioare, uleiurile din grupe inferioare au viscozităţi mai mici la temperaturi ridicate şi viscozităţi mai mari la temperaturi joase.

Privind problema în acest mod, se poate ajunge mai uşor la rezolvarea ei, nu numai prin simplificarea pe care o permite ci şi prin indicaţiile corespunzătoare ce se întîlnesc în literatura de specialitate.

În ceea ce priveşte tendinţa utilizării uleiurilor fluide, aceasta s-a făcut simţită abia în ultimii ani, deşi, teoretic se ştia că uleiurile vîscoase prezintă numeroase dezavantaje, dintre care cele mai importante erau:

— consum mare de energie

— pornire anevoioasă a motoarelor

— timp îndelungat pînă la atingerea turaţiei de regim la mecanismele cu numeroase organe de frecare (industria textilă)

— tendinţa de a forma depozite cărbunoase în motoare.

Ulterior, diferitele institute de cercetări au trecut la experimentarea uleiurilor fluide în locul celor vîscoase, obţinînd rezultate spectaculoase [1], [2], [3].

În toate cazurile de folosire a uleiurilor fluide s-au constatat uzuri mai mici, temperaturi de regim mai scăzute şi performanţe superioare.

Rezultate asemănătoare s-au obţinut şi la noi în ţară.

Ca urmare a acestor observaţii, s-a manifestat o tendinţă din ce în ce mai insistentă de a recomanda uleiuri fluide.

În Uniunea Sovietică, ungerea motoarelor Diesel rapide a început să se facă cu uleiuri fluide care — după experimentarea corespunzătoare — au fost standardizate (GOST 5304—50).

În S.U.A. s-au introdus tipuri noi de uleiuri de motoare: 5 W şi 10 W (clasificarea SAE).

În toate ţările atenţia producătorilor s-a îndreptat către fabricarea de astfel de uleiuri fluide.

Primul pas făcut la noi în această direcţie a fost adoptarea pentru sectorul agricol a unui ulei cu caracteristici similare uleiului GOST 5304—50 (în locul uleiului 413 STAS 751—49).

La experienţele sistematice făcute în vederea omologării uleiului tip GOST 5304—50 s-au obţinut rezultate excelente.

Mai tîrziu, mergîndu-se pe această linie, s-au obţinut şi alte rezultate locale bune, prescriindu-se uleiuri fluide în locul celor vîscoase, folosite anterior.

Trebuie observat cu această ocazie că, după datele practice publicate în literatură şi după propria noastră experienţă, nu părea că utilizarea uleiurilor fluide ar putea fi îngrădită de consideraţii particulare, factorii esenţiali fiind — la lagărele de alunecare — sarcina, turaţia şi vîscozitatea.

Prin aceasta se făcea greşeala de a se omite uzura, care nu poate fi evitată.

Această greşeală a ieşit la iveală mai tîrziu, cu ocazia încercării de a utiliza la autovehicule uleiuri din grupa 100 cu raport de viscozitate (STAS 743—49), în locul uleiurilor din grupa 200 sau 300.

Utilizarea uleiurilor din grupa 100 cu raport de vîscozitate, părea — de altfel foarte just — să se reducă la o problemă de trecere de la un ulei vîscos la un ulei fluid. Mai exact, trecerea de la un ulei cu viscozitatea 10 cSt la temperatura de regim (ulei 413) la un ulei cu viscozitatea 3 cSt la aceeaşi temperatură (Autol 6).

Experienţele anterioare — dintre care unele au fost citate — arătau nu numai că faptul era posibil, ci chiar avantajos.

Elementele critice care trebuiau avute în vedere erau:

— sistemul cilindru-piston

— lagărele

— debitul pompei și circulația prin conducte la temperaturi joase
— consumul de lubrifiant pentru completare și înlocuire.

Sistemul cilindru-piston. Practica pompelor de injecție de la motoarele Diesel, ale căror jocuri sînt de ordinul micronilor, arată că nu se produc nici gripări, nici uzuri apreciabile, deși deseori ungerea se face exclusiv cu motorină, a cărei viscozitate nu depășește 3 sau 4 cSt la temperatura de regim.

Totodată este evident că, la sistemul cilindru-piston, lubrifiantul poate pătrunde mai ușor dacă este mai fluid.

Acest fenomen (acces mai ușor — consum mai mare) se constată efectiv, dar cantitativ nu este important și nu constituie un factor prohibitiv din punct de vedere economic, dacă motorul nu este excesiv de uzat. S-ar putea chiar admite că — în măsura în care nu rezultă depozite care să blocheze segmenții în canale, pentru sistemul cilindru-piston — este avantajos să se folosească un lubrifiant mai fluid. Condiția esențială este însă aceea ca uleiul să ajungă foarte repede la locurile de uns.

Lagăre. Pentru performanța lagărului este avantajoasă folosirea unui ulei vîscos, deoarece asigură o grosime minimă a peliculei de lubrifiant și prin aceasta o separare mai sigură a suprafețelor metalice. La creșterea viscozității lubrifiantului se opun însă:

— Consumul de energie pentru frecarea internă în masa lubrifiantului.
— Regim termic mai ridicat, energia consumată în frecare transformîndu-se în căldură. Fenomenul se autoreglează în oarecare măsură, ridicarea de temperatură reducînd viscozitatea și deci consumul de energie pentru frecare.
— Accesul lubrifiantului în lagăr, care depinde de secțiunea orificiului de admisie, de viscozitatea lichidului și de presiunea de refulare. Deoarece secțiunea și presiunea nu pot fi mărite indefinit, rezultă că viscozitatea nu poate depăși o anumită limită, peste care debitul de lubrifiant în lagăr devine insuficient și nu se mai poate realiza grosimea de peliculă corespunzătoare.

Considerații constructive impun obținerea performanței dorite nu prin mărirea excesivă a grosimii peliculei (deci a viscozității), ci mărind portanța lagărului prin reducerea jocului relativ, care apare în expresia presiunilor la numitor, ridicat la puterea a doua. De exemplu la un lagăr cu raza fusului 30 mm și alungirea 0,5 la o sarcină de 24 kg/cm² și o turație de 1800 rot/min, variind jocul radial cu $\pm$ 16,5%, se obține același rezultat ca în cazul cînd s-ar varia viscozitatea lubrifiantului cu + 87% și respectiv — 50%.

Evident, acțiunea asupra jocului radial este limitată de posibilitatea de prelucrare mecanică a suprafețelor respective, de condiția ca $\delta_2 > 3\ h$. Trebuie avut în vedere că jocul radial crește prin uzura care se produce inevitabil în funcționare.

Debitul pompei. Cînd circulația uleiului se asigură cu pompe volumetrice (cu piston sau plonjor), viscozitatea lubrifiantului prezintă importanță mai mică. În general, însă, în instalațiile de ungere se folosesc pompe cu angrenaje. Debitul acestora este dat de formula

$$Q = \pi .\ d.\ l.\ \text{mod.}\ n.\ h.\ \lambda,$$

în care Q = debitul, în l/min (1)
d = diametrul primitiv, în mm
l = lungimea dinților, în mm
n = turația, în rot/min

h = înălţimea dinţilor, în mm
λ = randamentul pompei (0,7 — 0,8)
mod. = modulul dinţilor.

Ar rezulta că debitul lor este de asemenea independent de viscozitate. În realitate, viscozitatea are o mare influenţă asupra debitului de îndată ce depăşeşte o anumită valoare, care de altfel nu este prea mare; pentru pompele obişnuite, folosite de obicei la instalaţiile de ungere ale motoarelor de tractoare sovietice, randamentul pompei rămîne independent de viscozitate pînă la ~ 4 000 cSt. La viscozităţi mai mari, randamentul scade treptat, ajungînd zero la ~ 20 000 cSt.

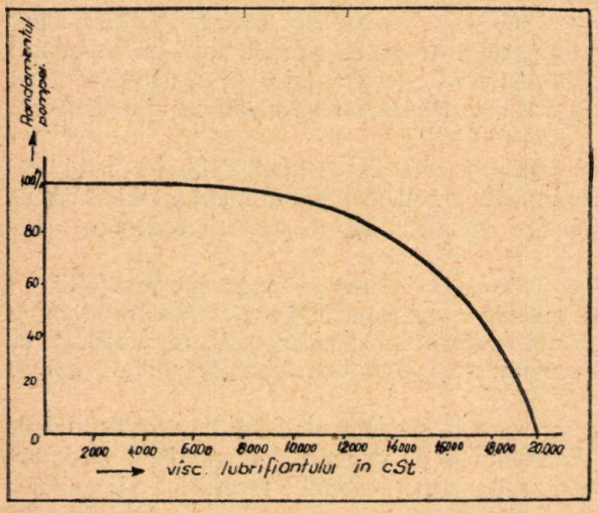


Fig. 1. — Diagrama randamentului pompelor cu angrenaj.

După unele date găsite în literatură [4] s-a reconstituit curba de variaţie a debitului unei pompe cu angrenaje de tip obişnuit, în funcţie de viscozitate (fig. 1).

La viscozităţi mari se constată, de asemenea, o letură între turaţia pompei cu angrenaje şi debitul ei.

După aceleaşi date rezultă că, chiar numai la 12 000 cSt, debitul pompei devine zero la o turaţie mai mare a pompei cu angrenaje, decît 500 rot/min.

Din toate aceste observaţii rezultă că la o viscozitate a uleiului de peste 4 000 cSt, debitul pompei cu angrenaje nu mai este independent de viscozitate, scăzînd parabolic cu creşterea viscozităţii, cu atît mai repede, cu cît turaţia pompei este mai mare, adică invers decît rezultă din formula (1). — La o viscozitate a uleiului peste ~ 20 000 cSt, pompa cu angrenaje este incapabilă să mai refuleze uleiul în instalaţia de ungere.

Trebuie menţionat că viscozitatea 20 000 dSt este de obicei mai mică decît aceea pe care o are uleiul la temperatura de congelare, adică o viscozitate la care uleiul curge din recipiente şi din punct de vedere practic este considerată satisfăcătoare.

Consumul de lubrifiant pentru completare şi înlocuire. Din punct de vedere economic imediat, acesta este criteriul cel mai vizibil de caracterizare a unui ulei folosit într-o instalaţie de ungere prin circulaţie. Unele date experimentale [5] arată că, în cazul motoarelor noi (cu jocuri mici), consumul de lubrifiant este practic independent de viscozitate. Pe măsură ce piesele se uzează (jocurile se măresc), încep să aibă influenţă întîi viscozitatea, apoi indicele de viscozitate. Prin urmare, la motoare noi, problema consumului de ulei pentru completare nu are legătură cu viscozitatea uleiului şi, respectiv, cu calitatea lui.

Înlocuirea uleiului din carter se face la intervale de timp diferite, în funcţie de stabilitatea uleiului. Din această cauză, aici intervine ca deosebit de importantă calitatea uleiului. Este greu de stabilit o ierarhie în această privinţă, între ule-

iurile fluide şi cele vîscoase de aceeaşi natură. După ansamblul cunoştinţelor actuale, din punct de vedere chimic, avantajul este de partea uleiurilor fluide, care avînd o moleculă mai simplă, sînt mai stabile.

Acest avantaj este însă, anihilat în oarecare măsură de condiţiile în care se află uleiul în timpul exploatării, respectiv întinderea în strat mai subţire şi pulverizarea mai fină a uleiurilor fluide, ceea ce duce la o oxidare mai intensă din cauza unei suprafeţe mai mari de contact cu oxigenul.

Dacă situaţia rămîne atît de confuză în ceea ce priveşte stabilitatea chimică a uleiurilor de viscozităţi diferite, dar de aceeaşi natură chimică, în cazul uleiurilor diferite în ceea ce priveşte natura chimică, dar de aceeaşi viscozitate, situaţia este mult mai clară.

Clasificînd uleiurile în fluide şi vîscoase şi pe acestea la rîndul lor, cu variaţii mai mari sau mai mici ale viscozităţii cu temperatura se ajunge şi la o clasificare a acestora după calitate. Cele cu variaţie redusă a viscozităţii cu temperatura sînt în general uleiuri de calitate superioară considerate şi stabile la oxidare (ceea ce este numai în parte exact); cele cu variaţie mare a viscozităţii cu temperatura sînt în general uleiuri de calitate inferioară — considerate uşor oxidabile (ceea ce este cu totul exact).

La această ierarhizare se pot face unele precizări de amănunt. Între calitate — aşa cum rezultă din clasificarea de mai sus — şi compoziţia chimică a uleiului, există o legătură exprimată analitic prin compoziţia pe grupe de hidrocarburi, respectiv: parafinice, naftenice, aromatice şi mixte. Din punct de vedere practic, trebuie avute în vedere hidrocarburile mixte care manifestă — în principal — caracterul grupei predominante.

Cele mai avantajoase din punctul de vedere al stabilităţii sînt hidrocarburile nafteno-parafinice care au curbe intermediare de variaţie a viscozităţii cu temperatura, iar cele mai neavantajoase sînt cele în care predomină ciclurile aromatice. Uleiurile pur parafinice (uleiurile albe, supra-rafinate) sînt foarte nestabile prin absenţa totală a inhibitorilor naturali.

În legătură cu alterarea uleiului mai trebuie avut în vedere aspectul fizic al problemei: contaminarea. Şi în această privinţă avantajele alternează; de exemplu, uleiurile fluide fiind mai avantajoase din punctul de vedere al separării de impurităţi şi mai desavantajoase în caz de diluare.

Dacă se încearcă o precizare cantitativă a timpului de utilizare a unui lubrifiant, se întîmpină o nouă dificultate, aceea a necunoaşterii limitei de alterare a uleiului, dincolo de care acesta nu mai poate fi utilizat ca lubrifiant pentru motoare. De aceea, recomandările şi practica cuprind date foarte diferite. În general, în literatură, se indică înlocuirea uleiului în carter după un parcurs de ~ 3 000 km. Deseori se întîlnesc însă parcursuri mult mai lungi, ajungînd pînă la 20 000 km. În aceste cazuri, este evident că uleiul iniţial s-a consumat de mult şi în carter se găseşte de fapt un amestec de uleiuri de diferite grade de alterare (de la completările succesive), cele mai vechi fiind probabil de mult dispărute şi înlocuite prin adăugirile zilnice. În această privinţă se poate face următoarea socoteală.

În timpul funcţionării motorului, uleiul se consumă în cantitate de 1—3 g/CP. h. Periodic se introduce în carter ulei proaspăt, pentru a completa uleiul consumat. Prin aceasta, uleiul consumat un număr de ore şi alterat în mod corespunzător, amestecîndu-se cu uleiul proaspăt, ajunge la o calitate medie între aceea pe care ar fi avut-o dacă nu era amestecat şi aceea a uleiului proaspăt. La a doua completare, amestecul de ulei iniţial şi ulei de la prima comple-

tare, a cărui alterare a progresat, se amestecă cu ulei proaspăt, obţinîndu-se o calitate medie şi aşa mai departe, uleiul iniţial dispărînd treptat. După un timp oarecare, cu excepţia unei foarte mici cantităţi de ulei iniţial, tot uleiul uzat din carter este constituit din porţiuni de ulei de completare de diferite grade de uzură.

Luînd ca valori:

— capacitatea carterului ..... 200 g
— consumul de ulei ..... 2 g/h
— termene de completare ..... la 10 h

(valori normale pentru un motor ipotetic uzual de 1 CP de uzură medie) şi admiţînd că atunci cînd în carter a mai rămas 2% din uleiul iniţial, acesta poate fi neglijat, obţinem relaţia:

$$200 \times 0{,}9^n = 4,$$

de unde

$$n = 37.$$

Adică, după 37 termene de completare, alterarea intrinsecă a uleiului rămîne invariabilă, prin consum dispărînd din ulei — pe măsură ce se formează — porţiunile mai vechi, deci mai uzate.

Aceasta revine în cazul ipotetic considerat:

370 ore sau 15 000 km.

Calculul prezentat este numai ilustrativ, dar arată că înlocuirea uleiului poate fi făcută cu folos real numai la anumite termene, care trebuie stabilite cu multă chibzuială.

În practică se obişnuieşte să se înlocuiască uleiul după 1 000—2 000 km, adică după 25—50 ore de funcţionare. Chiar la uleiurile cele mai asfaltoase, după cîteva zeci de ore de utilizare în motoare, nu se constată alterări grave din punct de vedere chimic, astfel că problema stabilităţii chimice nu prezintă un interes esenţial atunci cînd termenele de înlocuire a uleiului sînt atît de scurte. În general, factorul determinant îl constituie contaminarea.

În cazul uleiurilor din grupe inferioare, s-a admis oficial înlocuirea uleiului în carter după 600 km. Aceasta revine la 15 ore în cazul automobilelor şi ceva peste 20 de ore în cazul autocamioanelor. Este de presupus că acest timp este exagerat de scurt şi că atunci cînd este respectat, factorul determinant trebuie să fie condiţiile de exploatare (de care depinde contaminarea), nu calitatea uleiului.

Trebuie arătat că, pentru a se obţine maximum de avantaj din înlocuirea uleiului, chiar la termene atît de scurte, este esenţial să se spele cit mai bine carterul, îndepărtînd din el produşii de contaminare (care sînt funcţie de timp) şi în practică sînt cei mai periculoşi.

Experienţa noastră cu uleiuri utilizate la un autocamion ZIS 150 şi la un autocamion Praga R. N., înlocuite după parcursuri de $\sim$ 1 000 km, respectiv $\sim$ 35 ore, arată că uleiurile uzate au încă o calitate cu totul satisfăcătoare.

În concluzie, se poate admite că pînă la parcursuri de 1 000 km, pentru motoare în stare tehnică satisfăcătoare, corect exploatate, problema consumului de lubrifiant pentru completare şi înlocuire nu trebuie să constituie o preocupare, sau un criteriu de diferenţiere.

Analiza hidrodinamică a problemei este modul cel mai corect de tratare. Avem la dispoziţie ecuaţii care permit tratarea matematică a situaţiei cu concluzii exprimabile în cifre.

Deși cazurile care se pot întîlni sînt foarte variate, problema poate fi cercetată într-un caz particular, concluziile putînd fi privite calitativ, dintr-un punct de vedere general.

Pentru a se stabili o corespondență cu experiența, se va analiza situația lagărelor de bielă ale motorului ZIS—120, deoarece lagărele de bielă sînt cel mai sever solicitate.

Parametrii adoptați în calcule au fost aceia corespunzători funcționării motorului în regim moderat ($\sim 40\%$).

Folosind ecuațiile lubrificației stabilite pentru cazul lagărelor de alunecare supuse la forțe variabile [6], [7], s-a urmărit determinarea grosimii peliculei de lubrifiant la punctul de joc minim, la lagărele de bielă, pentru diferite jocuri și diferite viscozități ale lubrifiantului.

Astfel, considerînd că la suprafețele rodate $h \sim 0{,}3\ \mu$, rezultă că pentru o funcționare sigură în regim hidrodinamic $\delta_2 > 0{,}9\mu$, adică aproximativ 1μ.

Caracteristice geometrice și de funcționare

$F = 465$ kg.

$P_m = 23{,}7 \times 10^4$ kg/m^2

$\omega = 190$ radiani (~ 1800 rot/min)

$b = 0{,}032$ m.

$2_r = 0{,}0607$ m.

$\lambda = 0{,}53$

Din relația:

$$\delta_2 = \Delta(1 - \alpha) = 1 \times 10^{-6}\text{m}, \qquad (2)$$

se obțin datele din tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Δ, în m	α
0,000 05	0,98
0,000 075	0,987
0,000 10	0,99
0,000 15	0,993

În cazul lagărelor supuse la forțe variabile, θ^* variază față de valoarea medie. Luînd $\cos\theta^* = \alpha$ [7], rezultă că δ_2 variază față de valoarea nominală (la θ_0^*).

Din relația $\theta^* = \theta_0^* + \Delta\theta^*$, (3)

respectiv

$$\theta^* = \theta^*_0 + \frac{1}{2}\frac{R^*}{l}(\sin \Omega_1 t - 1) - \frac{1}{2F_{co}} \cdot \frac{\Omega_1}{\Omega_3} \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[F_{cn}\left(\sin n\,\Omega_3 t - \sin n\,\frac{\pi}{2}\frac{\Omega_3}{\Omega_1}\right) - F_{sn}\left(\cos n\,\Omega_3 t - \cos n\,\frac{\pi}{2}\frac{\Omega_3}{\Omega_1}\right)\right], \qquad (3')$$

în care $\Omega_3 = \Omega_1$ la motoarele în 2 timpi și

$\Omega_3 = \frac{\Omega_1}{2}$ la motoarele în 4 timpi, Ω_1 fiind viteza de rotație a fusului în cuzinet, iar F_{co}, F_{cn} și F_{sn}, coeficienții seriei Fourier care aproximează diagrama desfășurată a lui (F) în timpul unui ciclu motor, se poate calcula valoarea lui θ^* în orice punct.

Diagrama desfășurată a lui (F) pentru motorul ZIS-120 este reprezentată în figura 2. Coeficienții F_{co}, F_{cn}, și F_{sn} s-au determinat cu ajutorul analizorului armonic. Deoarece pentru întreaga curbă, convergența se obținea cu prea mulți termeni, aceasta a fost împărțită în trei secțiuni. Astfel s-a obținut diagrama punctată din figura 2 care, după cum se vede, aproximează în mod satisfăcător diagrama reală.

Cu ajutorul coeficienților obținuți s-a calculat θ^*, care pentru cazul de față variază în intervalul

$$\theta^*_0 + 11^\circ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \theta^*_0 - 17^\circ$$

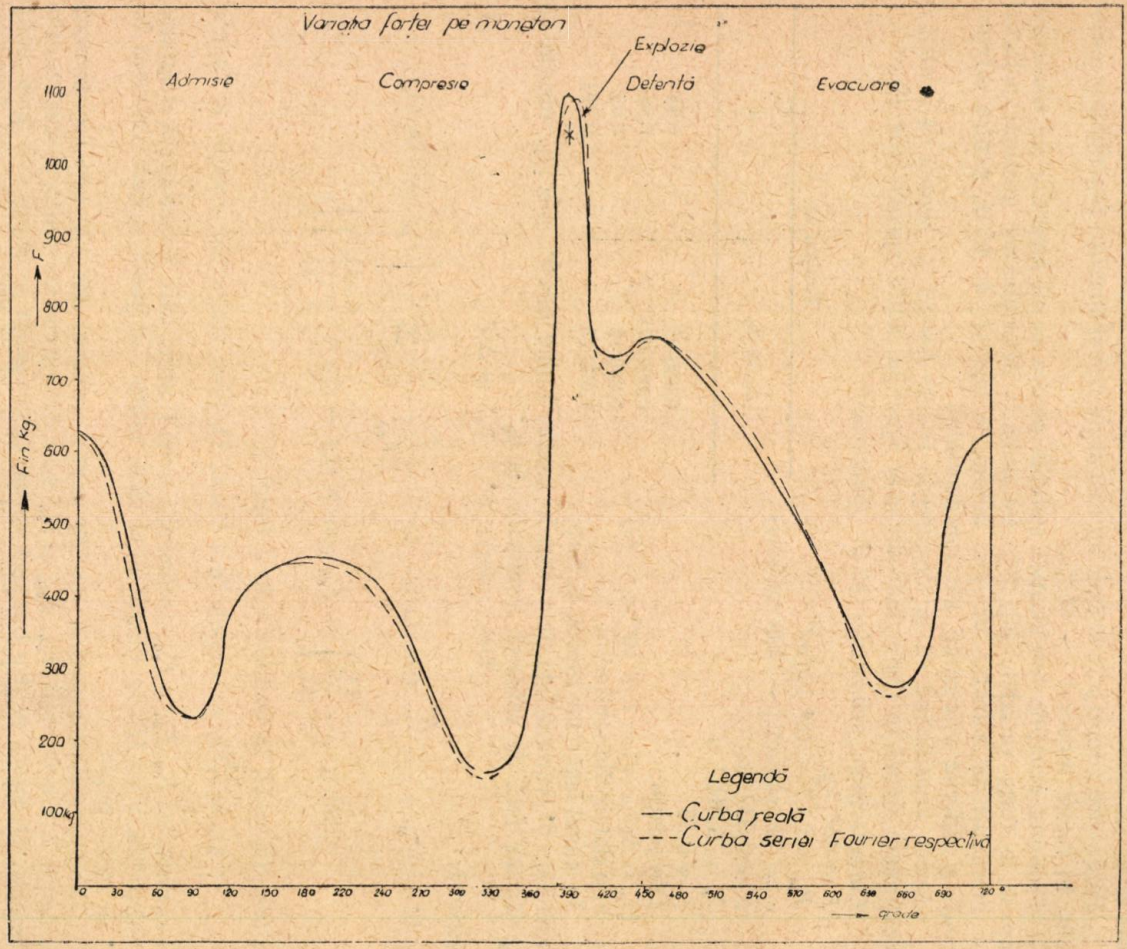


Fig. 2. — Diagrama forțelor pe maneton. Punctat: Curba reconstituită cu ajutorul seriei Fourier.

Pentru a obține aceeași grosime a lui δ_2, în conformitate cu relația (2) și avînd în vedere că $\alpha = \cos\theta^*$, trebuie să se calculeze θ^* pentru fiecare valoare a lui α din tabloul nr. 1, să se considere unghiul ca fiind $\theta_0{}^*$, să se adauge $\Delta\theta^*$, care în cazul analizat este minus 17°, și să se calculeze α corespunzător unghiului final obținut.

Procedînd astfel s-au obținut valorile din tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

Δ, în m	α
0,000 05	0,878 8
0,000 075	0,897
0,000 10	0,906
0,000 15	0,914 5

Pentru a calcula μ_1, necesar în condițiile date, trecem la ζ și apoi calculăm pe μ_1 din relația [6]

$$\mu_1 = \frac{F\psi^2 cor}{2brw\zeta}. \qquad (4)$$

Valoarea lui ψ a fost corectată pentru temperatura de funcționare a lagărelor. În acest scop s-a folosit relația $\Delta\psi = k(t-20)\times 10^{-6}$, în care pentru aliaj antifricțiune pe carcasă de oțel k are valoarea 5; astfel s-a obținut datele din tabloul nr. 3.

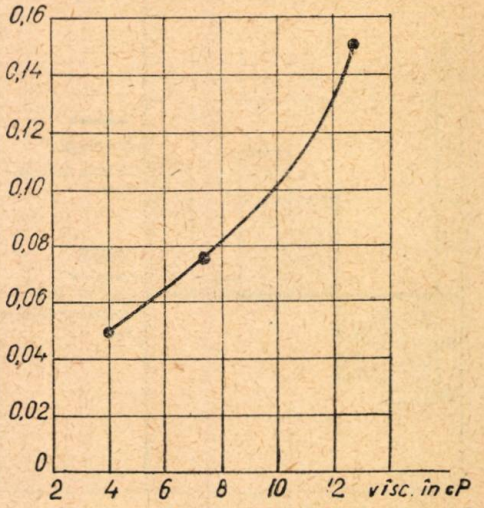


Fig. 3. — Vîscozitatea minimă a lubrifiantului în funcție de jocul lagărelor de bielă la motorul Zis-120.

Tabloul nr. 3

Δ, în m	μ_1 în kg s. m.$^{-2}$
0,000 05	$2{,}03 \times 10^{-4}$
0,000 075	$5{,}55 \times 10^{-4}$
0,000 10	$8{,}20 \times 10^{-4}$
0,000 15	$11{,}0 \times 10^{-4}$

Rezultă deci, teoretic, că pentru funcționare în regim hidrodinamic, în cazul motorului ZIS 120 la o încărcare de ordinul 40 %, în funcție de jocul relativ al lagărelor, viscozitatea uleiului nu poate coborî sub valorile din tabloul nr. 3 și figura 3.

Această concluzie — de altfel firească — este deosebit de însemnată, deoarece concretizează un factor limitativ la utilizarea uleiurilor fluide.

În conformitate cu această concluzie, teoretic, avantajele uleiurilor fluide se vor confirma numai la motoare noi sau ieșite din reparația generală, cu jocuri mici.

În aceste cazuri, temperatura lagărului este minimă și uzura cea mai lentă. Dimpotrivă, la jocuri mari, o viscozitate mică a lubrifianților determină formarea unor pelicule cu grosimi insuficiente, mai mici decît 3 h și uneori chiar zero din punct de vedere hidrodinamic.

Aceasta se întîmplă cînd $\theta_0{}^* < \Delta\theta^*$ și cînd θ^* schimbînd periodic de semn, trece prin $\theta^* = 0$ și $\cos\theta^* = \alpha = 1$, de unde $\delta_2 = \Delta(1-\alpha) = 0$.

În realitate, cînd calculul hidrodinamic indică $\delta_2 = 0$, pe suprafețele de fiecare mai rămîn straturi foarte subțiri, puternic adsorbite, care împiedică con-

tactul metal-metal şi consecinţa corespunzătoare: topirea. De aceea, accidentele care urmează lipsei de ungere nu apar cu promptitudinea pe care ar indica-o calculul, fără ca prin aceasta să scadă valoarea concluziei teoretice. În zona limită, fenomenele trec doar în domeniul onctuozităţii, unde guvernează alte legi. Aceste legi, deşi sînt cunoscute calitativ, nu permit încă concluzii sau caracterizări cantitative.

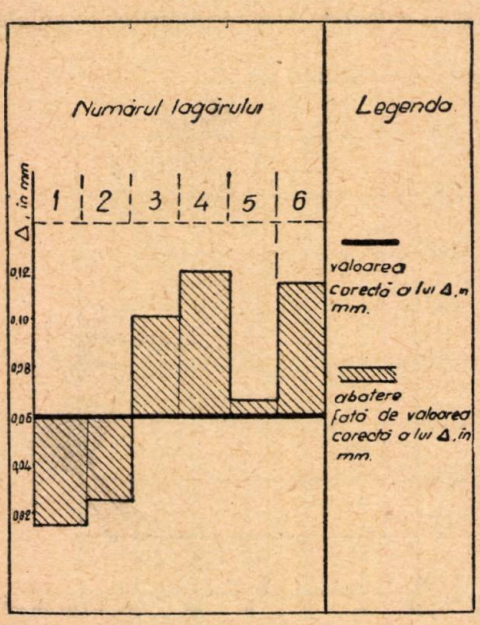


Fig. 4. — Jocurile iniţiale ale lăgarelor de bielă de la motorul experimentat.

Rezumînd cele de mai sus, putem formula următoarele concluzii teoretice:

1. Utilizarea uleiurilor din grupe inferioare echivalează cu utilizarea unor uleiuri mai fluide la temperatura de regim şi mai vîscoase la temperatura de pornire.

2. Uleiurile fluide prezintă avantaje importante faţă de uleiurile vîscoase dacă sînt utilizate corect, ele asigurînd:

— uzuri mai lente
— reducerea pierderilor de energie pentru frecare
— temperaturi de regim mai joase
— circulaţie mai uşoară
— consum de combustibil mai mic.

3. Uleiurile din grupe inferioare, la viscozităţi de regim egale, pot fi utilizate numai la temperaturi la care debitul pompei nu scade periculos sub valoarea minimală.

4. Ungerea la sistemul cilindru-piston se face mai bine cu uleiurile fluide decît cu cele vîscoase, prin pulverizarea mai fină şi accesul mai uşor al primelor uleiuri.

5. Consumul uleiurilor fluide şi din grupe inferioare — pentru completare şi înlocuire — nu trebuie să difere apreciabil la motoarele în bună stare tehnică.

6. Uleiurile fluide sau cele din grupe inferioare pot fi utilizate în condiţiile de la punctul 3, la motoare ale căror jocuri radiale nu depăşesc o anumită valoare (de exemplu, pentru motorul ZIS 120, $\Delta < 0{,}1$ mm).

Tabloul nr. 4

Cuzinet de bielă nr.	1	2	3	4	5	6
Jocuri iniţiale în mm	0,015	0,0275	0,103	0,120	0,067	0,115
Comportarea în timpul experimentării	Topit înlocuit	Deformat, înlocuit	Uzat excesiv, topit	Uzat excesiv, înlocuit	Uzat moderat	Uzat excesiv

Aceste concluzii teoretice, interesante din punct de vedere practic, au căpătat şi o confirmare directă cu ocazia experimentării care s-a făcut de către Institutul de mecanică aplicată pentru Ministerul Transporturilor Navale şi Aeriene, beneficiar direct fiind Întreprinderea regională a transporturilor auto.

Această întreprindere a pus la dispoziție un autocamion ZIS 120, care a fost ținut în exploatare cu uleiurile 106/4 și 108/5,7 (uleiuri auto) din luna octombrie 1953 pînă în luna mai 1954, în care timp a parcurs aproximativ 10 000 km.

În cursul acestei experimentări s-a dovedit că jocurile inițiale incorecte, prea mici sau prea mari, dau uzuri exagerate, (tabloul nr. 4 și fig. 4, 5 și 6).

La temperaturile joase din timpul iernii, ungerea sistemului cilindru-piston este cu totul insuficientă, rezultînd o uzură caracteristic mecanică (fig. 7), din care lipsește manifestarea fenomenelor de coroziune (forma de butoi) sau manifestarea onctuozității insuficiente a uleiului (formă de clopot răsturnat).

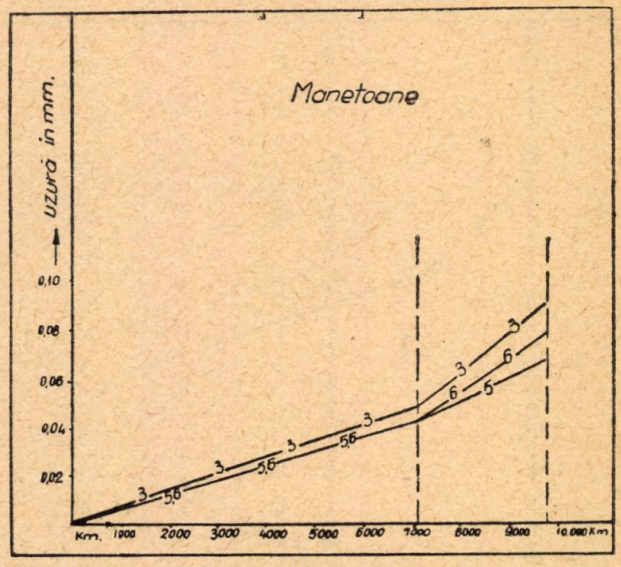


Fig. 5. — Curba uzurii manetoanelor 3, 5 și 6.

Temperaturile minime din perioada experimentării au fost mult inferioare (fig. 8) celor la care se putea asigura pornirea în bune condiții a motorului, rezultînd de fiecare dată o funcționare îndelungată cu motorul lipsit total de ungere și cu piesele de mare uzură supraîncălzite.

Din punct de vedere chimic, stabilitatea acestor uleiuri s-a dovedit satisfăcătoare, pistoanele rămînînd curate în tot timpul experimentării (fig. 9), ca și segmenții ale căror fante erau complet libere (fig. 10).

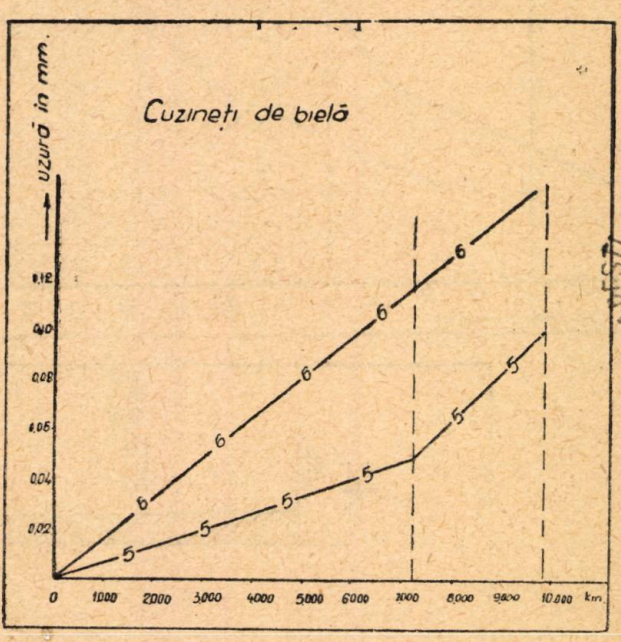


Fig. 6.—Curba uzurii cuzineților de bielă 5 și 6.

Aceste concluzii erau de acord și cu observațiile mai vechi făcute cu ocazia unei experimentări efectuate în cadrul Ministerului Energiei Electrice și Industriei Electrotehnice. Totuși, concordanța între concluziile teoretice și observațiile practice nu puteau oferi o siguranță perfectă, puținele rezultate practice obți-

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

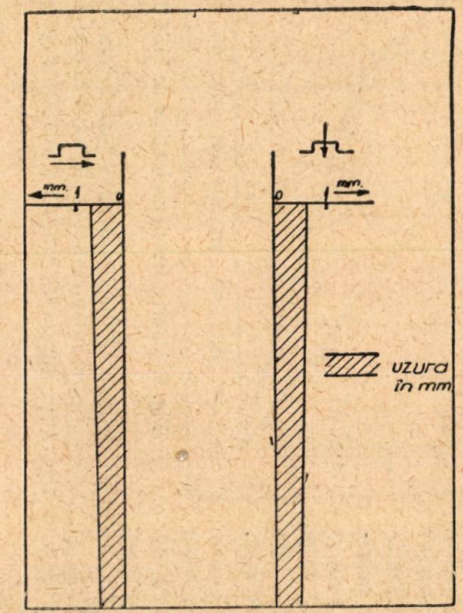


Fig. 7. — Uzura cilindrilor (valori medii). Stînga: paralel cu arborele cotit. Dreapta: perpendicular pe arborele cotit.

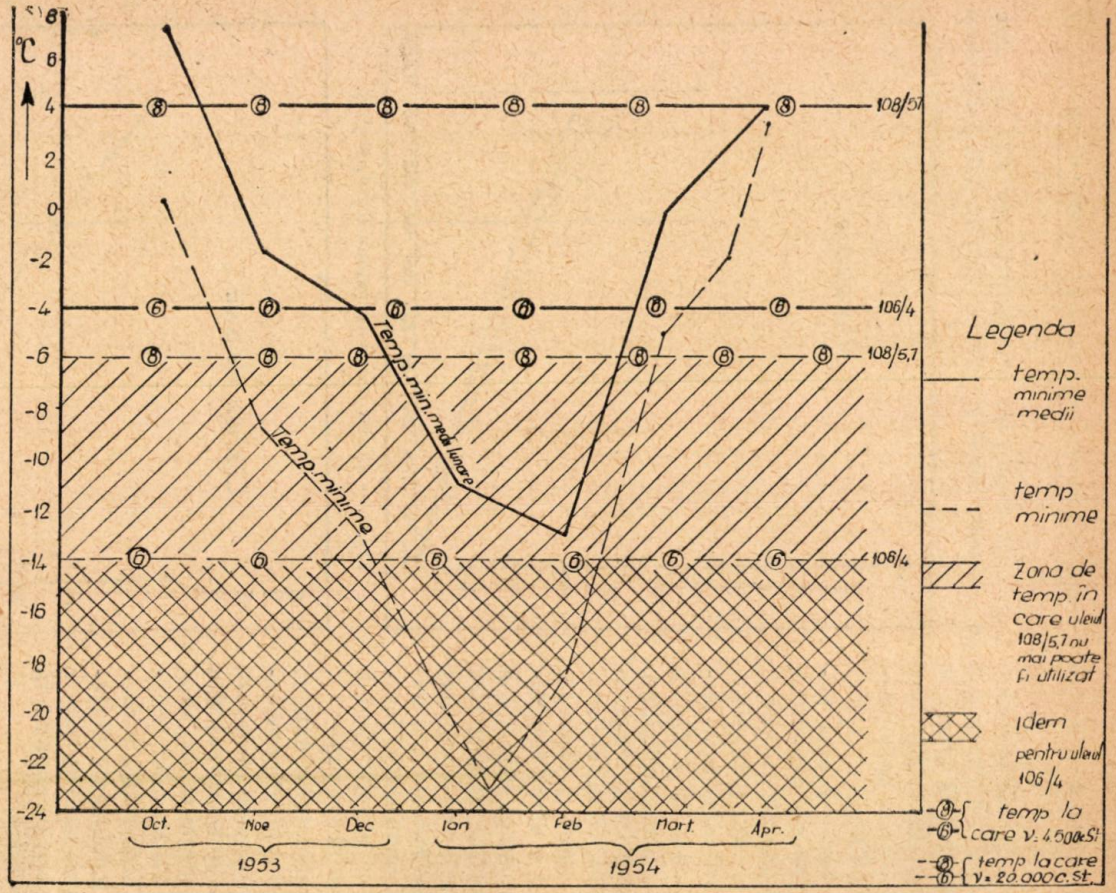


Fig. 8. — Domeniul temperaturilor de utilizare a uleiurilor auto şi temperaturile ambiante minime în perioada experimentării.

Fig. 9. — Suprafaţa laterală a pistoanelor a rămas curată şi canalele de segmenţi libere

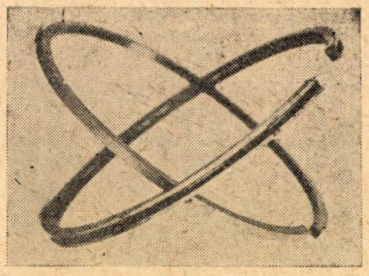


Fig. 10. — Segmenţii de compresie au rămas curaţi iar canalele segmenţilor de ungere complet libere.

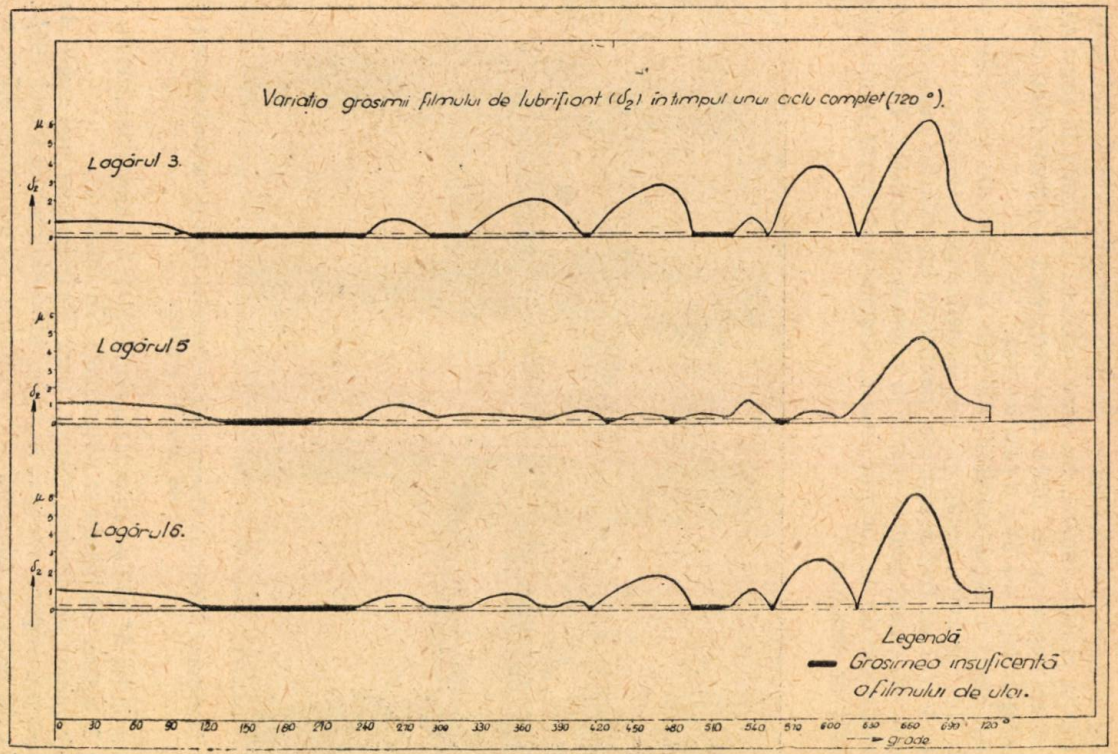


Fig. 11. — Diagramele lui δ_2 pentru lagărele 3, 5 şi 6.

nute, putîndu-se datora coincidenţelor. În plus ecuaţiile lubrificaţiei, care au fost folosite în cursul acestor lucrări, nu erau suficient verificate în practică.

Pentru a se obţine o verificare mai categorică a concluziilor obţinute cu ajutorul acestor ecuaţii, s-a ales o cale inversă.

În ultima etapă a experimentării, din cele 6 lagăre ale motorului, lagărele 1, 2 şi 4 au fost înlocuite, rectificîndu-se manetoanele respective.

Lagărele 3 şi 6 au fost menţinute, pentru că jocurile lor depăşeau valorile maxime admise de calcul pentru ungere în regim hidrodinamic. Lagărul 5 a fost menţinut pentru că de la început fusese dimensionat corect şi nu suferise în exploatare nici un neajuns.

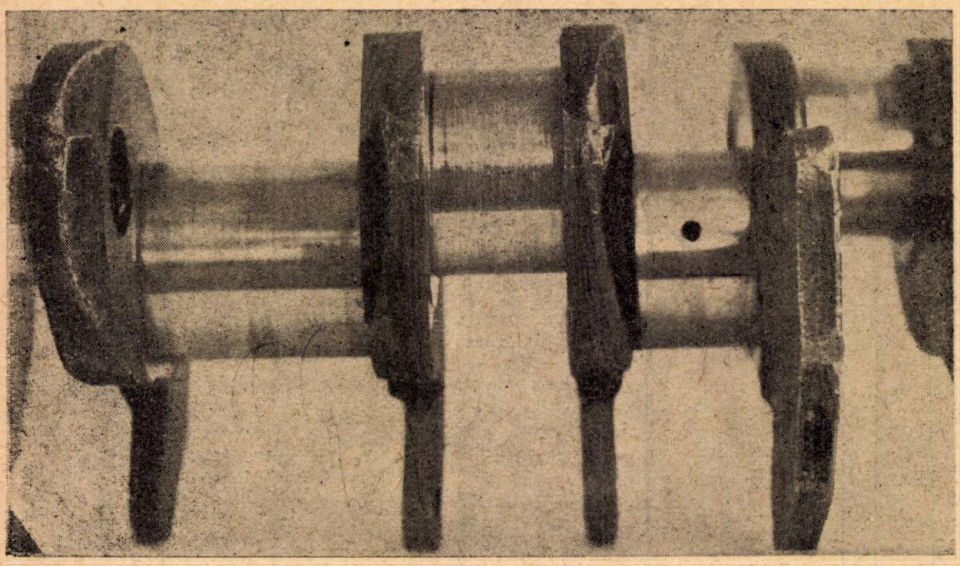


Fig. 12. — Manetonul 3 (centru). Corespunde cuzinetului topit şi prezintă semne evidente ale avariei suferite.

Din ecuaţia lui θ^* (3′) s-a calculat variaţia lui δ_2 în timpul unui ciclu motor, pentru cele 3 lagăre, obţinîndu-se diagramele din figura 11.

În conformitate cu datele obţinute, toate lagărele erau mai uzate decît era admisibil pentru a asigura o ungere în regim hidrodinamic cu uleiul 106/4. Socotind că pelicula puternic aderentă are o grosime de maximum 0,2 μ şi că sub aceasta valoarea se trece în regim onctuos-critic, s-a calculat timpul cît cele 3 lagăre funcţionează în condiţii de ungere insuficientă, respectiv:

pentru lagărul nr. 3 ..... 44% din timp
pentru lagărul nr. 5 ..... 15% din timp
pentru lagărul nr. 6 ..... 36% din timp

Dacă ecuaţiile lubrificaţiei erau corecte şi dacă concluziile formulate erau juste, urma ca într-un răstimp relativ scurt să se obţină o topire a lagărului nr. 3 şi o uzură intensă a lagărului nr. 6, iar lagărul nr. 5 trebuia să reziste.

Deşi această prezicere de topire a lagărului nr. 3 părea neobişnuită atîta vreme cît pompa de ulei funcţiona bine şi presiunea indicată de manometru era corectă, totuşi era perfect justificată de consideraţiile teoretice expuse.

Cu toate că s-au luat toate măsurile ca punerea în exploatare să se facă în condiții cît mai ușoare, cu un rodaj prealabil de 800 km al noilor cuzineți și cu o încărcare parțială a autocamionului, după un parcurs de ~2 500 km, autocamionul experimental s-a reîntors remorcat, cu o puternică bătaie la motor.

La demontare s-a constatat:

— lagărul nr. 3 ..... topit
— lagărul nr. 5 ..... uzat dar în bună stare
— lagărul nr. 6 ..... uzat grav.

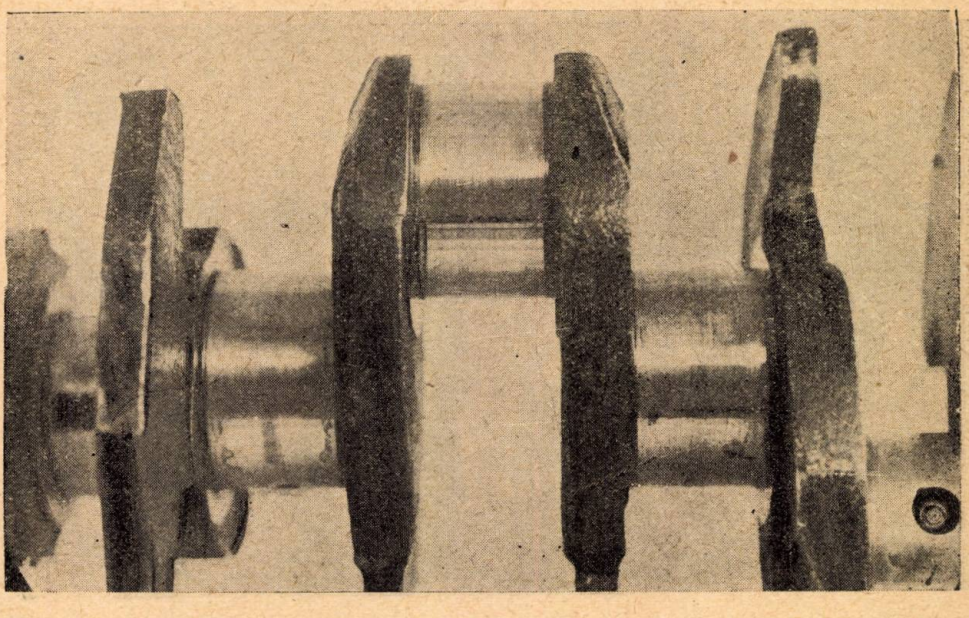


Fig. 13. — Manetonul 5 (centru). Deși nu a fost rectificat niciodată în cursul experimentării, a prezentat o suprafață curată și netedă.

În afară de acest rezultat final, care verifică în mod concret valabilitatea ecuațiilor lubrificației [6], [7] elaborate anterior în cadrul Institutului de mecanică aplicată și confirmă corectitudinea ipotezelor făcute, pe manetoanele celor trei lagăre s-a mai putut urmări eficacitatea procesului de ungere exact așa cum rezulta teoretic.

Manetonul nr. 3 (fig. 12) nu prezenta nimic semnificativ. Urmele de gripare corespundeau în mod firesc situației acestui lagăr, al cărui cuzinet a fost găsit topit. În schimb celelalte două manetoane prezentau un interes deosebit, prin aceea că suprafața manetonului 5 (fig. 13) prezenta o oglindă aproape perfectă, în timp ce suprafața manetonului 6 (fig. 14) prezenta urmele ungerii imperfecte pe care teoria o indică. Deosebirile constatate, în absența oricăror indicații de procese accidentale, au furnizat o puternică confirmare experimentală a teoriei lubrificației, atît de neglijată în practica construcției de mașini.

CONCLUZII

În ultima vreme, s-a manifestat un interes deosebit pentru utilizarea uleiurilor din grupe inferioare (grupa 100 cu raport de viscozitate — STAS 743 — 49 — ca lubrifianţi pentru autovehicule.

Problema se reduce în ultimă instanţă la utilizarea unor uleiuri mai vîscoase la pornire şi a unor uleiuri mai fluide la regim. Aceasta impune stabilirea unei temperaturi minime de pornire pentru fiecare ulei. În cazul dat se indică:

pentru uleiul 106/4 ..... temp. minime — 2,5°C
pentru uleiul 108/5,7 ..... temp. minime + 2,5°C
pentru uleiul 118/8,6 ..... temp. minime + 15°C

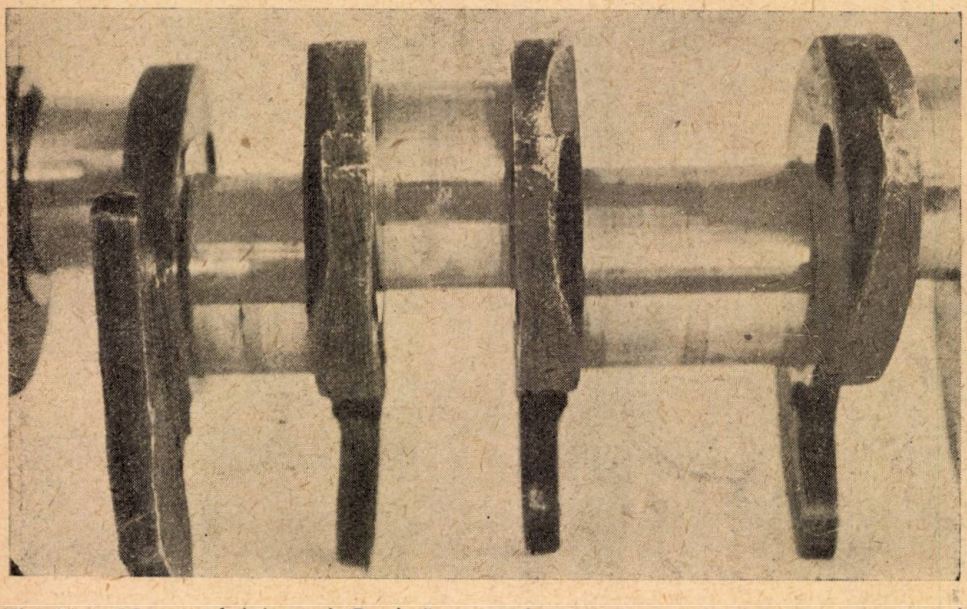


Fig. 14. — Manetonul 4 (centru). Prezintă o suprafaţă pătată şi urme de frecare uscată deşi a funcţionat mai puţin de 3000 km de la ultima rectificare.

În mod corespunzător, considerînd că autovehiculele sînt garate în locuri neîncălzite, lunile în care aceste uleiuri pot fi folosite sînt:

pentru uleiul 106/4 ..... martie-noiembrie
pentru uleiul 108/5,7 ..... aprilie-octombrie
pentru uleiul 118/8,6 ..... iunie-septembrie

În ceea ce priveşte utilizarea uleiurilor fluide, cercetarea a arătat teoretic şi practic că factorul determinant îl constituie jocurile ansamblurilor de frecare, respectiv gradul lor de uzură. In mod corespunzător, uleiurile din grupe inferioare pot fi utilizate numai la autovehicule cu jocuri mici, noi sau imediat după ieşirea din reparaţie.

În ultima parte, cercetarea a cuprins o încercare de verificare a instrumentului teoretic folosit şi a ipotezelor făcute.

Rezultatul încercării finale a confirmat valabilitatea ecuaţiilor lubrificaţiei elaborate anterior în cadrul Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. [6], [7] şi a dat suportul experimental necesar concluziilor generale prezentate.

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СМАЗОЧНЫХ МАСЕЛ НИЗШИХ СТАНДАРТНЫХ СОРТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Особый интерес вызвал вопрос об использовании для смазки моторов масел низших сортов, вместо масел высших сортов, в коих ощущается недостаток вследствие увеличения существующего парка машин.

Вопрос этот имеет некоторые особые стороны, на которые общее решение вопроса не может быть распространено. Авторы все же указывают, что в допустимых условиях эксплоатации использование предложенных масел (группа 100 по вязкости) не представляет опасности.

Вопрос этот имеет также некоторые общие стороны, допускающие его решение в общем смысле. Эти стороны вопроса касаются вязкости смазочных масел. В этом отношении авторы указывают, что существует предел пусковой температуры, зависящий от окружающих условий, и предел вязкости, зависящий от износа подвергающихся трению деталей.

Исследование, при котором впервые использованы на практике уравнения процесса смазки, ранее выработанные Институтом прикладной механики Академии РНР, дало возможность основательно проверить эти уравнения и подтвердило их применение.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Диаграмма полезного действия насосов с шестернями.

Рис. 2. — Диаграмма сил, действующих на кривошип. Пунктир — кривая, построенная при помощи ряда Фурье.

Рис. 3. — Минимальная вязкость смазки в зависимости от зазора подшипников шатуна в моторе ЗИС-120.

Рис. 4. — Первоначальные зазоры подшипников шатуна испытываемого мотора.

Рис. 5. — Кривая износа кривошипов 3, 5 и 6.

Рис. 6. — Кривая износа вкладышей шатунов 5 и 6.

Рис. 7. — Износ цилиндров (средние значения). Слева — параллельно коленчатому валу. Справа — перпендикулярно коленчатому валу.

Рис. 8. — Пределы рабочих температур автомобильных масел и минимальные окружающие температуры в период проведения опытов.

Рис. 9. — Боковая поверхность поршней осталась чистой и канавки поршневых колец свободными.

Рис. 10. — Компрессионные кольца остались чистыми, а канавки смазочных колец совершенно свободными.

Рис. 11. — Диаграмма изменения толщины пленки смазочного масла (δ_2) во время одного цикла, составленная для подшипников 3, 5 и 6.

Рис. 12. — Кривошип 3 (центральный), соответствующий расплавившемуся вкладышу, представляет явные признаки повреждения.

Рис. 13. — Кривошип 5 (центральный). Несмотря на то, что во время опыта ни разу не шлифовался, он имеет чистую и гладкую поверхность.

Рис. 14. — Кривошип 4 (центральный). Поверхность пятнистая со следами трения без смазки, несмотря на то, что пройдено меньше 3000 км после последней шлифовки.

QUELQUES ASPECTS DE L'UTILISATION DES HUILES LUBRIFIANTES DES GROUPES « STANDARDISÉS INFÉRIEURÉS »

(RÉSUMÉ)

Des considérations spéciales ont soulevé le problème de l'utilisation à la lubrification des moteurs, des huiles appartenant aux groupes inférieurs au lieu des huiles des groupes supérieurs, devenues insuffisantes par suite de l'augmentation du nombre des voitures.

Le problème comporte certains aspects particuliers qui ne se prêtent pas à une solution générale. Cependant, dans les conditions d'exploitation admises, on indique que les huiles proposées (groupe 100 à rapport de viscosité) peuvent être utilisées sans danger.

Le problème présente également certains aspects généraux qui sont susceptibles d'une solution générale. Ces aspects ont trait aux propriétés de viscosité des lubrifiants. A ce point de vue, on indique qu'il y a une limite de la température au démarrage, en fonction des conditions ambiantes et une limite de viscosité, en fonction de l'usure des pièces de frottement.

Les recherches qui ont appliqué pour la première fois à un cas pratique les équations de la lubrification, élaborées antérieurement à l'Institut de mécanique appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, ont apporté une bonne vérification ainsi qu'une confirmation de ces équations.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Diagramme du rendement des pompes à engrenages.

Fig. 2. — Diagramme des efforts auxquels le maneton est soumis. En pointillé: la courbe reconstituée à l'aide de la série Fourier.

Fig. 3. — Le minimum de viscosité du lubrifiant, en fonction du jeu des paliers de bielle du moteur ZIS-120.

Fig. 4. — Le jeu initial des paliers de bielle du moteur en expérience.

Figl 5. — Courbe de l'usure des manetons 3, 5 et 6.

Fig. 6. — Courbe de l'usure des coussinets de bielle 5 et 6.

Fig. 7. — Usure des cylindres (valeurs moyennes). A gauche, parallèlement au villebrequin; à droite, perpendiculairement au même.

Fig. 8. — Le domaine des températures d'emploi des huiles d'auto et les températures ambiantes minimes pendant la période d'expérimentation.

Fig. 9. — La surface latérale des pistons est demeurée nette et les canaux des segments de graissage, complétement libres.

Fig. 10. — Les segments de compression sont demeurés nets et les canaux des segments de graissage, complétement libres.

Fig. 11. — Diagramme des variations de l'épaisseur de la pellicule de lubrifiant (δ_2) au cours d'un cycle moteur, pour les paliers 3, 5 et 6.

Fig. 12. — Le maneton 3 (centre). Il correspond au coussinet fondu et présente des signes évidents de l'avarie subie.

Fig. 13. — Le maneton 5 (centre). Bien que n'ayant jamais été rectifié au cours de l'expérimentation, il présente une surface lisse et nette.

Fig. 14. — Le maneton 4 (centre). Présente une surface tachée et des traces de frottement sec, bien qu'il n'ait fonctionné que moins de 3000 km depuis la derniere rectification.

BIBLIOGRAFIE

1. S. E. Krein, I. S. Zaslavski și N. P. Voinov, *Smazocinoe maslo i dvigateli.* Gostoptehizdat, Moscova, 1952.
2. N. P. Voinov, *Trenie i iznos v mașinah.* Moscova, 1949.
3. G. Kramarenko și A. Salov, *Vlianie cacestva masla na pe stepeni iznosa dvigateli ZIS 120.* Avtomobili, 1949, nr. 11.
4. K. K. Papok și E. G. Semenido, *Motornîe topliva, masla i jidcosti.* Moscova, 1953, vol. II.
5. A. Georgi, *Motor Oils and Engine Lubrication.* New-York, 1951.
6. N. Tipei, *Considerații asupra calculului lagărelor prin alunecare.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe tehnice și chimice, t. IV, nr. 3-4, iulie-decembrie 1952, p. 291.
7. N. Tipei, *Calculul lagărelor cu alunecare supuse la forțe variabile.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. IV, 1953, p. 125.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE ŞI TEHNOLOGIE

STUDIU ASUPRA COMPORTĂRII FONTELOR CU GRAFIT NODULAR LA TEMPERATURI ÎNALTE *)

DE

TRAIAN DUMITRESCU, MARIA NICOLAID şi PAMFIL ILIESCU

La temperaturi înalte, fontele cenuşii au o durată de exploatare mică, din cauza deteriorării rapide provocate de oxidare şi creştere. Pe lîngă aceasta, la temperaturi mai mari de 450° C, valorile numerice ale proprietăţilor mecanice ale fontelor cenuşii se micşorează foarte mult.

De aceea, la temperaturi ce depăşesc 500°C, în special atunci cînd pe lîngă acţiunea temperaturii intervin şi solicitări mecanice, întrebuinţarea fontelor cenuşii nu este indicată.

Oxidarea fontelor are loc după legile generale ale coroziunii chimice. Viteza de oxidare creşte exponenţial cu temperatura şi este dependentă de calităţile şi implicit de natura stratului superficial de oxizi.

În general, un strat de oxizi continuu, dens, aderent, stabil din punct de vedere chimic în atmosfera înconjurătoare, şi cu un coeficient de dilatare cît mai apropiat de cel al metalului de bază, frînează procesul de oxidare şi imprimă materialului o bună rezistenţă la oxidare [1], [2], [3], [4], [5].

Creşterea fontelor constă într-o mărire permanentă de volum, care poate atinge, în anumite condiţii, chiar 50% din volumul iniţial. În mod curent creşterea are ca efect dezagregarea materialului [1], [2], [3], [4].

În general, se admite că fenomenul creşterii este cauzat de următorii factori:

Oxidarea internă. Gazele oxidante pătrund de-a lungul lamelelor de grafit şi oxidează materialul înconjurător. Cum oxidul rezultat are un volum mai mare decît al fierului pe contul căruia s-a format, iau naştere tensiuni interne. Acestea, prin acumulare, depăşesc rezistenţa materialului — de altfel destul de mică — şi se elimină prin formarea de mici fisuri, fie în continuarea cavităţilor grafitice, fie în vecinătatea lor.

Aceste fisuri constituie noi căi de acces pentru gazele oxidante şi ca urmare procesul se continuă.

Grafitizarea. În prezenţa siliciului şi grafitului, carbonul combinat se transformă cu uşurinţă în grafit. Această transformare are loc cu o mărire de volum.

*) Lucrare prezentată în manuscris în octombrie 1953.

S-a calculat că, pentru o fontă perlitică cu 1% carbon combinat, creşterea este de 2% [1], [3]. Practic această mărire de volum nu este mare, însă este suficientă pentru a creea tensiuni interne, a reduce compactitatea structurii şi a înlesni pătrunderea gazelor oxidante.

Dintre factorii amintiţi, rolul principal îl joacă oxidarea internă, deoarece, în timp ce descompunerea cementitei este limitată, aceasta se poate continua pînă ce întreaga masă metalică este oxidată.

În plus, la procesul creşterii contribuie, prin formarea de fisuri superficiale şi interne, următorii factori:

— *tensiunile termice* care iau naştere, în mod inevitabil, în cursul încălzirii şi răcirii, mai ales în cazul pieselor de dimensiuni mari.

— *tensiunile interne* care se produc la trecerea prin punctul perlitic, în special la treceri repetate, ca urmare a transformărilor structurale care au loc cu variaţie de volum.

— *tensiunile interne* rezultate prin dilatarea gazelor ocluse şi a gazelor produse prin oxidarea grafitului.

Avînd în vedere cele expuse, reiese că, pentru a mări rezistenţa la creştere a fontelor, este necesar:

— a reduce la minimum căile de acces ale gazelor oxidante, constituite de lamelele de grafit.

Aceasta se realizează prin scăderea conţinutului în carbon, prin micşorarea lamelelor de grafit şi prin controlul distribuţiei lor. O altă soluţie constă în înlocuirea completă a carbonului grafitic prin carbon combinat.

— a obţine structuri compacte, prin micşorarea conţinutului în gaze.

— a mări stabilitatea structurală la cald, prin adaosuri de elemente de aliere: crom, mangan, molibden şi vanadiu.

— a suprima transformările structurale prin ridicarea sau coborîrea punctului perlitic, în afara domeniului temperaturilor de utilizare.

— a mări rezistenţa la oxidare a masei metalice, prin aliere cu siliciu, crom, nichel, cupru sau aluminiu.

Stadiul actual al problemei. Fontele care îndeplinesc, în parte sau în întregime, condiţiile de mai sus, pot fi grupate în şase clase, pe care le redăm în cele ce urmează în ordinea comportării la cald [1], [4], [6].

— Prima clasă, şi cea mai simplă, o constituie fontele cu conţinut redus de crom, cu 0,7—1% crom şi cu circa 1,5% siliciu. Aceste fonte au o rezistenţă de rupere la tracţiune de circa 35 kg/mm² şi au o bună comportare la cald pînă la temperatura de 750°C.

Mult mai întrebuinţate sînt fontele aliate cu nichel şi crom, conţinînd 0,6—1% crom şi 2% nichel, deoarece se prelucrează mai uşor decît fontele aliate numai cu crom.

— A doua clasă o constituie fontele albe cu 7—15% crom. Aceste fonte rezistă bine la creştere şi la oxidare pînă la temperatura de 850°C, însă prezintă neajunsul că sînt fragile şi se prelucrează foarte greu.

— A treia clasă include fontele cu 6—9% siliciu. Aceste fonte au o structură feritică, rezistentă la creştere şi la oxidare pînă la 900—950°C. Au capacitate de prelucrare foarte mică şi proprietăţi mecanice reduse, rezistenţa de rupere la tracţiune fiind mai mică de 12 kg/mm².

— A patra clasă cuprinde fontele cu mai mult de 7% aluminiu şi fontele cu aluminiu-siliciu. Au o bună rezistenţă la creştere şi la oxidare pînă la 950—1000°C, însă ca şi cele anterioare, prezintă proprietăţi mecanice reduse şi se prelucrează greu.

— A cincea clasă include fontele austenitice cu nichel, crom şi cupru. O compoziţie tipică este: 2,5% carbon, 2,5% siliciu, 2% mangan, 0,1% fosfor, 15% nichel, 3% crom şi 5% cupru. Aceste fonte rezistă foarte bine la oxidare, la creştere şi în acelaşi timp şi la coroziune chimică. Au o rezistenţă de rupere la tracţiune de circa 30 kg/mm² şi se întrebuinţează în mod curent în intervalul 950—1000°C.

— A şasea clasă o constituie fontele cu 30—35% crom şi cu 1—2% carbon. Structura acestor fonte, foarte stabilă pînă aproape de punctul de topire, constă din carburi de crom repartizate pe un fond de soluţie solidă fier-crom. Aceste fonte rezistă foarte bine la oxidare şi la coroziune chimică, au o rezistenţă de rupere la tracţiune de circa 37 kg/mm² şi se întrebuinţează în mod curent la temperaturi de 950 — 1100°C.

Remarcăm că, în general mărirea rezistenţei la oxidare şi la creştere are loc în dauna capacităţii de prelucrare şi a proprietăţilor mecanice, în special a proprietăţilor legate de plasticitate.

În plus, menţionăm că fontele cu o foarte bună rezistenţă la oxidare şi la creştere, cum este cazul fontelor cu conţinut ridicat în crom, şi mai ales crom-nichel, au un preţ de cost ridicat, datorită atît elementelor de aliere, scumpe şi greu de importat, cît şi cheltuielilor şi dificultăţilor de elaborare.

Fac excepţie fontele aliate cu siliciu şi cele cu aluminiu care au un preţ de cost relativ mic.

Scopul prezentei lucrări. În ultima decadă s-a descoperit şi şi-a făcut loc în practică un nou tip de fontă, fonta cu grafit nodular.

Aceasta se obţine prin tratarea fontei cenuşii cu magneziu, sau cu aliaje pe bază de magneziu.

Fonta cu grafit nodular este cunoscută pînă în prezent ca avînd faţă de fontele cu grafit lamelar, nealiate şi aliate, proprietăţi mecanice mult superioare, ca urmare a formei grafitului, a unui conţinut foarte redus în gaze şi deci corespunzător compactităţii structurale.

Din cele expuse anterior reiese însă în mod clar că atît forma nodulară a grafitului, cît şi compactitatea structurală, sînt indici siguri că fonta cu grafit nodular are o bună rezistenţă la creştere, ca urmare a eliminării posibilităţilor de pătrundere a gazelor oxidante şi de producere a tensiunilor interne, rezultate prin dilatarea gazelor ocluse.

Pe baza acestor considerente, în lucrarea de faţă, ne-am propus a stabili în ce măsură, fontele cu grafit nodular pot să întrunească — în special prin aliere cu siliciu sau mangan — atît proprietăţi mecanice superioare, cît şi o bună rezistenţă la oxidare şi creştere.

Partea întîia

FONTE CU GRAFIT NODULAR ALIATE CU SILICIU

Obţinerea epruvetelor

— *Topirea* s-a făcut într-un cuptor rotativ, cu capacitatea de 1,5 tone, tip « Fulmina », cu injector mixt, cu păcură şi gaz metan, şi cu aer preîncălzit la 300°C.

Încărcătura a constat din 90% fontă hematită, 10% fier vechi şi 10% cocs, cu conţinut mic de sulf şi cenuşă.

Topirea a durat 3 1/2 ore, realizîndu-se la evacuarea din cuptor temperatura de 1450°C. Evacuarea fontei s-a făcut într-o căldare de 2 tone, preîncălzită la 800—900°C.

— *Nodulizarea* s-a făcut, după curăţirea zgurii, în interiorul unei cabine amenajată special. Pentru nodulizare s-a utilizat electron, în proporţie de 1%, care s-a introdus în fontă cu ajutorul unui clopot, cu perforaţii pe suprafaţa laterală.

Clopotul a fost introdus pînă la fundul căldării, prin cădere liberă şi a fost menţinut 60 secunde, cît a durat reacţia electronului.

După terminarea reacţiei, s-a curăţit zgura rezultată, s-a adăugat 0,8% ferosiliciu de 75%, în bucăţi de mărimea alunei, şi s-a amestecat bine.

Durata de la evacuarea fontei din cuptor pînă la sfîrşitul operaţiei de nodulizare a fost de 6 minute.

— *Alierea* s-a făcut cu ferosiliciu de 75% în căldări cu capacitatea de 100 kg. Căldările şi ferosiliciul, sfărîmat în bucăţi de 5—10 mm, au fost preîncălzite pînă la 800—850°C.

Temperatura fontei la aliere a fost de 1320—1330°C.

După umplerea căldărilor, fonta s-a amestecat continuu pentru a uşura topirea ferosiliciului şi a realiza omogenizarea compoziţiei.

Durata totală a alierei a fost de 3 minute.

— *Turnarea.* S-au turnat pentru fiecare compoziţie cîte două epruvete, format treflă, cu ramuri cu diametru de 50 mm şi lungimea 250 mm. Turnarea s-a făcut în forme de nisip uscat.

Temperatura la turnare a fost de 1280—1300°C.

Compoziţiile chimice

În tabloul nr. 1 sînt redate compoziţiile chimice ale fontei ordinare, de la care s-a plecat, şi ale fontelor cu grafit nodular.

Tabloul nr. 1

Nr. crt.	Simbol	Carbon total %	Carbon comb. %	Carbon grafitic %	Siliciu %	Mangan %	Sulf %	Fosfor %	Magneziu %
1	1	3,55	0,69	2,86	2,00	0,56	0,040	0,119	—
2	1_1	3,36	0,72	2,64	2,00	0,56	0,024	0,112	0,12
3	1_2	3,25	0,30	2,95	2,80	0,54	0,024	0,112	0,10
4	1_3	3,00	0,15	2,85	4,25	0,56	0,018	0,110	0,10
5	1_4	2,63	—	2,63	5,04	0,72	0,020	0,105	0,11
6	1_5	2,34	—	2,34	5,65	0,62	0,022	0,114	0,09

Conţinutul în siliciu variază între 2% şi 6%.

Conţinutul în carbon scade pe măsură ce conţinutul în siliciu creşte. Astfel, fonta cu grafit nodular cu 2% siliciu conţine 3,36% carbon, în timp ce fonta cu 5,65% siliciu conţine numai 2,34% carbon.

Scăderea conţinutului în carbon cu creşterea conţinutului în siliciu este un fenomen bine cunoscut, care se datoreşte micşorării solubilităţii carbonului pe măsură ce conţinutul în siliciu creşte, şi segregării carbonului în exces sub formă de grafit, la suprafaţa fontei lichide.

Remarcăm că o scădere a conţinutului în carbon are loc şi în urma tratamentului cu magneziu. Astfel, fonta ordinară are un conţinut de 3,55% carbon,

în timp ce fonta cu grafit nodular, cu acelaşi conţinut în siliciu, are un conţinut de 3,36% carbon.

Conţinutul în carbon combinat se micşorează, în timp ce conţinutul în siliciu creşte. Astfel, pentru 2% siliciu, conţinutul în carbon combinat este 0,72%, iar pentru 5,04% siliciu este zero.

Conţinutul în mangan variază puţin, rămînînd cuprins între 0,56% şi 0,72%.

Conţinutul în sulf al fontei ordinare iniţiale este de 0,04%. După tratamentul cu magneziu, conţinutul în sulf scade în limitele 0,018% — 0,024%, ceea ce reprezintă o desulfurare de 40% — 55%. Acest randament poate fi considerat foarte mare, dacă îl comparăm cu rezultatele obţinute în cazul desulfurării cu CO_3Na_2, întrebuinţat în mod curent pentru desulfurarea fontei, şi dacă ţinem seamă de faptul că fonta avea iniţial un conţinut în sulf foarte mic, 0,04%.

Conţinutul în fosfor variază între 0,105% şi 0,119%.

Magneziu remanent este de ordinul 0,1%.

Microstructurile

În figurile 1 şi 2 sînt redate micrografiile fontei ordinare; iar în figurile 3—12 micrografiile fontelor cu grafit nodular.

Microstructura fontei ordinare constă din lamele de grafit, din ferită, în special în jurul lamelelor de grafit, din perlită, insule rare de eutectic fosforos, şi incluziuni mici şi sporadice de sulfură de mangan.

Lamelele de grafit au o distribuţie uniformă şi lungimi variind între 1 şi 6,5 cm, la mărirea 100.

Deci, este vorba de o fontă cenuşie ferito-perlitică, cu lamele de grafit de tipul A şi mărimea 3, după clasificarea A.F.A.

În figurile 3—12 sînt prezentate micrografiile fontelor cu grafit nodular.

Microstructurile constau din grafit în formă de nodule, din ferită, perlită şi insule rare de eutectic fosforos. Incluziunile de sulfură de mangan, întîlnite în fonta ordinară, nu mai sînt observate nici chiar la măriri puternice.

Din examinarea microstructurilor, se poate constata o influenţă bine determinată a conţinutului în siliciu asupra mărimii şi numărului de nodule de grafit, în sensul că pe măsură ce conţinutul în siliciu creşte, mărimea nodulelor scade, iar numărul lor se măreşte.

In tabloul nr.2, se poate urmări modul cum variază mărimea şi numărul nodulelor de grafit, în funcţie de conţinutul în siliciu.

Tabloul nr. 2

Nr. crt.	Simbol	Siliciu %	Mărimea nodulelor μ	Numărul de nodule pe mm² real
1	l_1	2,00	50	51
2	l_2	2,80	35	96
3	l_3	4,25	30	132
4	l_4	5,04	20	145
5	l_5	5,65	20	162

Nodulele de grafit s-au numărat la mărirea 100, pe un ecran cu o suprafaţă de 100 cm². Datele ce se găsesc în tabloul nr. 2 reprezintă cifra medie pentru 5 cîmpuri microscopice distincte.

Este demn de remarcat că nodulele de grafit au o distribuţie ordonată şi nu una întîmplătoare.

Din figurile 3, 5, 7, 9 şi 11 se vede în mod clar că nodulele de grafit sînt astfel distribuite, încît delimitează perfect nişte grăunţi, cu forme mai mult sau mai puţin poligonale.

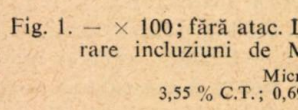


Fig. 1. — × 100; fără atac. Lamele de grafit, rare incluziuni de MnS.

Fig. 2. — × 100; atac nital 2%. Lamele de grafit, ferită, perlită puțin evtectic forforos.

Microstructurile fontei ordinare 1
3,55 % C.T.; 0,69 % C.C.; 2 % Si; 0,56 % Mn; 0,04 % S; 0,119% P.

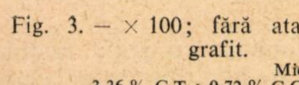


Fig. 3. — × 100; fără atac. Nodule de grafit.

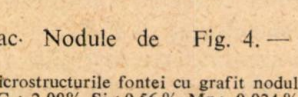


Fig. 4. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit, ferită și perlită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 1_1
3,36 % C.T.; 0,72 % C,C.; 2,00% Si ; 0,56 % Mn; 0,024 % S; 0,112 % P; 0,12 % Mg.

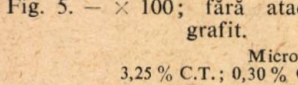


Fig. 5. — × 100; fără atac. Nodule de grafit.

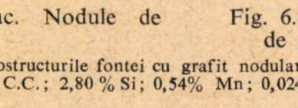
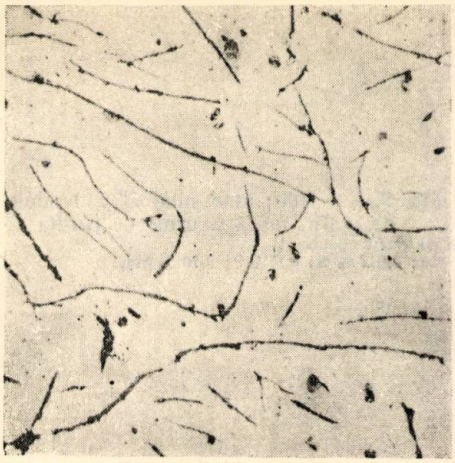


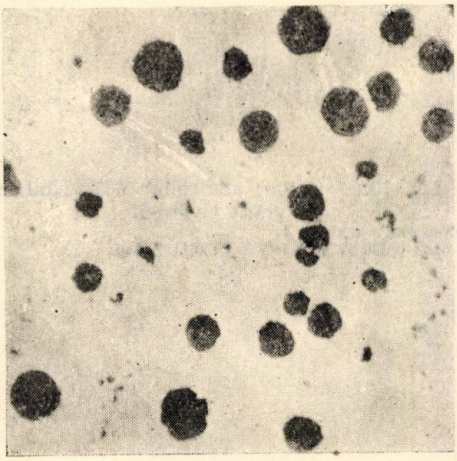
Fig. 6. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit, ferită și perlită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 1_2
3,25 % C.T.; 0,30 % C.C.; 2,80 % Si; 0,54% Mn; 0,024 % S; 0,112 % P; 0,10 % Mg.



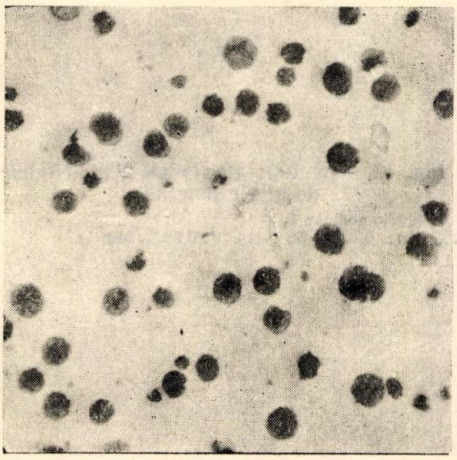
1

2

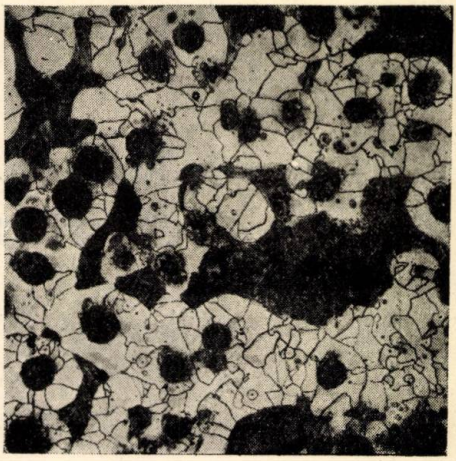


3

4



5



6

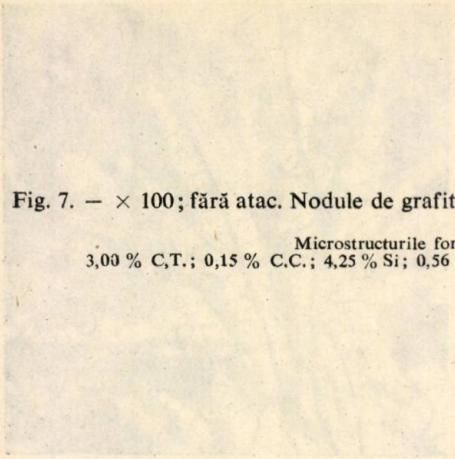


Fig. 7. — × 100; fără atac. Nodule de grafit.

Fig. 8. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit, ferită şi urme de perlită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 1_3
3,00 % C,T.; 0,15 % C.C.; 4,25 % Si; 0,56 % Mn; 0,018 % S; 0,11% P; 0,10 % Mg.

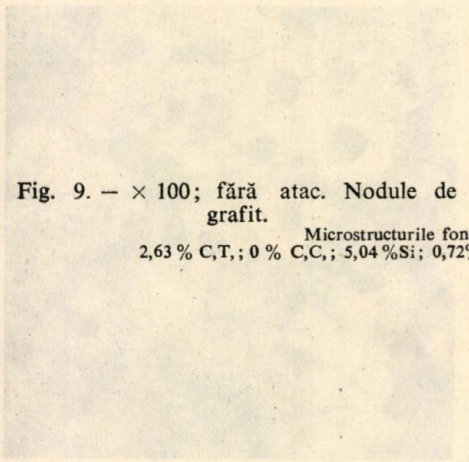


Fig. 9. — × 100; fără atac. Nodule de grafit.

Fig. 10. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit şi ferită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 1_4
2,63 % C,T,; 0 % C,C,; 5,04 %Si; 0,72% Mn; 0,020 % S; 0,105 % P; 0,11 % Mg.

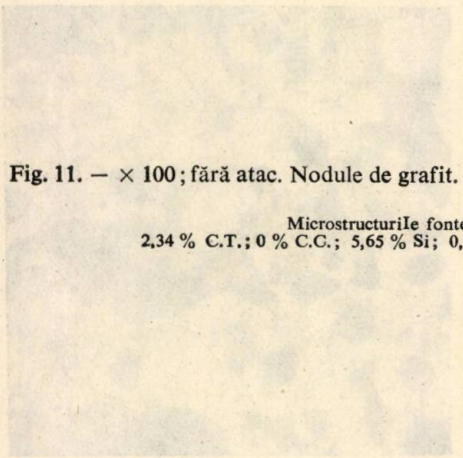
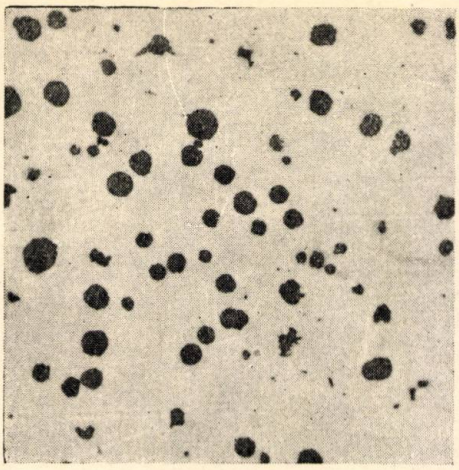


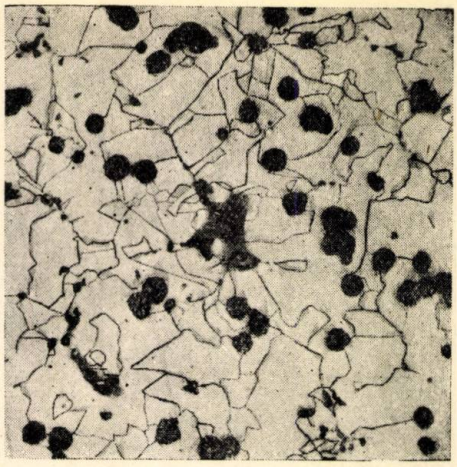
Fig. 11. — × 100; fără atac. Nodule de grafit.

Fig. 12. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit şi ferită.

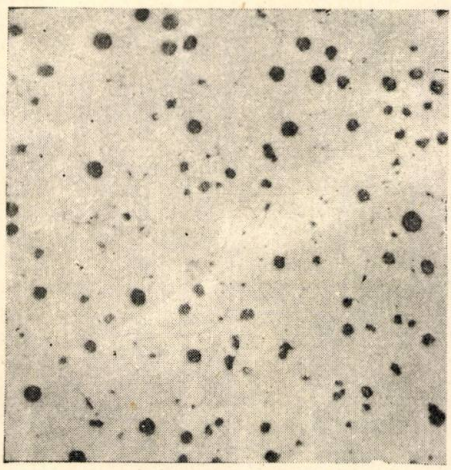
Microstructurile fontei cu grafit nodular 1_5
2,34 % C.T.; 0 % C.C.; 5,65 % Si; 0,62% Mn; 0,022% S; 0,114, P; 0,09 % Mg.



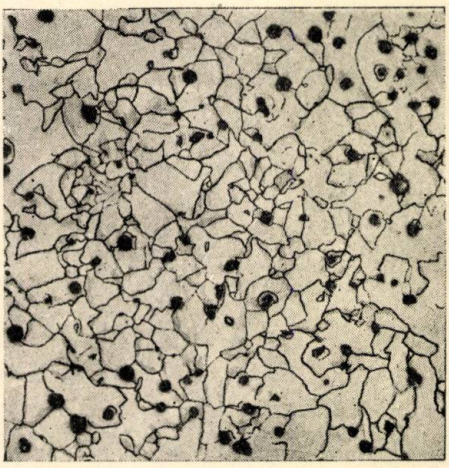
7



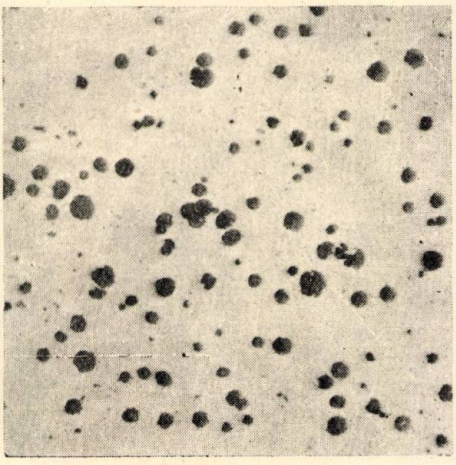
8



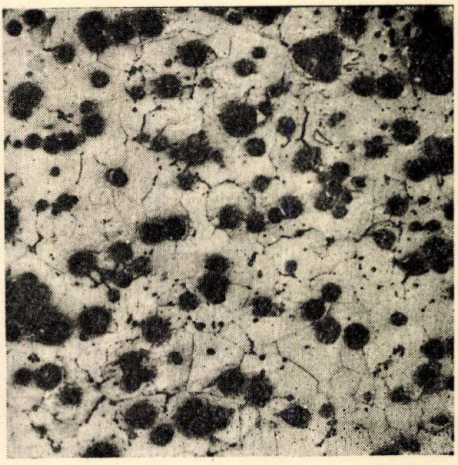
9



10



11



12

Pentru o compoziţie dată, mărimea acestor grăunţi variază relativ puţin. În schimb, pentru conţinuturi crescînde de siliciu, mărimea grăunţilor scade în mod apreciabil.

După părerea noastră, nu poate fi vorba de altceva, decît de grăunţii de austenită, a căror mărime pare a fi determinată de numărul nodulelor de grafit.

Din examinarea micrografiilor din figurile 4, 6, 8, 10 şi 12, se constată că, pe măsură ce conţinutul în siliciu creşte, se măreşte cantitatea de ferită pe contul perlitei. Astfel, la 2% siliciu cantitatea de perlită este de circa 80%, la 4,25% siliciu, perlita ajunge la urme, iar la 5% siliciu, structura constă numai din cristale de ferită şi nodule de grafit.

Observăm, în plus, că perlita din fontele cu grafit nodular este mult mai fină decît perlita din fonta ordinară şi că îşi menţine fineţea, chiar la un conţinut ridicat în siliciu.

Remarcăm, de asemenea, că structura fontelor cu grafit nodular, în comparaţie cu cea a fontei ordinare, este foarte compactă, fiind complet lipsită de goluri de gaze. Această caracteristică este o consecinţă a faptului bine cunoscut, că în cursul tratamentului cu magneziu are loc o puternică degazeificare a fontei.

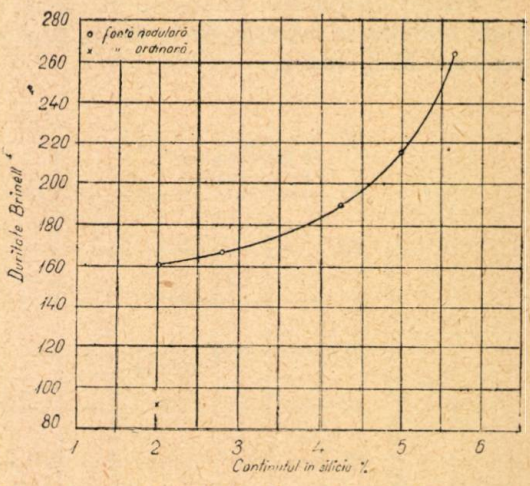


Fig. 13. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra durităţii.

Proprietăţile mecanice

Încercările mecanice s-au efectuat, atît pentru fonta ordinară, cît şi pentru fontele cu grafit nodular, pe epruvete în stare brută de turnare.

Epruvetele s-au confecţionat din jumătăţile ramurilor de treflă, astfel că axul lor s-a plasat la jumătate din raza acestora.

Duritatea. S-a determinat duritatea Brinell — bilă de 10 mm, sarcină de 3000 kg şi durata de menţinere 30 secunde — pe eşantioane paralelipipedice de 25/25/50 mm tăiate din capătul inferior al barelor turnate, la 25 mm de la margine. Suprafeţele pe care s-a determinat duritatea au fost în prealabil bine lustruite şi au corespuns, în toate cazurile, cu secţiunea transversală a barelor turnate.

În figura 13 se redă duritatea fontei ordinare şi variaţia durităţii fontelor cu grafit nodular în funcţie de conţinutul în siliciu.

Pentru acelaşi conţinut în siliciu, duritatea fontei cu grafit nodular este mai mare decît duritatea fontei ordinare, de aproximativ două ori.

Mărirea conţinutului în siliciu produce creşterea durităţii. Pentru conţinuturi mai mici de 4,5% siliciu, creşterea durităţii este lentă, iar pentru conţinuturi mai mari este mult mai accentuată. Efectul siliciului asupra durităţii este în concordanţă cu efectul siliciului asupra microstructurii, în sensul că, atîta timp cît siliciul contribuie la reducerea cantităţii de perlită, creşterea durităţii este foarte lentă, iar după ce perlita este înlocuită complet de soluţia solidă fier-siliciu, creşterea durităţii este mult mai rapidă.

Rezistenţa de rupere la tracţiune şi alungirea. S-au determinat pe epruvete prelucrate, proporţional scurte, cu diametrul de 10 mm, conform STAS 200—49.

Rezultatele obţinute sînt redate în diagrama din figura 14.

Pentru acelaşi conţinut în siliciu, rezistenţa de rupere la tracţiune a fontei cu grafit nodular este de aproximativ cinci ori mai mare decît aceea a fontei ordinare.

Pentru conţinuturi crescînde în siliciu, rezistenţa la tracţiune a fontelor cu grafit nodular se măreşte, de la 55 kg/mm² pentru 2% siliciu pînă la 66 kg/mm² pentru 5,65% siliciu.

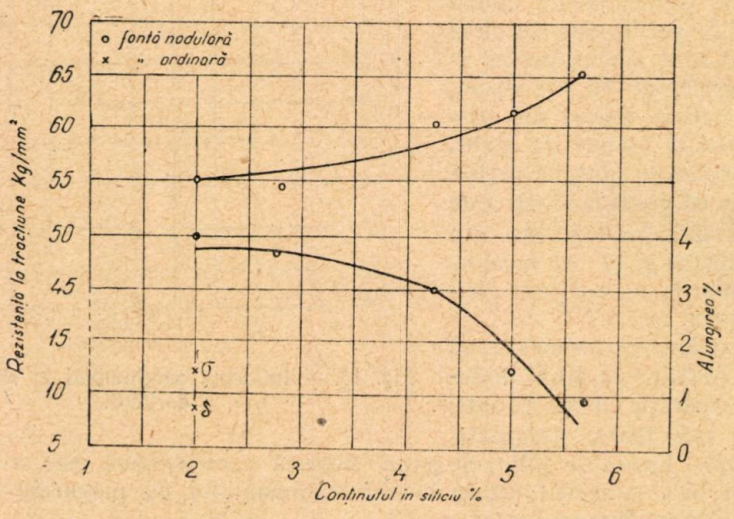


Fig. 14. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra rezistenţei la tracţiune şi asupra alungirii

Alungirea scade cu creşterea conţinutului în siliciu. Scăderea alungirii este moderată pînă la 4,25% Si şi bruscă pentru conţinuturi superioare. Variaţia alungirii cu conţinutul în siliciu este deci în concordanţă cu variaţia durităţii, şi aşa după cum vom vedea mai departe, şi cu variaţia săgeţii.

Rezistenţa de rupere la încovoiere şi săgeata. S-au determinat pe epruvete prelucrate, cu diametrul de 10 mm, conform STAS 1660—50.

Rezultatele obţinute sînt redate în diagrama din figura 15.

Rezistenţa de rupere la încovoiere scade cu creşterea conţinutului în siliciu. Scăderea este lentă pînă la 4,25% Si şi rapidă pentru conţinuturi superioare.

Săgeata creşte foarte puţin pînă la 4,25% Si şi scade brusc pentru conţinuturi în siliciu mai mari de 4,25%.

Modul de variaţie a săgeţii este o confirmare în plus a scăderii bruşte a plasticităţii pentru conţinuturi mai mari de 4,25 — 4,50% siliciu.

În figura 16 se arată aspectul epruvetelor supuse la încovoiere. Se poate urmări variaţia săgeţii în funcţie de conţinutul în siliciu şi deosebirea marcantă între plasticitatea fontei cu grafit nodular şi a fontei ordinare, pentru acelaşi conţinut în siliciu.

Rezilienţa. S-a determinat pe epruvete crestate, conform STAS 1400—50.

Din examinarea diagramei din figura 17 constatăm, că rezilienţa nu este

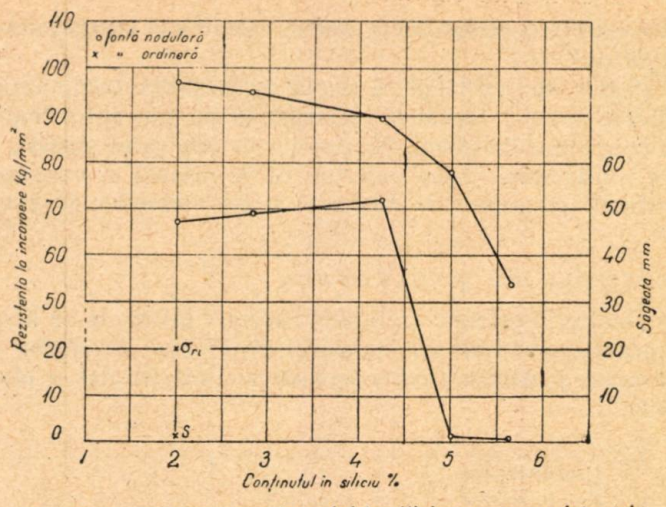


Fig. 15. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra rezistenţei la încovoiere şi asupra săgeţii.

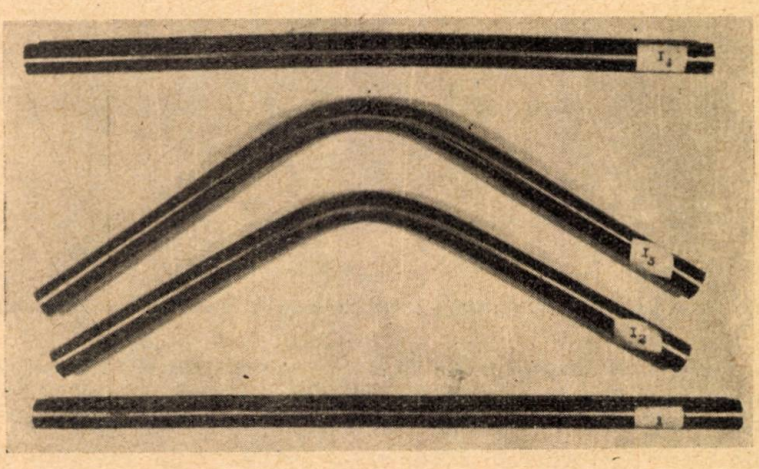


Fig. 16. — Aspectul epruvetelor supuse la încovoiere.

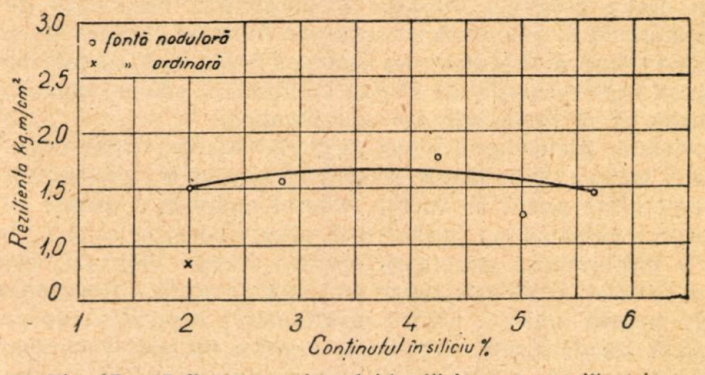


Fig. 17. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra rezilienţei.

influenţată de creşterea conţinutului în siliciu, valoarea ei menţinîndu-se la aproximativ 1,5 kgm/cm².

Era de aşteptat, ca rezilienţa să scadă cu creşterea conţinutului în siliciu.

După părerea noastră, faptul că rezilienţa se menţine aproximativ constantă, indiferent de conţinutul în siliciu, bineînţeles în intervalul studiat, trebuie pus în legătură cu constatarea, făcută anterior, că pe măsură ce conţinutul în siliciu creşte, dimensiunile grăunţilor de austenită şi ale nodulelor de grafit se micşorează.

Capacitatea de prelucrare

S-a determinat prin măsurarea duratei necesare tăierii, la un fierăstrău mecanic, a unei epruvete cilindrice cu diametrul de 15 mm. Presiunea de tăiere s-a menţinut constantă şi pentru fiecare secţiune s-a întrebuinţat o pînză nouă, de aceeaşi calitate.

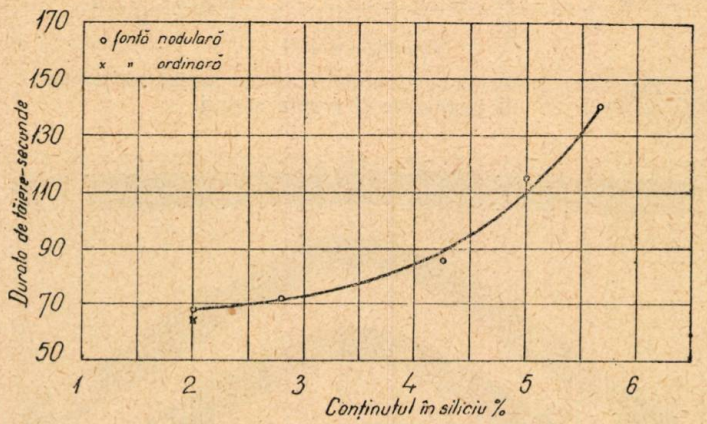


Fig. 18. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra rezistenţei la prelucrare.

Din examinarea diagramei din figura 18 se constată micşorarea capacităţii de prelucrare cu creşterea conţinutului în siliciu, în special pentru un conţinut mai mare de 4% siliciu. Semnalăm, în această privinţă, asemănarea ce există între alura curbei rezistenţei la prelucrare şi alura curbei durităţii, în funcţie de conţinutul în siliciu.

Relaţia dintre creşterea durităţii şi micşorarea capacităţii de prelucrare este bine cunoscută şi este caracteristică atît fontelor cenuşii, cît şi oţelurilor.

Observăm totuşi că, deşi duritatea fontei cu grafit nodular este mult mai mare decît duritatea fontei cenuşii, cu acelaşi conţinut în siliciu, capacitatea de prelucrare a celor două fonte este aproape identică.

Capacitatea de prelucrare a fontei cu grafit nodular, relativ ridicată în raport cu duritatea ei, trebuie atribuită atît formei grafitului, cît şi uniformităţii structurale.

Din acest ultim punct de vedere, efectul nodulizării asupra capacităţii de prelucrare este similar cu cel produs prin alierea fontelor cenuşii. În acest caz, ca urmare a uniformităţii structurale, pentru aceeaşi duritate, capacitatea de prelucrare a fontelor aliate este superioară faţă de aceea a fontelor nealiate.

Întrucît metoda aplicată pentru determinarea capacităţii de prelucrare nu este o metodă standardizată, rezultatele noastre nu pot fi comparate cu cele obţinute de alţi cercetători. Găsim, ca urmare, necesar a face în plus aprecierea,

că fontele cu grafit nodular, chiar pentru conţinutul de 5—6% siliciu, se prelucrează uşor, atît prin tăiere, cît şi prin aşchiere.

Menţionăm, de asemenea, că aspectul suprafeţelor obţinute prin prelucrare este foarte bun şi în general este asemănător cu cel al oţelurilor.

Caracteristicile dilatometrice

Acestea s-au determinat prin trasarea curbelor de dilatare absolută, în intervalul 25 — 900°C, întrebuinţînd un dilatometru cu înregistrare fotografică, tip Leitz Wetzlar.

Viteza de încălzire şi răcire s-a menţinut constantă şi a fost de 2°C/minut pentru intervalul 25—600°C şi de 1,5°C/minut pentru intervalul 600—900°C.

În figurile 19, 20, 21, 22, 23, 24 sînt redate curbele dilatometrice pentru fonta cu grafit lamelar şi fontele cu grafit nodular.

În cazul fontei cu grafit lamelar, în cursul încălzirii, pînă la temperatura de 600°C are loc o dilatare termică obişnuită. Peste temperatura de 600°C, ca urmare a trecerii carbonului combinat în grafit, dilatarea se măreşte. La punctul perlitic, 752°C, perlita şi grafitul încep să se dizolve în austenită şi ca urmare are loc o contracţie. După terminarea transformării structurale, dilatarea termică se continuă.

În cursul încălzirii, în special la temperaturi mai mari de 700°C, gazele oxidante pătrund de-a lungul lamelelor de grafit, produc oxidarea internă a constituenţilor şi ca urmare, are loc o dilatare permanentă a fontei.

Curba dilatometrică ilustrează acest fenomen, prin întoarcerea curbei de răcire pe deasupra curbei de încălzire (fig.19).

În cursul răcirii, dilatarea permanentă se accentuează, ca urmare a depunerii grafitului şi a continuării procesului de oxidare. La punctul perlitic, se adaugă dilatarea produsă în urma transformării austenitei în perlită.

Dilatarea permanentă rezultată se menţine apoi, pînă la temperatura ambiantă, şi aceasta este cunoscută în mod curent, sub denumirea de «*creşterea fontei*».

Între curba de dilatare a fontei cenuşii şi curbele de dilatare ale fontelor cu grafit nodular (fig.19, 20, 21, 22, 23 şi 24), există însă o deosebire esenţială, în sensul că *fontele cu grafit nodular nu mai prezintă o dilatare permanentă ci o contracţie permanentă.*

În ansamblul ei, curba de dilatare a unei fonte cu grafit nodular este asemănătoare cu curba de dilatare a unui oţel carbon.

Faptul că, în urma unui ciclu de încălzire-răcire, fontele cu grafit nodular nu mai prezintă creşterea caracteristică fontelor cenuşii, este în primul rînd un indiciu, că oxidarea fontelor cu grafit nodular, în comparaţie cu oxidarea fontelor cenuşii, se produce într-un mod cu totul deosebit. Aceasta ca urmare, în special a compactităţii structurale, produsă de forma grafitului şi de conţinutul redus de gaze.

Remarcăm de asemenea că, în urma unui ciclu de încălzire-răcire, variaţia dimensională a fontelor cu grafit nodular este cu mult mai mică decît variaţia dimensională a fontelor cenuşii. Astfel, după cum se poate observa din figurile 19 şi 20, pentru acelaşi conţinut în siliciu, creşterea fontei cenuşii este aproximativ de opt ori mai mare decît contracţia fontei cu grafit nodular.

După cum se arată în figura 25, mărirea conţinutului în siliciu are ca efect micşorarea accentuată a contracţiei. Astfel, de la 0,09% pentru 2% siliciu, contracţia scade la 0,01% pentru 5,65% siliciu.

În cazul fontelor cu grafit lamelar, creşterea scade de asemenea cu mărirea conţinutului în siliciu, însă, pînă la 6% siliciu rămîne în valoare absolută mult

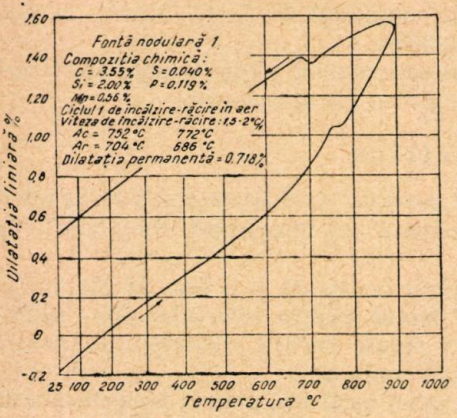


Fig. 19. — Curba dilatometrică a fontei ordinare cu 2% Si.

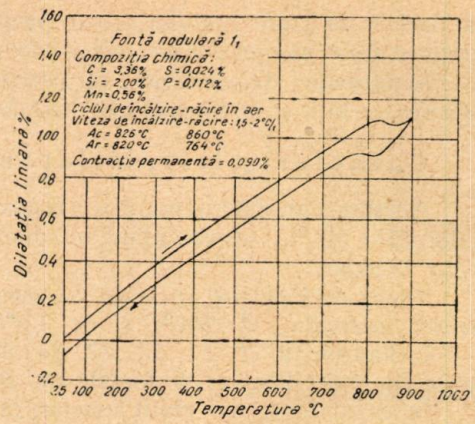


Fig. 20. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 2% Si.

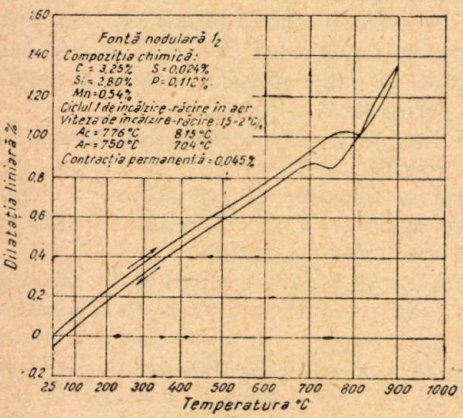


Fig. 21. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 2,8% Si.

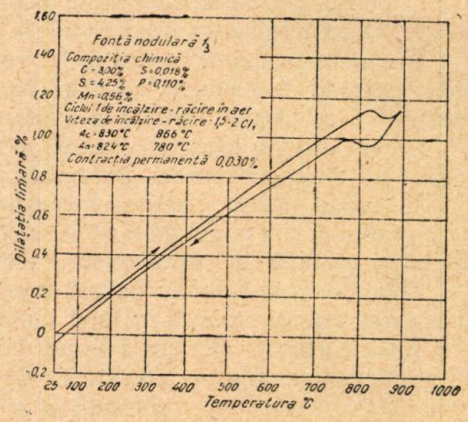


Fig. 22. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 4,25% Si.

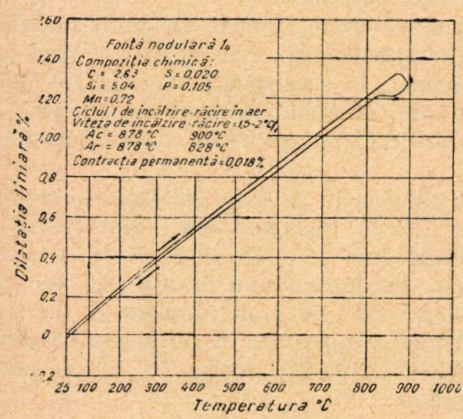


Fig. 23. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 5,04% Si.

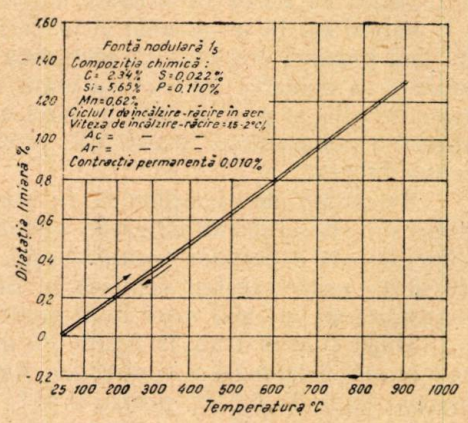


Fig. 24. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 5,65% Si.

mai mare decît contracţia fontelor cu grafit nodular. Astfel, pentru o fontă cu grafit lamelar, cu un conţinut de 4,38% siliciu [3], creşterea este de ordinul 0,19%, adică este de circa 10 ori mai mare decît contracţia fontei cu grafit nodular l_4, cu aproximativ acelaşi conţinut în siliciu.

Menţionăm de asemenea că variaţia dimensională a fontelor cu grafit nodular aliate cu 4,25—5,65% siliciu este mai mică chiar decît variaţa dimensională a celor mai stabile dintre fontele aliate cu aluminiu [5], [7].

Rezultă deci că fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu au o foarte bună stabilitate dimensională la cald.

Din examinarea diagramelor din figurile 19 şi 20 constatăm că, pentru acelaşi conţinut în siliciu, punctul perlitic al fontei cu grafit nodular, atît la încălzire, cît şi la răcire, este mult mai ridicat decît în cazul fontei cu grafit lamelar.

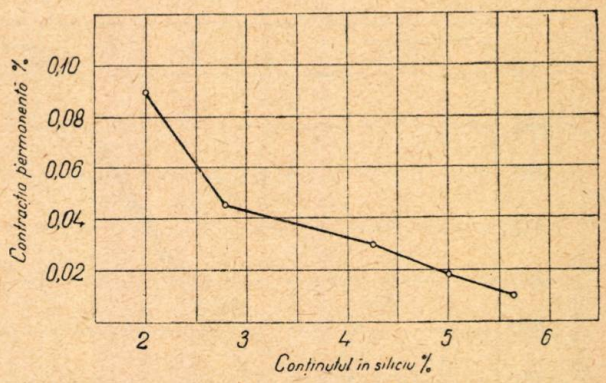


Fig. 25. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra contracţiei permanente a fontelor nodulare.

În ceea ce priveşte influenţa siliciului asupra poziţiei punctului perlitic, se observă la început o coborîre pentru intervalul 2 — 3% siliciu, iar apoi o ridicare continuă, astfel că, la 5,65% siliciu, punctul perlitic se află peste temperatura de 900°C, temperatura maximă de experimentare.

Tabloul nr. 3

Simbolul fontei	1	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
$\alpha . 10^{-6}$ 25°C—700°C	15,1	13,5	13,4	14,0	14,5	13,9
$\alpha . 10^{-6}$ 25°C—900°C	19,6	12,4	15,3	12,9	14,8	14,4

Ridicarea punctului perlitic, ca urmare a măririi conţinutului în siliciu, este un fenomen bine cunoscut şi este comun atît fontelor cu grafit lamelar, cît şi oţelurilor.

În diagrama din figura 26 este redată variaţia poziţiei punctului perlitic la încălzire şi la răcire, respectiv A_c şi A_r, în funcţie de conţinutul în siliciu pentru fontele cu grafit nodular şi punctele A_c şi A_r pentru fonta cu grafit lamelar.

În tabloul nr.3 se găsesc valorile coeficientului de dilatare, în intervale 25—700°C, pentru fontele cu grafit nodular şi fonta cu grafit lamelar.

Constatăm că, pentru acelaşi conţinut în siliciu, fonta cu grafit lamelar are un coeficient de dilatare mai mare decît fonta cu grafit nodular, şi că, pentru intervalul 2—6% siliciu, coeficientul de dilatare al ontei cu grafit nodular variază relativ puţin.

Rezistenţa la oxidare

S-a determinat pe epruvete cilindrice, fin lustruite şi degresate, avînd diametru de 15 mm, înălţime 10 mm şi deci o suprafaţă de 8,24 cm².

În cursul încercărilor, epruvetele au fost introduse în interiorul unor creuzete de porţelan şi menţinute la o anumită înălţime de fundul lor, prin intermediul a două bucăţi de sîrmă, din oţel crom-nichel. Înainte de întrebuinţare, creuzetele au fost calcinate la 1000°C.

Incercările s-au executat la temperaturile 700°C, 850°C, 900°C, 950°C şi 1000°C, într-un cuptor electric cu baghete de silită cu reglaj automat al temperaturii, avînd o mufă cu dimensiunile 500/280/180 mm.

Pentru temperaturile 700°C, 850°C şi 1000°C s-au făcut cîte patru serii de încercări. În prima serie de încercări, durata de menţinere la temperaturile respective a fost de 25 ore. În cea de a doua serie, durata a fost de 75 ore, cu răcire

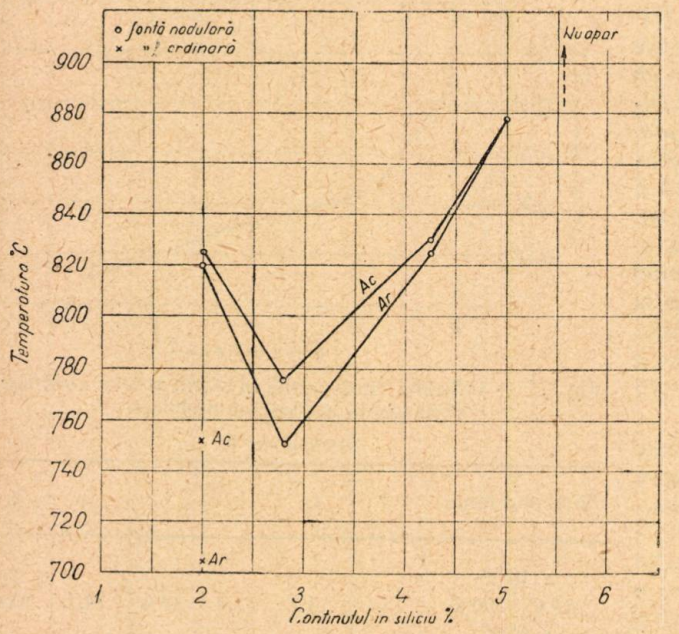


Fig. 26. — Influenţa conţinutului în siliciu asupra poziţiei punctelor de transformare.

după 25 ore. În cea de a treia serie de încercări, durata de menţinere a fost de 150 ore, cu răcire după 25 şi 75 ore, iar în cea de a patra serie de încercări, durata a fost de 220 ore, cu răcire după 25, 75 şi 150 ore.

Pentru temperaturile 900°C şi 950°C, durata de oxidare a fost numai de 75 ore, cu răcire după 25 ore.

În toate cazurile, durata de încălzire pînă la temperatura de oxidare a fost de 3 ore, iar durata de răcire, pînă la temperatura ambiantă, a fost în medie de 12 ore.

Pentru aprecierea rezistenţei la oxidare s-a luat ca măsură creşterea în greutate, ca urmare a acţiunii oxigenului din aer, exprimată în grame pe metru pătrat şi oră, sau în miligrame pe centimetru pătrat.

Datele obţinute sînt redate în tablourile nr. 4, nr. 5, nr. 6 şi nr. 7 şi în diagramele din figurile 27, 28 şi 29 .

Din examinarea datelor prezentate, se constată o dependenţă bine definită a rezistenţei la oxidare de microstructură, de conţinutul în siliciu şi de temperatură.

La temperatura de 700°C, rezistenţa la oxidare a fontei cu grafit nodular —1_1— este de circa 10 ori mai mare decît rezistanţa la oxidare a fontei cu grafit lamelar, cu acelaşi conţinut în siliciu —1—. Această deosebire se micşorează însă, pe măsură ce temperatura, la care are loc oxidarea, creşte.

Micrografiile din figurile 30 şi 31 ilustrează influenţa microstructurii, în special influenţa formei şi distribuţiei grafitului, asupra modului cum decurge procesul

Tabloul nr. 4

aer, 700°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m şi oră			
		25 ore	75 ore	150 ore	220 ore
1	1	11,20	6,93	6,66	6,27
2	1_1	1,60	0,67	0,53	0,61
3	1_2	2,00	1,00	0,67	0,68
4	1_3	1,00	0,60	0,40	0,32
5	1_4	0,40	0,20	0,30	0,25
6	1_5	0,45	0,25	0,32	0,25

Tabloul nr. 5

aer, 850°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră			
		25 ore	75 ore	150 ore	220 ore
1	1	27,00	14,67	13,50	9,73
2	1_1	7,20	2,80	4,07	3,45
3	1_2	4,80	2,80	4,27	4,10
4	1_3	5,20	2,00	4,27	3,91
5	1_4	0,40	0,27	1,07	0,82
6	1_5	0,45	0,30	1,00	0,82

Tabloul nr. 6

aer, 1000°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră			
		25 ore	75 ore	150 ore	220 ore
1	1	87,00	36,00	37,80	26,80
2	1_1	45,60	32,00	24,00	21,00
3	1_2	64,80	34,66	25,70	22,20
4	1_3	60,00	32,00	22,00	21,66
5	1_4	48,00	28,00	20,80	20,00
6	1_5	49,00	28,00	21,00	21,00

Tabloul nr. 7

75 ore, aer, 900°C şi 950°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră	
		900°C	950°C
1	1	42,20	63,20
2	1_1	13,00	24,50
3	1_2	19,00	30,00
4	1_3	18,00	27,00
5	1_4	0,60	1,80
6	1_5	0,70	1,90

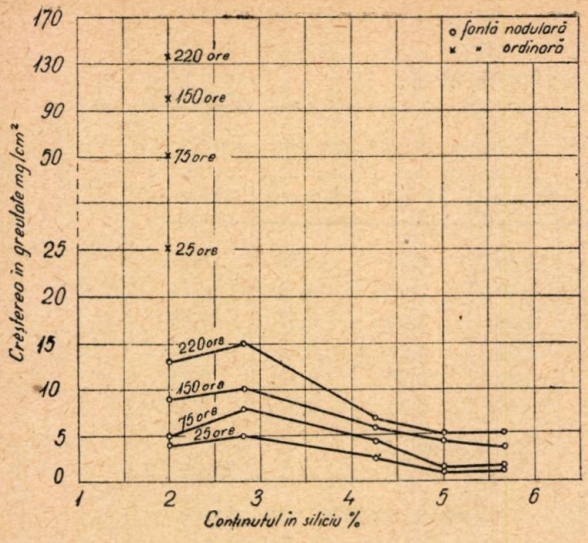


Fig. 27. — Influența conținutului în siliciu asupra rezistenței la oxidare în aer, la 700°C.

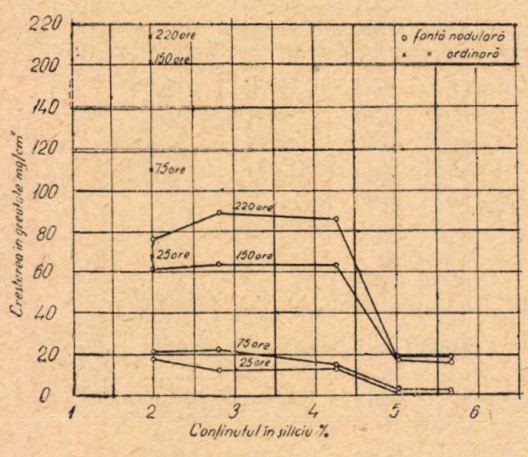


Fig. 28. — Influența conținutului în siliciu asupra rezistenței la oxidare în aer, la 850°C.

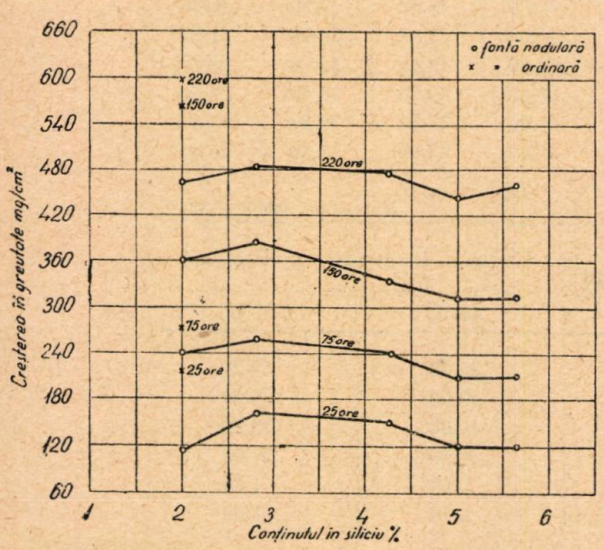


Fig. 29. — Influența conținutului în siliciu asupra rezistenței la oxidare în aer, la 1000°C.

Fig. 30. — × 100; fără atac. Microstructura fontei cu grafit lamelar, după oxidare la 1000°C timp de 25 ore.

Margine : strat de oxizi. Interior: oxizii au înlocuit complet grafitul lamelar şi cementita din perlită.

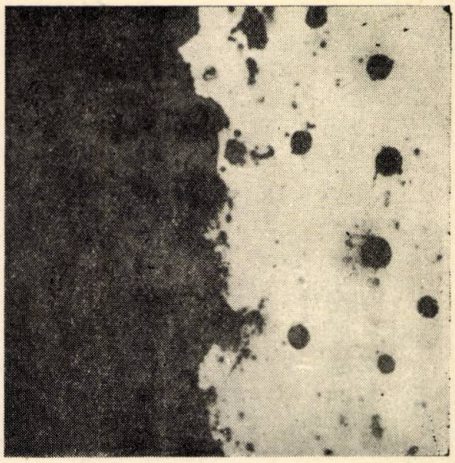
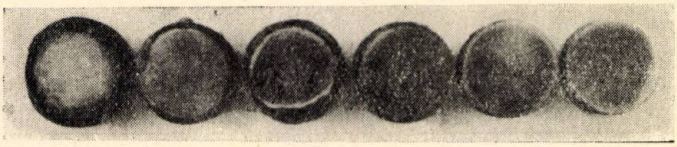


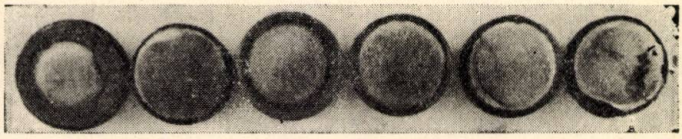
Fig. 31. — × 100; fără atac. Microstructura fontei cu grafit nodular, după oxidare la 1000°C timp de 220 ore.

Margine: strat de oxizi. Interior structură: nealterată.



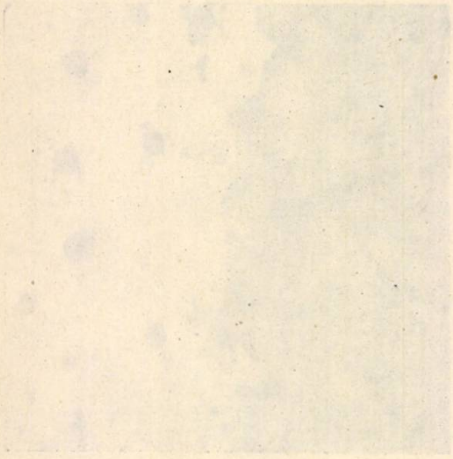
1 1_1 1_2 1_3 1_4 1_5

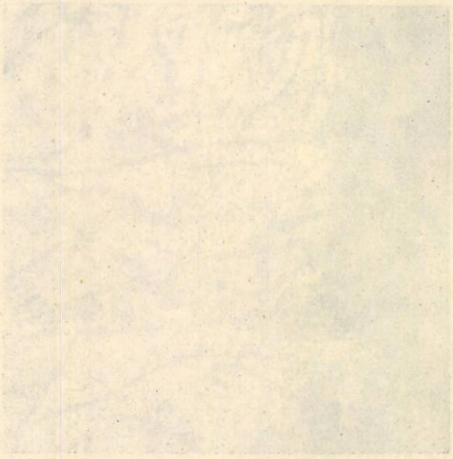
Fig. 32. — Aspectul secţiunii epruvetelor supuse la oxidare la 850°C timp de 220 ore.



1 1_4 1_2 1_3 1_4 1_5

Fig. 33. — Aspectul secţiunii epruvetelor supuse la oxidare la 1000°C timp de 25 ore.





de oxidare, explicînd astfel în mod clar, deosebirea ce există între rezistenţa la oxidare a fontelor cu grafit lamelar şi a celor cu grafit nodular.

În cazul fontei cu grafit lamelar, observăm că stratul superficial de oxizi se continuă adînc în interior, prin ramificaţii care au luat naştere prin înlocuirea completă a lamelelor de grafit. Constatăm de asemenea că a avut loc şi o înlocuire a cementitei din perlită, după globulizarea ei, în prealabil.

În cazul fontei cu grafit nodular, oxidarea este numai superficială, stratul de oxizi prezentînd numai mici intrînduri, acolo unde nodulele de grafit se găseau la suprafaţă. Cu alte cuvinte, fonta cu grafit nodular nu suferă o oxidare internă, şi aceasta explică atît rezistenţa ei ridicată la oxidare, cît şi lipsa creşterii, caracteristică fontei cu grafit lamelar.

În ceea ce priveşte influenţa siliciului, se constată că rezistenţa la oxidare scade puţin în intervalul 2—3% siliciu, creşte relativ puţin în intervalul 3—4,25% siliciu şi creşte foarte mult pentru conţinuturi mai mari de 4,25% siliciu. Menţionăm că această relaţie se menţine pentru toate condiţiile de experimentare (fig. 27, 28 şi 29).

În figurile 32 şi 33 se arată aspectul secţiunii transversale a epruvetelor din fontă cu grafit lamelar (l) şi din fontă cu grafit nodular $l_1—l_5$, supuse la oxidare în condiţiile specificate.

Remarcăm deosebirea ce există între grosimea stratului de oxizi al epruvetelor din fontă cu grafit lamelar (l) şi din fontă cu grafit nodular (l_1) pentru acelaşi conţinut în siciliu şi variaţia grosimii stratului superficial de oxizi, al epruvetelor din fontă cu grafit nodular, în funcţie de conţinutul în siciliu.

Datele din tablourile nr. 4, nr. 5, nr. 6 şi nr. 7 arată, în plus, că durata de oxidare are o influenţă definită asupra vitezei cu care decurge procesul de oxidare. Viteza de oxidare este maximă în perioada de formare a crustei de oxizi, în cazul nostru primele 25 ore, şi apoi scade treptat pe măsură ce durata creşte, ca urmare a rezistenţei ce opune crusta de oxizi difuziunii oxigenului.

Considerînd ca admisibilă pentru o anumită temperatură şi o durată de oxidare de 75 ore, o creştere în greutate cuprinsă în limitele 0—3 g/m² şi oră [7], [8] — remarcăm că această condiţie este foarte severă — putem trage următoarele concluzii în ceea ce priveşte temperaturile de utilizare a fontelor studiate:

— fontele ordinare nu se pot întrebuinţa în intervalul 700—1000°C;

— fontele cu grafit nodular aliate cu 2—4,5% siliciu se pot întrebuinţa pînă la temperaturi de 850°C inclusiv;

— fontele cu grafit nodular aliate cu 4,5—6% siliciu rezistă foarte bine pînă la temperatura de 950°C inclusiv.

Menţionăm că, în comparaţie cu fontele aliate cu aluminiu [7], recunoscute ca avînd o foarte bună rezistenţă la oxidare, fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu sînt mai rezistente la oxidare pînă la temperatura de 950°C, 1% siliciu echivalînd în medie 1,5% aluminiu.

În cazul fontelor cu crom, pentru a se obţine o rezistenţă la oxidare egală cu aceea a fontei cu grafit nodular cu 5% siliciu, este necesar un conţinut de circa 20—25% crom. Rezultă deci că 1% siliciu echivalează cu circa 4—5% crom.

CONCLUZII

Fontele cu grafit nodular sînt mult superioare fontelor cu grafit lamelar, nu numai în ceea ce priveşte valorile numerice ale proprietăţilor mecanice, aşa cum erau cunoscute pînă în prezent, dar şi în ceea ce priveşte stabilitatea dimensională şi rezistenţa la oxidare.

Luînd în considerare proprietăţile mecanice, stabilitatea dimensională la temperaturi înalte şi rezistenţa la oxidare, fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu pot fi împărţite în două grupe:

— fonte cu un conţinut în siliciu mai mic de 4,5%

— fonte cu un conţinut în siliciu mai mare de 4,5%.

Fontele din prima grupă sînt rezistente la oxidare pînă la temperatura de 850°C inclusiv, au o bună stabilitate dimensională, au rezistenţe mari la întindere şi încovoiere, sînt tenace şi se prelucrează uşor.

Fontele din grupa a doua rezistă la oxidare pînă la temperatura de 950°C, au o foarte bună stabilitate dimensională, sînt mai rezistente la întindere decît fontele din prima grupă, însă sînt mai puţin tenace şi ceva mai greu prelucrabile.

Faţă de fontele aliate cu aluminiu, fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu sînt mai rezistente la oxidare pînă la 950°C şi au o stabilitate dimensională mai bună.

Dacă, pe lîngă rezistenţa la oxidare şi stabilitatea dimensională, ţinem seamă de valorile numerice ale proprietăţilor mecanice, de capacitatea de prelucrare şi de preţul de revenire, superioritatea fontelor cu grafit nodular aliate cu siliciu şi în special al celor cu un conţinut de 4,5—6% siliciu, faţă de fontele cu aluminiu şi faţă de multe din fontele rezistente la oxidare, apare în mod evident.

Partea a doua

FONTE CU GRAFIT NODULAR ALIATE CU MANGAN

Obţinerea epruvetelor

Topirea, nodulizarea, alierea şi turnarea epruvetelor s-au făcut în condiţii similare cu cele descrise în partea întîi. Pentru aliere s-a întrebuinţat feromangan de 70%, cu un conţinut de 6% carbon. Temperatura fontei la aliere a fost de 1280—1300°C, iar la turnare de 1260—1280°C.

Compoziţiile chimice

În tabloul nr. 8 sînt redate compoziţiile chimice ale fontei ordinare, de la care s-a plecat, şi ale fontelor cu grafit nodular.

Tabloul nr. 8

Nr. crt.	Simbol	Carbon total %	Carbon comb. %	Carbon grafitic %	Siliciu %	Mangan %	Sulf %	Fosfor %	Magneziu %
1	2	3,69	0,65	3,04	2,21	1,12	0,024	0,125	—
2	2_1	3,00	0,75	2,25	2,28	1,12	0,018	0,104	0,11
3	2_2	3,04	0,77	2,28	2,25	1,51	0,022	0,088	0,09
4	2_3	3,04	0,81	2,23	2,21	1,70	0,015	0,115	0,08
5	2_4	3,21	0,90	2,31	2,24	2,43	0,018	0,115	0,09
6	2_5	3,35	0,94	2,41	2,25	2,73	0,020	0,110	0,12
7	2_6	3,35	0,99	2,36	2,24	3,00	0,021	0,140	0,09

Conţinutul în mangan variază între 1% şi 3%. În condiţiile în care am lucrat, nu am reuşit a obţine fonte cu un conţinut mai ridicat în mangan, din cauza scăderii pronunţate a temperaturii şi fluidităţii în cursul alierii.

Aşa cum am observat şi în partea întîi, în urma tratamentului cu magneziu are loc o micşorare a conţinutului în carbon. Astfel, în timp ce fonta ordinară are un conţinut în carbon de 3,69%, fonta cu grafit nodular, cu acelaşi conţinut în mangan, are un conţinut în carbon de 3,00 %.

Conţinutul în carbon al fontelor cu grafit nodular creşte cu conţinutul în mangan de la 3,00% la 3,35%, ceea ce se datoreşte conţinutului ridicat în carbon al feromanganului.

Conţinutul în carbon combinat creşte cu conţinutul în mangan, însă puţin, de la 0,75% la 0,99%.

Siliciul, sulful şi fosforul se menţin în limite strînse.

Randamentul desulfurării, în urma tratamentului cu magneziu, este de circa 25%. Valoarea relativ mică a randamentului desulfurării se datoreşte faptului că fonta ordinară a avut un conţinut în sulf foarte mic, 0,024%.

Magneziul remanent este în medie de ordinul 0,09%.

Microstructurile

În figurile 34 şi 35 sînt redate microstructurile fontei ordinare, înainte de tratamentul cu magneziu.

Microstructura fontei ordinare constă din lamele de grafit, perlită fină, ferită separată de-a lungul lamelelor de grafit, puţin eutectic fosforos şi incluziuni mici şi rare de sulfură de mangan.

Lamelele de grafit au o distribuţie uniformă şi lungimi de 1—6 cm, la mărirea 100.

Deci, este o fontă cenuşie, perlito-feritică, cu lamele de grafit de tipul A şi mărimea 3, după clasificarea A.F.A.

În figurile 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, şi 43 sînt arătate microstructurile fontelor cu grafit nodular, cu conţinuturi crescînde de mangan.

Microstructurile constau din nodule de grafit, perlită, separări de cementită şi insule rare de eutectic fosforos.

Pentru conţinuturi în mangan mai mari de 2,70 %, nodulizarea grafitului nu este completă, în microstuctură apărînd, pe lîngă nodule, aglomerări de grafit, similare cu cele întîlnite în fontele maleabile şi mici lamele de grafit. În figurile 42 şi 43 se arată microstructurile regiunilor cu nodulizare incompletă, caracteristice fontelor 2_5 şi 2_6.

În această ordine de idei, ţinem să remarcăm că rezultatele noastre trebuie considerate numai ca un indiciu că nodulizarea întîmpină greutăţi de la un anumit procent de mangan. Nu este exclus însă, ca în alte condiţii de nodulizare şi aliere, să se obţină fonte cu grafit nodular, chiar pentru conţinuturi în mangan mai mari de 3,00 %.

Din examinarea microstructurilor din figurile 36, 38, 40 şi 42, constatăm că, pe măsură ce conţinutul în mangan creşte, mărimea nodulelor de grafit se micşorează, iar numărul lor pe unitatea de suprafaţă se măreşte.

În tabloul nr. 9 se poate urmări mărimea şi numărul nodulelor pe unitatea de suprafaţă, în funcţie de conţinutul în mangan. Numărarea nodulelor s-a făcut la mărirea 100, pe un ecran cu o suprafaţă de 100 cm^2. Datele ce se găsesc în tabloul nr. 9 reprezintă cifra medie pentru 5 cîmpuri microscopice distincte.

Ca şi în cazul fontelor cu grafit nodular aliate cu siliciu, menţionăm că nodulele de grafit au o distribuţie ordonată, fiind aşezate la limitele grăunţilor de austenită

Fig. 34. — × 100; fără atac. Lamele de grafit. Fig. 35. — × 100; atac nital 2%. Lamele de grafit, ferită şi perlită.

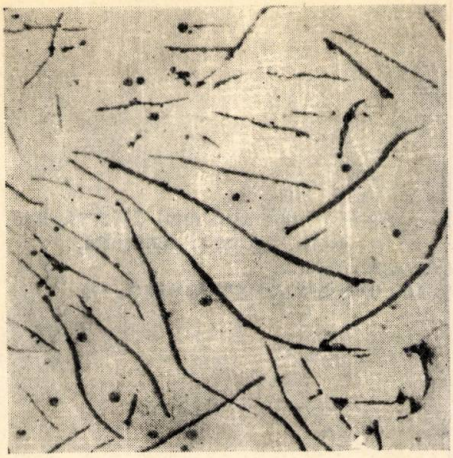
Microstructurile fontei ordinare 2
3,69 % C.T.; 0,65 % C.C; 2,21 % Si; 1,12 % Mn; 0,024 % S; 0,125 % P.

Fig. 36. — × 100; fără atac. Nodule de grafit. Fig. 37. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit, perlită, puţină ferită în jurul nodulelor şi insule mici de cementită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 2_1
3,00 % C. T.; 0,75 % C. C.; 2,28 % Si; 1,12 % Mn; 0,018 % S; 0,104 % P; 0,11 % Mg.

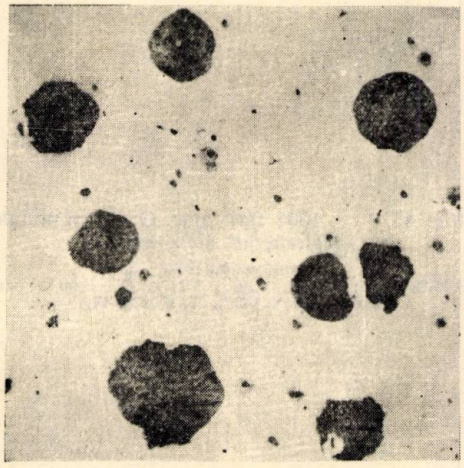
Fig. 38. — × 100; fără atac. Nodule de grafit. Fig. 39. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit, perlită şi insule mici de cementită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 2_2
3,04 % C. T.; 0,77 % C. C.; 2,25 % Si; 1,51 % Mn; 0,022 % S; 0,088 % P; 0,09 % Mg.

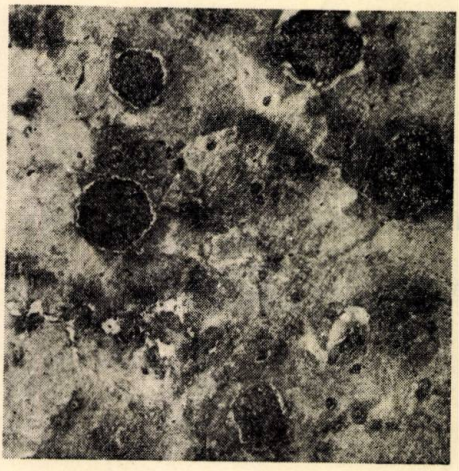


34

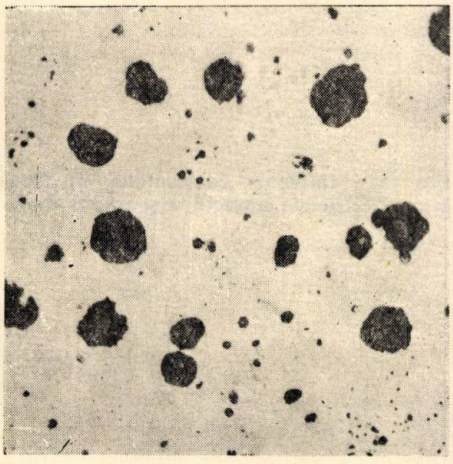
35



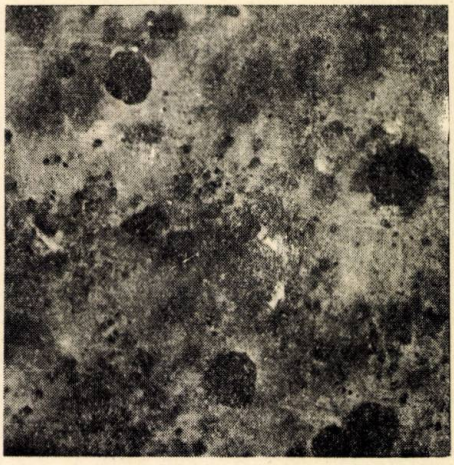
36



37



38



39

Fig. 40. — × 100; fără atac. Nodule de grafit.

Fig. 41. — × 100; atac nital 2%. Nodule de grafit, perlită şi cementită.

Microstructurile fontei cu grafit nodular 2_3

3,04 % C. T.; 0,81 % C. C.; 2,21 % Si; 1,70 % Mn; 0,015 % S; 0,115 % P; 0,08 % Mg.

Fig. 42. — × 100; fără atac. Grafit în nodule, aglomerări şi lamele.

Microstructura fontei 2_5

3,35 % C. T.; 0,94 % C. C.; 2,25 % Si; 2,73 % Mn; 0,020 % S; 0,110 % P; 0,12 % Mg.

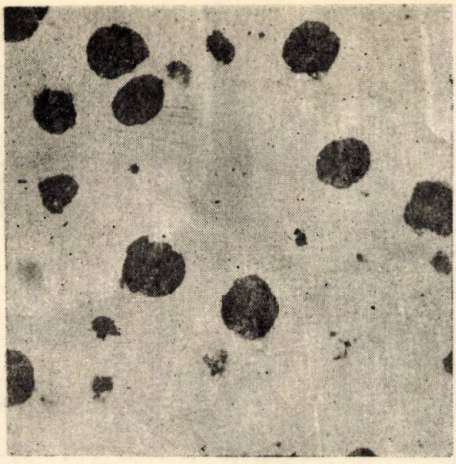
Fig. 43. — × 100; fără atac. Grafit în nodule, aglomerări şi lamele.

Microstructura fontei 2_6

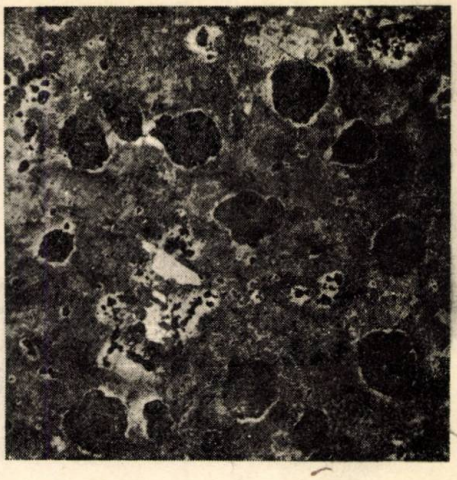
3,35 % C. T.; 0,99 % C. C.; 2,24 % Si; 3,00 % Mn; 0,021 % S; 0,140 % P; 0,09 % Mg.

Fig. 44. — Influenţa conţinutului în mangan asupra durităţii.

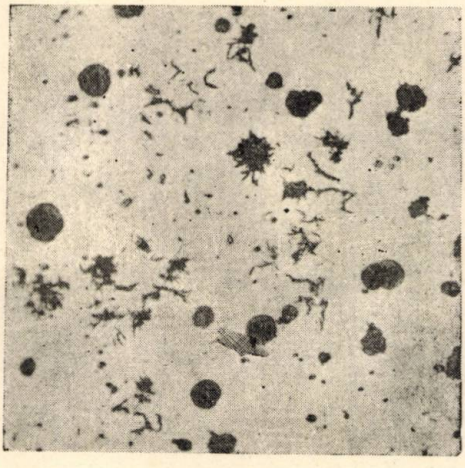
Fig. 45. — Influenţa conţinutului în mangan asupra rezistenţei la tracţiune şi asupra alungirii.



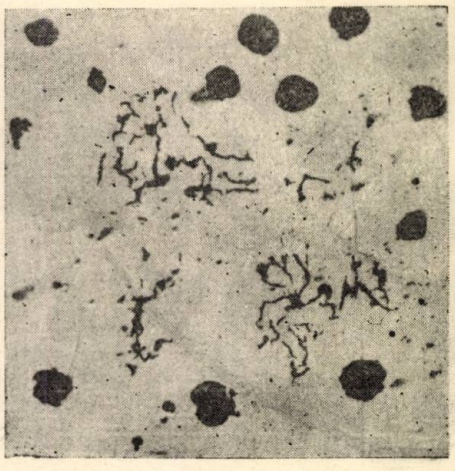
40



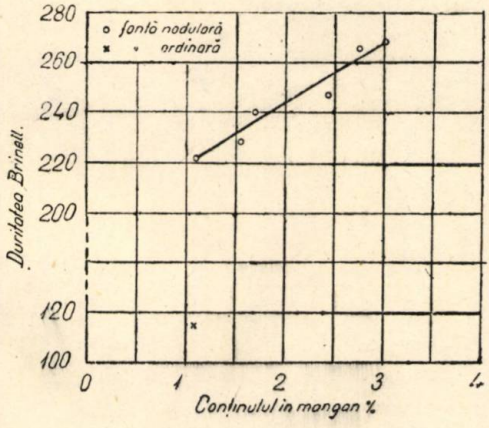
41



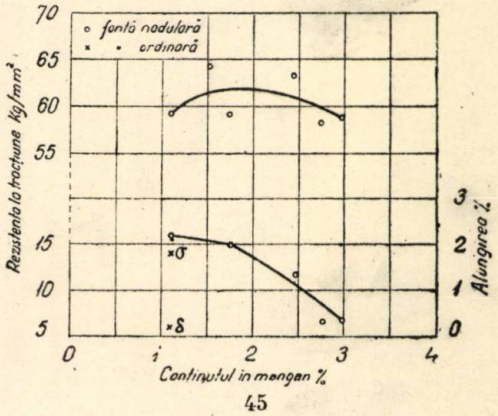
42



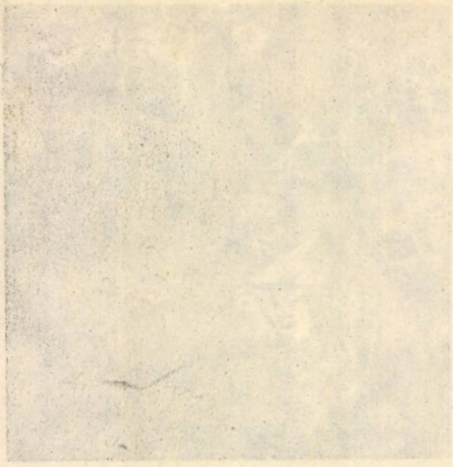
43

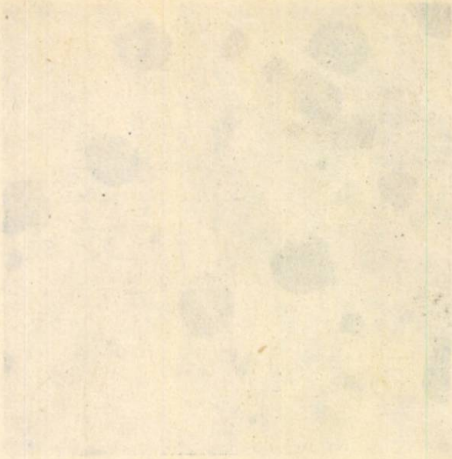


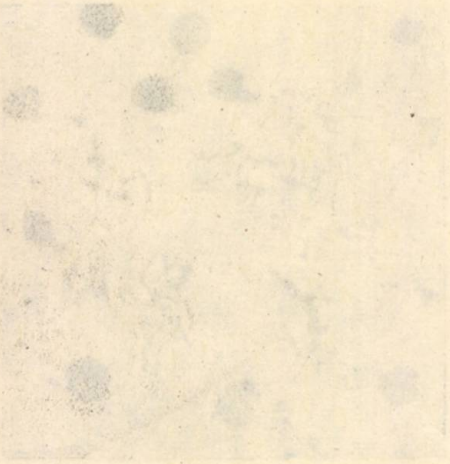
44

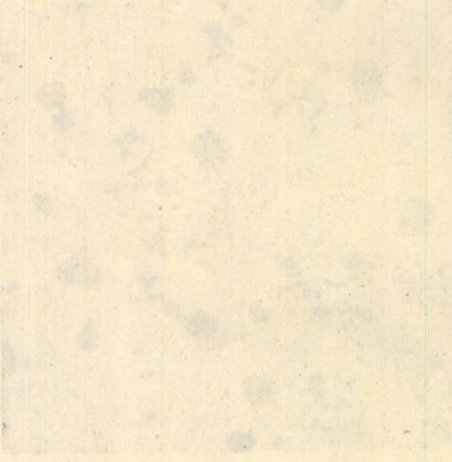


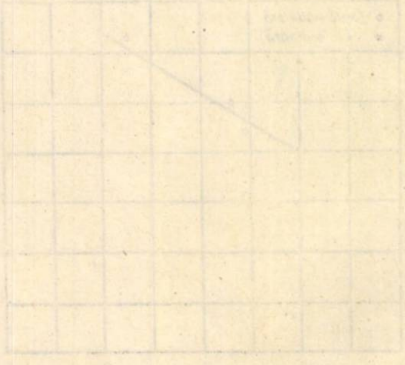
45











şi că mărimea grăunţilor de austenită se micşoreaza pe măsură ce numărul nodulelor de grafit creşte, aşa după cum se poate constata din figurile 36, 38 şi 40.

Tabloul nr. 9

Nr. crt.	Simbol	Mangan %	Diametrul nodulelor μ	Numărul nodulelor pe mm² real
1	2_1	1,12	100	21
2	2_2	1,51	80	33
3	2_3	1,70	65	36
4	2_4	2,43	51	59
5	2_5	2,73	40	73
6	2_6	3,00	50	—

Comparînd figurile 35 şi 37, se observă că la acelaşi conţinut în mangan microstructura fontei cu grafit nodular conţine şi insule de cementită liberă.

Această deosebire marcantă între microstructurile celor două fonte o atribuim, în special, diferenţei ce a existat între temperaturile de turnare a epruvetelor şi în parte şi acţiunii magneziului. Temperatura de turnare a fontei cu grafit nodular a fost mai mică decît a fontei cu grafit lamelar, datorită răcirii care a avut loc în cursul operaţiei de nodulizare. Este un indiciu că pentru fontele aliate cu mangan, temperatura de turnare a fost în general mică şi aceasta poate explica, în parte, şi apariţia lamelelor de grafit în cazul fontelor 2_5 şi 2_6.

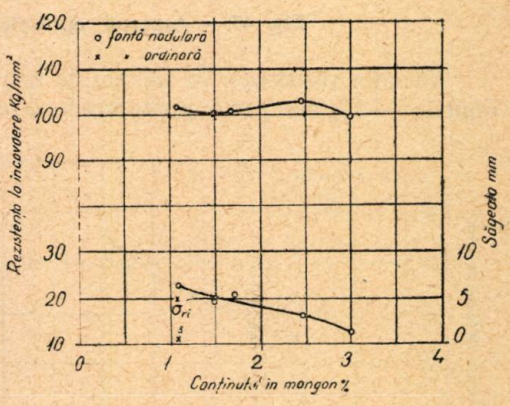


Fig. 46. — Influenţa conţinutului în mangan asupra rezistenţei la încovoiere şi asupra săgeţii.

Creşterea conţinutului în mangan în limitele 1—3 % produce o mărire a cantităţii de cementită liberă, însă în mică măsură, după cum se poate constata din examinarea microstructurilor din figurile 37, 39 şi 41.

Proprietăţile mecanice

Determinările proprietăţilor mecanice s-au efectuat pe epruvete şi în condiţii identice cu cele descrise în partea întîi.

Duritatea fontei ordinare şi variaţia durităţii fontelor cu grafit nodular, în funcţie de conţinutul în mangan, sînt redate în figura 44.

Pentru acelaşi conţinut în mangan, duritatea fontei cu grafit nodular, este aproximativ de două ori mai mare decît duritatea fontei cu grafit lamelar.

Duritatea fontelor cu grafit nodular creşte liniar, cu conţinutul în mangan, de la 220 H_B pentru 1 % mangan, pînă la 267 H_B pentru 3 % mangan.

Rezistenţa de rupere la tracţiune şi alungirea. Rezultatele obţinute sînt redate în diagrama din figura 45.

Pentru acelaşi conţinut în mangan, rezistenţa fontei cu grafit nodular este aproximativ de patru ori mai mare decît rezistenţa fontei cu grafit lamelar.

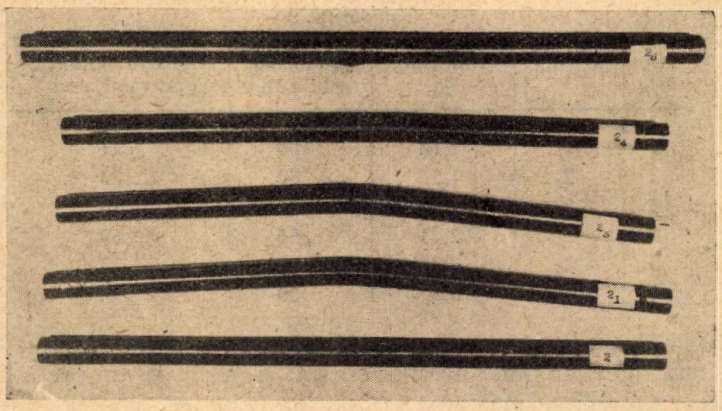


Fig. 47. — Aspectul epruvetelor supuse la încovoiere.

Variaţia rezistenţei în funcţie de conţinutul în mangan este mică, aşa că în limitele 1—3 % mangan se poate admite o rezistenţă medie de 60 kg/mm². Remarcăm că apariţia aglomerărilor de lamele, în microstructurile fontelor 2_5 şi 2_6, produce o scădere a rezistenţei la tracţiune, însă foarte mică, de ordinul a 3—5 kg/mm².

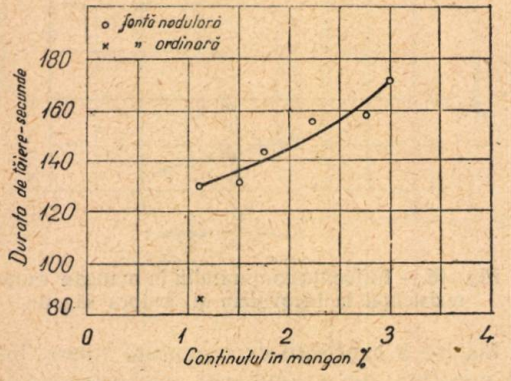


Fig. 48. — Influenţa conţinutului în mangan asupra rezistenţei la prelucrare.

Alungirea scade cu creşterea conţinutului în mangan, lent pînă la circa 2 % mangan şi apoi mai rapid, ca urmare a măririi cantităţii de cementită în microstructură.

Rezistenţa de rupere la încovoiere şi săgeata. Rezultatele obţinute sînt redate în diagramele din figura 46.

Rezistenţa de rupere la încovoiere, în intervalul 1—3 % mangan, variază foarte puţin în jurul cifrei de 100 kg/mm².

Săgeata scade continuu cu creşterea conţinutului în mangan, în mod similar cu alungirea.

În figura 47 se arată aspectul epruvetelor supuse la încovoiere.

Capacitatea de prelucrare

S-a determinat în condiţiile descrise în partea întîi *).

Diagrama din figura 48 arată că mărirea conţinutului în mangan produce scăderea continuă a capacităţii de prelucrare, curba de variaţie a rezistenţei la prelucrare avînd o alură similară cu aceea a curbei de variaţie a durităţii.

*) p. 10.

Observăm că pentru acelaşi conţinut în mangan, capacitatea de prelucrare a fontei cu grafit nodular este mult mai mică decît aceea a fontei cu grafit lamelar. Caracteristicile microstructurale ale celor două fonte — perlită cu urme de cementită, în cazul fontei cu grafit nodular şi perlită cu insule de ferită în cazul fontei cu grafit lamelar — explică pe deplin deosebirea ce există între capacitatea de prelucrare a celor două fonte.

În comparaţie cu fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu, fontele cu grafit nodular aliate cu mangan au o capacitate de prelucrare mai mică, fonta cu 1% mangan avînd aceeaşi capacitate de prelucrare ca fonta cu 5,5 % siliciu.

Caracteristicile dilatometrice

S-au determinat în condiţiile descrise în partea întîi *).

În figurile 49, 50, 51, 52, 53 şi 54 sînt redate curbele de dilatare absolută pentru fonta cu grafit lamelar şi fontele cu grafit nodular.

Constatăm, şi de această dată, că fontele cu grafit nodular, în urma unui ciclu de încălzire-răcire, prezintă o contracţie permanentă şi nu o dilatare permanentă, ca în cazul fontelor cu grafit lamelar.

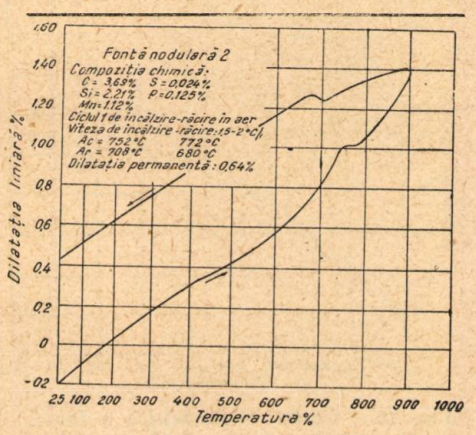


Fig. 49. — Curba dilatometrică a fontei ordinare cu 1,12% Mn.

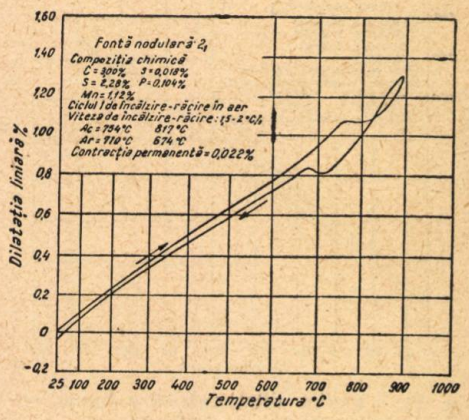


Fig. 50. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 1,12% Mn.

Pentru acelaşi conţinut în mangan, circa 1 % mangan, dilatarea fontei cu grafit lamelar este de 0,64%, iar contracţia fontei cu grafit nodular este de 0,02 %, adică variaţia dimensională a fontei cu grafit lamelar este de circa 30 de ori mai mare decît variaţia dimensională a fontei cu grafit nodular (fig. 49 şi 50).

Din examinarea figurii 55, în care se arată variaţia contracţiei permanente a fontelor cu grafit nodular, în funcţie de conţinutul în mangan, constatăm că:

— în intervalul 1,00—1,50 % mangan contracţia permanentă creşte brusc atingînd un maximum de 0,14 % pentru 1,50 % mangan.

— pentru conţinuturi în mangan mai mari de 1,50 % contracţia permanentă scade treptat, atingînd pentru 3 % mangan valoarea 0,042 %.

În comparaţie cu fontele cu grafit lamelar aliate cu siliciu sau cu aluminiu [3], [7] fontele cu grafit nodular aliate cu mangan pentru conţinuturi de acelaşi

*) p. 11.

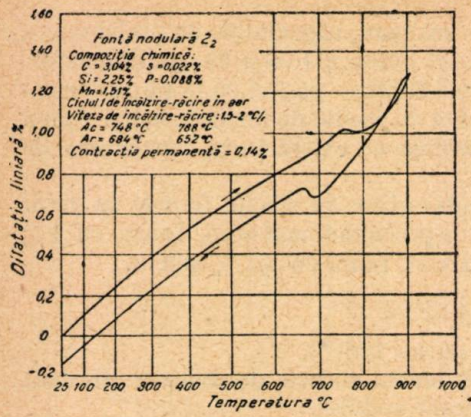


Fig. 51. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 1,51% Mn.

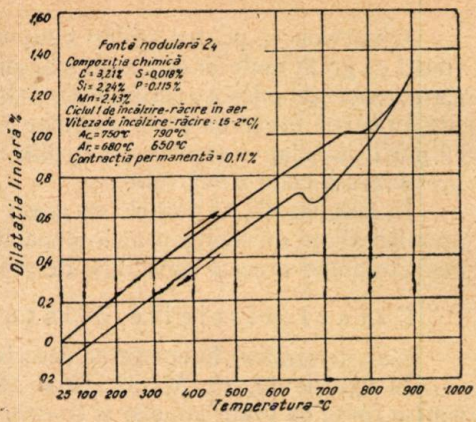


Fig. 52. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 2,43% Mn.

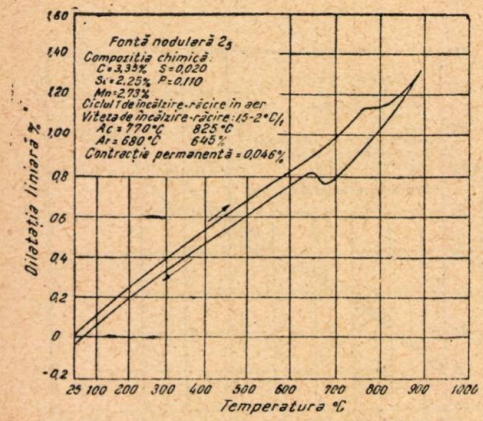


Fig. 53. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 2,7% Mn.

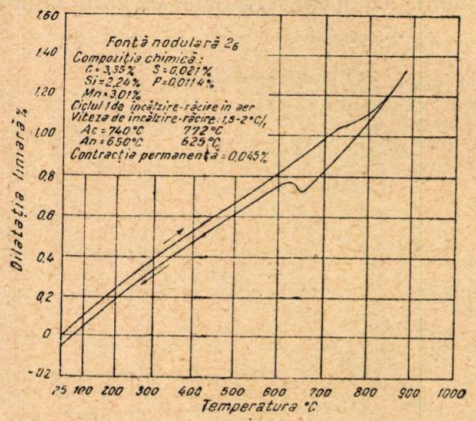


Fig. 54. — Curba dilatometrică a fontei cu grafit nodular cu 3% Mn.

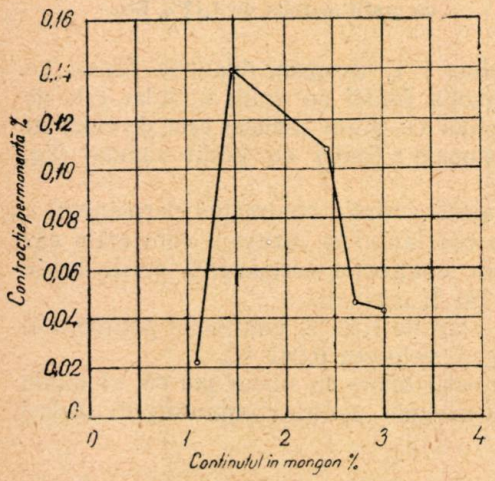


Fig. 55. — Influența conținutului în mangan asupra contracției permanente a fontelor cu grafit nodular.

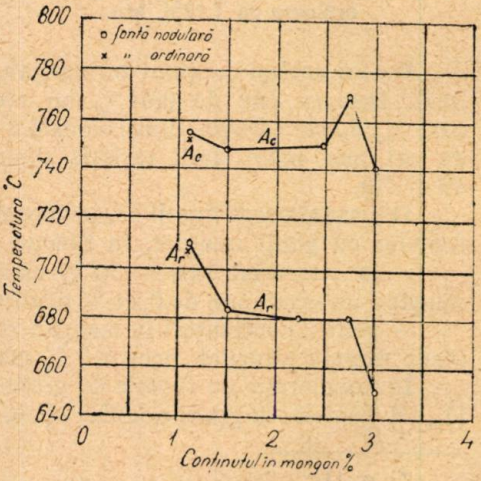


Fig. 56. — Influența conținutului în mangan asupra poziției punctelor de transformare.

ordin de mărime au o foarte bună stabilitate dimensională. Astfel pentru un conţinut de 1,5 %, fontele cu grafit lamelar aliate cu siliciu au o dilataţie de 0,29 %, cele aliate cu aluminiu au o dilataţie de 0,7 %, iar fontele cu grafit nodular aliate cu mangan au o contracţie de 0,14 %.

Menţionăm că am ales pentru comparaţie conţinutul de 1,5 %, deoarece fontele studiate de noi prezintă pentru acest conţinut o variaţie dimensională maximă, după cum se poate vedea din figura 55.

În comparaţie cu fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu, fontele cu grafit nodular aliate cu mangan au o stabilitate dimensională la cald ceva mai mică. Menţionăm însă că deosebirea scade pe măsură ce conţinutul în mangan creşte (fig. 25, 55).

Din figura 56 constatăm că la încălzire, influenţa manganului asupra punctului perlitic este neprecisă, producînd atît coborîrea, cît şi ridicarea punctului A_c, însă în limite strînse. În schimb, la răcire, creşterea conţinutului în mangan produce coborîrea continuă a punctului perlitic A_r.

Remarcăm, în plus, că manganul produce un histerezis termic foarte mare, care se accentuează cu creşterea conţinutului, aşa după cum se poate constata din tabloul nr. 10.

În tabloul nr. 11 sînt redate valorile coeficientului de dilatare în intervalele de 25—700°C şi 25—900°C, pentru fonta cu grafit lamelar şi fontele cu grafit nodular

Tabloul nr. 10

Simbolul fontei	2_1	2_2	2_4	2_5	2_6
Histerezisul termic °C	44	64	70	90	90

Tabloul nr. 11

Simbolul fontei	2	2_1	2_2	2_4	2_5	2_6
$\alpha.10^{-6}$ 25°C—700°C	14,3	13,5	13,2	13,5	14,2	14,2
$\alpha.10^{-6}$ 25°C—900°C	17,7	14,5	14,4	14,4	14,6	14,6

Observăm că, pentru acelaşi conţinut în mangan, fonta cu grafit nodular are un coeficient de dilatare mai mic decît fonta cu grafit lamelar şi că mărirea conţinutului în mangan produce o uşoară creştere a coeficientului de dilatare.

Rezistenţa la oxidare

S-a determinat în condiţii identice cu cele descrise în partea întîi *).

Datele obţinute sînt redate în tablourile nr. 12, nr. 13, nr. 14 şi nr. 15 şi în diagramele din figurile 57, 58 şi 59.

Din examinarea datelor prezentate, se constată, ca şi în cazul fontelor aliate cu siliciu, o dependenţă bine definită a rezistenţei la oxidare de microstructură, conţinutul în mangan şi temperatură.

La temperatura de 700°C, rezistenţa la oxidare a fontei cu grafit nodular —2_1— este de circa 7 ori mai mare decît rezistenţa la oxidare a fontei cu grafit lamelar —2— cu acelaşi conţinut în mangan. Această deosebire se micşorează însă pe măsură ce temperatura, la care are loc oxidarea, creşte.

*) p. 13.

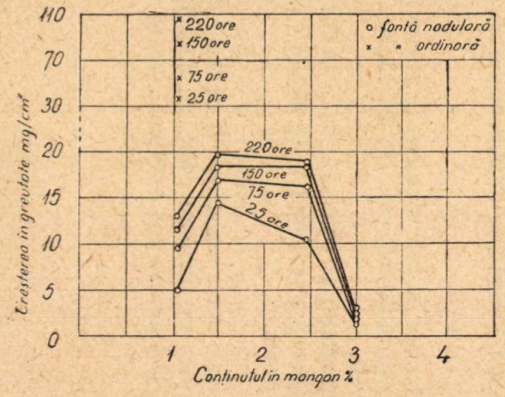


Fig. 57. — Influenţa conţinutului în mangan asupra rezistenţei la oxidare în aer, la 700°C

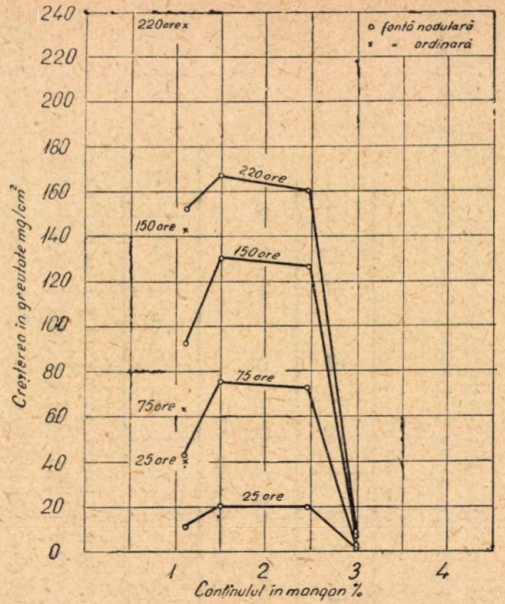


Fig. 58. — Influenţa conţinutului în mangan asupra rezistenţei la oxidare în aer, la 850°C.

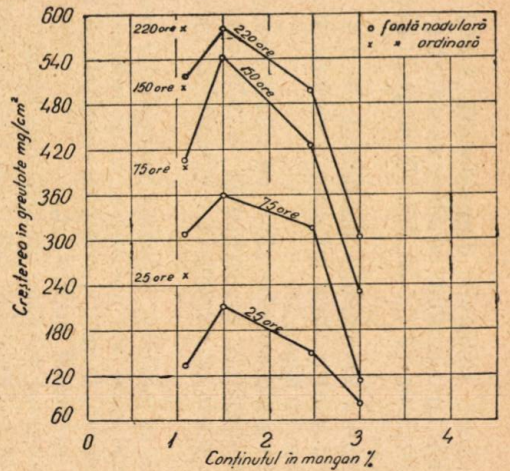
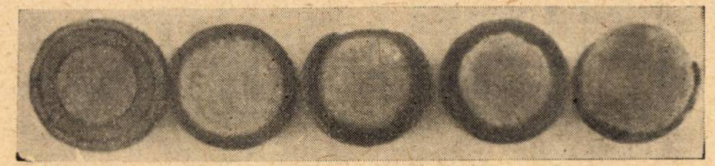


Fig. 59. — Influenţa conţinutului în mangan, asupra rezistenţei la oxidare în aer, la 1000°C

Temperatura: 850°C. Durata 220 ore



2 2_1 2_2 2_4 2_6

Fig. 60. — Aspectul secţiunii epruvetelor supuse la oxidare, la 850°C timp de 220 ore.

Temperatura: 1000°C. Durata 25 ore

2 2_1 2_2 2_4 2_6

Fig. 61. — Aspectul secţiunii epruvetelor supuse la oxidare, la 1000°C timp de 25 ore.

Creşterea conţinutului în mangan produce o micşorare a rezistenţei la oxidare în intervalul 1—1,5 %, o uşoară creştere în intervalul 1,5—2,5 % şi o creştere bruscă pentru conţinuturi mai mari de 2,5 % mangan.

Remarcăm că această relaţie se menţine pentru toate condiţiile de experimentare.

În figurile 60 şi 61 se arată aspectul secţiunii epruvetelor din fontă cu grafit lamelar —2— şi din fontă cu grafit nodular, 2_1—2_6, supuse la oxidare în condiţiile specificate.

Remarcăm deosebirea ce există între grosimea stratului de oxizi al epruvetelor din fontă cu grafit lamelar —2— şi din fontă cu grafit nodular —2_1—, pentru acelaşi conţinut în mangan şi variaţia grosimii stratului de oxizi al epruvetelor din fontele cu grafit nodular, în funcţie de conţinutul în mangan.

Tabloul nr. 12

aer, 700°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră			
		25 ore	75 ore	150 ore	220 ore
1	2	14,40	7,32	5,46	4,82
2	2_1	2,00	1,26	0,77	0,59
3	2_2	5,80	2,27	1,23	0,88
4	2_4	4,20	2,20	1,20	1,20
5	2_6	0,60	0,27	0,16	0,20

Tabloul nr. 13

aer, 850°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră			
		25 ore	75 ore	150 ore	220 ore
1	2	18,0	8,80	9,73	10,60
2	2_1	4,20	5,60	6,20	6,90
3	2_2	8,00	10,00	8,60	7,50
4	2_4	8,00	9,60	8,40	7,27
5	2_6	0,80	0,40	0,46	0,37

Tabloul nr. 14

aer, 1000°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră			
		25 ore	75 ore	150 ore	220 ore
1	2	100,80	55,33	34,40	26,50
2	2_1	54,00	40,66	26,53	23,50
3	2_2	84,00	47,73	36,00	26,50
4	2_4	60,00	41,73	28,26	22,81
5	2_6	32,00	13,86	15,30	13,99

Constatările făcute în partea întîi *), asupra relaţiei ce există între durata de oxidare şi viteza cu care decurge procesul de oxidare sînt reconfirmate de datele din tablourile nr. 12, nr. 13, nr. 14 şi nr. 15. Anume, viteza de oxidare este

*) p. 17 şi 18.

maximă în perioada de formare a crustei, în cazul nostru în primele 25 ore, şi apoi scade treptat pe măsură ce durata creşte, ca urmare a rezistenţei ce opune crusta de oxizi difuziunii oxigenului.

Considerînd ca admisibilă pentru o anumită temperatură şi o durată de oxidare de 75 ore, o creştere în greutate cuprinsă în limitele 0—3 g/m² şi oră [7],[8], putem trage următoarele concluzii în ceea ce priveşte temperaturile de utilizare a fontelor studiate:

Tabloul nr. 15

aer, 75 ore, 900°C şi 950°C

Nr. crt.	Simbol	Creşterea în greutate g/m² şi oră	
		900°C	950°C
1	2	40	54,40
2	2_1	24	36,60
3	2_2	26	38,40
4	2_4	24	36,30
5	2_8	0,9	1,60

— Fontele ordinare nu sînt rezistente la oxidare în intervalul 700—1000°C. Fontele cu grafit nodular aliate cu 1,0—25,% mangan sînt rezistente la oxidare pînă la temperatura de 700°C inclusiv.

— Fontele aliate cu aproximativ 3 % mangan rezistă la oxidare, foarte bine, pînă la temperatura de 950°C in clusiv.

În comparaţie cu fontele cu grafit nodular aliate cu siliciu, fontele cu grafit nodular aliate cu mangan sînt în general mai puţin rezistente la oxidare. Face excepţie fonta cu grafit nodular, cu circa 3 % mangan, care deşi prezintă urme de grafit lamelar, are o rezistenţă la oxidare aproape egală cu aceea a fontei cu grafit nodular cu 5 % siliciu.

CONCLUZII

În condiţiile în care am lucrat, nu a fost posibil a obţine fonte cu grafit complet nodulizat, decît pînă la un conţinut de maximum 2,5 % mangan şi din acest motiv am limitat alierea la conţinutul de 3 % mangan.

Fontele studiate pot fi împărţite în două grupe:

— Fonte cu un conţinut mai mic de 2,5 % mangan.

Fonte cu un conţinut de circa 3 % mangan.

Fontele din prima grupă au o bună stabilitate dimensională la temperaturi înalte şi rezistă la oxidare pînă la temperatura de 700°C inclusiv.

Fontele cu circa 3 % mangan au o stabilitate dimensională mai bună decît fontele din prima grupă şi rezistă la oxidare pînă la 950°C inclusiv.

În general, fontele studiate pot fi prelucrate prin tăiere şi aşchiere, şi prezintă valori ridicate pentru rezistenţa la întindere şi încovoiere.

Din punctul de vedere al rezistenţei la oxidare şi al stabilităţii dimensionale la temperaturi înalte, cît şi în ceea ce priveşte proprietăţile mecanice legate de plasticitate, fontele cu grafit nodular aliate cu mangan sînt inferioare fontelor cu grafit nodular aliate cu siliciu.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СВОЙСТВ ЧУГУНОВ С УЗЕЛКОВЫМ ГРАФИТОМ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

После тщательного исследования факторов, вызывающих окисление и вздутие чугунов, и обзора свойств огнестойких чугунов, известных до настоящего времени, авторы приходят к заключению, что чугуны

с узелковым графитом могут совмещать с высокими механическими качествами большую устойчивость к окислению и вздутию.

В первой части настоящей работы рассматриваются чугуны с узелковым графитом в 2—6% сплавах с кремнием, а во второй части — в 1—3% сплавах с марганцем. Рассматриваются микроструктуры, механические свойства, возможность обработки, размерная устойчивость к нагреванию, дилатометрическая характеристика и стойкость к окислению. Для оценки стойкости к окислению мерой определения было принято увеличение веса, вызванное действием кислорода воздуха, выраженное в граммах на квадратный метр или в миллиграммах на квадратный сантиметр. При известной температуре и длительности окисления в 75 часов считалось допустимым увеличение веса, не превосходящее 3 г/м² в час.

А. На основании механических свойств, размерочной устойчивости при высоких температурах и стойкости к окислению, чугуны с узелковым графитом в сплаве с кремнием делятся на две группы:

— чугуны с содержанием кремния, не превосходящим 4,5%,

— чугуны с содержанием кремния, превышающим 4,5%.

Чугуны первой группы стойки к окислению до температуры 850° включительно, обладают большой размерной устойчивостью, большой сопротивляемостью на растяжение (55—60 кг/мм²) и сгибание (98—85 кг/мм²), стойки и легко обрабатываются.

Чугуны второй группы стойки к окислению до температуры 950°, обладают очень большой размерной устойчивостью, большой сопротивляемостью на растяжение (60—65 кг мм), но более стойки и труднее обрабатываются.

Увеличение веса через 75 часов при 850 и 950°:

% Si	2,00	2,80	4,25	5,04	5,65
Увеличение веса г/м² в час при 850°	2,80	2,80	2,00	0,27	0,30
Увеличение веса г/м² в час при 900°	13,00	19,00	18,00	0,60	0,70
Увеличение веса г/м² в час при 950°	24,50	30,00	27,00	1,80	1,90

Б. Чугуны с узелковым графитом в сплаве с марганцем делятся на две группы:

— чугуны с содержанием марганца, не превышающим 2,5%,

— чугуны, содержащие около 3% марганца.

Чугуны первой группы обладают большой размерной устойчивостью при высоких температурах и стойкостью к окислению до температуры 700° включительно.

Чугуны, содержащие около 3% марганца, обладают большей размерной устойчивостью, чем чугуны первой группы, и стойкостью к окислению до температуры 950° включительно.

Увеличение веса через 75 часов при 700 и 950°:

% Mn	1,12	1,51	2,43	33,00
Увеличение веса г/м² в час при 700°	1,26	2,27	2,20	0,27
Увеличение веса г/м² в час при 950°	36,60	38,60	36,30	1,60

Обычно чугуны с узелковым графитом, в сплаве с 1—3% марганца, могут обрабатываться строганием и обладают большой сопротивляемостью на растяжение (58—62 кг/мм²) и сгибание (около 100 кг/мм²).

С точки зрения стойкости к окислению, размерной устойчивости при высоких температурах и механических свойств, связанных с пластичностью, чугуны с узелковым графитом, в сплаве с марганцем, более низкого качества, чем чугуны с узелковым графитом в сплаве с кремнием.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1 и 2. — Микроструктуры обыкновенного чугуна с 2% Si; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 3 и 4. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 2% Si; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 5 и 6. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 2,8% Si; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 7 и 8. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 4,25% Si; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 9 и 10. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 5,4% Si; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 11 и 12. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 5,65% Si; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 13. — Влияние содержания кремния на твердость.

Рис. 14. — Влияние содержания кремния на сопротивление растяжению и удлинению.

Рис. 15. — Влияние содержания кремния на сопротивление изгибу и на стрелу.

Рис. 16. — Вид испытываемых на изгиб образцов.

Рис. 17. — Влияние содержания кремния на ударную вязкость.

Рис. 18. — Влияние содержания кремния на сопротивление обработке.

Рис. 19. — Дилатометрическая кривая обыкновенного чугуна с 2% Si.

Рис. 20. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и с 2% *Si*.

Рис. 21. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и 2,8% Si.

Рис. 22. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и 4,25% Si.

Рис. 23. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и 5,04% Si.

Рис. 24. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и 5,65% Si.

Рис. 25. — Влияние содержания кремния на постоянное сокращение чугунов с узелковым графитом.

Рис. 26. — Влияние содержания кремния на расположение точек превращения.

Рис. 27. — Влияние содержания кремния на стойкость к окислению в воздухе при 700°.

Рис. 28. — Влияние содержания кремния на стойкость к окислению в воздухе при 850°.

Рис. 29. — Влияние содержания кремния на стойкость к окислению в воздухе при 1000°.

Рис. 30. — Микроструктура чугуна с пластинчатым графитом после окисления при 1000° в течение 25 часов.

Рис. 31. — Микроструктура чугуна с узелковым графитом после окисления при 1000° в течении 220 часов.

Рис. 32. — Вид разреза испытуемых образцов, подвергнутых окислению при 850° в течение 220 часов.

Рис. 33. — Вид в разрезе испытуемых образцов, подвергнутых окислению при 1000° в течение 25 часов.

Рис. 34 и 35. — Микроструктуры обыкновенного чугуна, содержащего 1,12% Mn; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 36 и 37. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 1,12% Mn; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 38 и 39. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 1,51 % Mn; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 40 и 41. — Микроструктуры чугуна с узелковым графитом и 1,70 % Mn; непротравленный и протравленный образец. × 100.

Рис. 42. — Микроструктуры чугуна, содержащего 2,73 % Mn; непротравленный образец.

Рис. 43. — Микроструктуры чугуна, содержащего 3 % Mn; непротравленный образец.

Рис. 44. — Влияние содержания марганца на твердость.

Рис. 45. — Влияние содержания марганца на сопротивление растяжению и удлинению.

Рис. 46. — Влияние содержания марганца на сопротивление чугуну и на стрелку.

Рис. 47. — Вид испытываемых на изгиб образцов.

Рис. 48. — Влияние содержания марганца на сопротивление обработке.

Рис. 49. — Дилатометрическая кривая обыкновенного чугуна, содержащего 1,12 % Mn.

Рис. 50. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и 1,12 % Mn.

Рис. 51. — Дилатометрическая кривая чугуна с узелковым графитом и 1,51 % Mn.

Рис. 52. — Дилатомертическая кривая чугуна с узелковым графитом и 2,43 % Mn.

Рис. 53. — Дилатометрическая кривая чугуна, содержащего 2,73 % Mn.

Рис. 54. — Дилатометрическая кривая чугуна, содержащего 3 % Mn.

Рис. 55. — Влияние содержания марганца на постоянное сокращение чугунов с узелковым графитом.

Рис. 56. — Влияние содержания марганца на расположение точек превращения.

Рис. 57. — Влияние содержания марганца на стойкость к окислению в воздухе при 700°.

Рис. 58. — Влияние содержания марганца на стойкость к окислению в воздухе при 850°.

Рис. 59. — Влияние содержания марганца на стойкость к окислению в воздухе при 1000°.

Рис. 60. — Вид разреза испытываемых образцов, подвергнутых окислению при 850° в течение 220 часов.

Рис. 61. — Вид разреза испытываемых образцов, подвергнутых окислению при 1000° в течение 25 часов.

ÉTUDE SUR LE COMPORTEMENT DES FONTES À GRAPHITE NODULAIRE À DES TEMPÉRATURES ÉLEVÉES

(RÉSUMÉ)

Après une analyse détaillée des facteurs qui produisent l'oxydation et le gonflement des fontes, et après avoir passé en revue les fontes réfractaires actuellement connues, les Auteurs aboutissent à la conclusion que les fontes à graphite nodulaire peuvent présenter, en sus des propriétés mécaniques supérieures, une bonne résistance à l'oxydation et au gonflement.

On étudie, dans la première partie, les fontes à graphite nodulaire, à 2—6% de silicium, et dans la seconde partie, les fontes à graphite nodulaire à 1—3% de manganèse. On étudie les microstructures, les propriétés mécaniques, la capacité d'usinage, la stabilité dimensionnelle à chaud, les caractéristiques dilatométriques et la résistance à l'oxydation. Pour apprécier la résistance à l'oxydation, on a considéré, à titre d'étalon, l'augmentation du poids, due à l'action de l'oxygène de l'air, exprimée en grammes par mètre carré et heure, ou en milligrammes par centimètre carré. Pour une certaine température et une durée de

75 heures, on a considéré admissible une augmentation de poids inférieure à 3 gr/m² et heure.

A. En considérant les propriétés mécaniques, la stabilité dimensionnelle à de hautes températures et la résistance à l'oxydation, les fontes à graphite nodulaire alliées au silicium, se divisent en deux groupes:

— fontes à teneur en silicium inférieure à 4,5%;

— fontes à teneur en silicium supérieure à 4,5%.

Les fontes du premier groupe sont résistantes à l'oxydation jusqu'à une température de 850°C y compris; elles ont une bonne stabilité dimensionnelle, opposent une grande résistance à l'extension (55—60 kg/mm²) et à la flexion (98—85 kg/mm²), sont tenaces et se prêtent à l'usinage.

Les fontes du second groupe résistent à l'oxydation jusqu'à 950°C; elles ont une très bonnes stabilité dimensionnelle, sont plus résistantes à l'extension (60—65 kg/mm²) mais elles sont moins tenaces et se prêtent moins à l'usinage

Augmentation du poids après 75 heures, à 850°C et 950°C:

% Si	2,00	2,80	4,25	5,04	5,65
Augmentation du poids, gr/m² et heure, à 850°C	2,80	2,80	2,00	0,27	0,30
Augmentation du poids, gr/m² et heure, à 900°C	13,00	19,00	18,00	0,60	0,70
Augmentation du poids, gr/m² et heure, à 950°C	24,50	30,00	27,00	1,80	1,90

B. Les fontes à graphite nodulaire alliées au manganèse se divisent en deux groupes.

— fontes à teneur en manganèse inférieure à 2,5%;

— fontes à teneur en manganèse d'environ 3%.

Les fontes du premier groupe ont une bonne stabilité dimensionnelle à des températures élevées et résistent à l'oxydation jusqu'à la température de 700°C, inclusivement.

Les fontes à environ 3% de manganèse ont une meilleure stabilité dimensionnelle que les fontes du premier groupe et résistent à l'oxydation jusqu'à 950°C inclusivement.

Augmentation du poids après 75 heures, à 700°C et 950°C:

% Mn	1,12	1,51	2,43	3,00
Augmentation du poids, gr/m² et heure, à 700°C	1,26	2,27	2,20	0,27
Augmentation du poids, gr/m² et heure, à 950°C	36,60	38,40	36,30	1,60

En général, les fontes à graphite nodulaire alliées à 1—3% de manganèse se prêtent à l'usinage par détachement en copeaux, et leur résistance à l'extension (58—62 kg/mm²) ainsi que leur résistance à la flexion (environ 100 kg/mm²) atteignent des valeurs élevées.

Au point de vue de la résistance à l'oxydation, de la stabilité dimensionnelle à de hautes températures et des propriétés mécaniques liées à la plasticité, les fontes à graphite nodulaire alliées au manganèse sont inférieures aux fontes à graphite nodulaire alliées au silicium.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1 et 2. — Les microstructures de la fonte ordinaire à 2% de Si, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 3 et 4. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 2% de Si, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 5 et 6. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 2,8% de Si, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 7 et 8. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 4,25 % de Si, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 9 et 10. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 5,4% de Si, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 11 et 12. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 5,65% de Si, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 13. — Influence de la teneur en silicium sur la dureté.

Fig. 14. — Influence de la teneur en slicium sur la résistance à la traction et sur l'allongement.

Fig. 15. — Influence de la teneur en silicium sur la résistance à la flexion et sur la flèche.

Fig. 16. — Aspect des éprouvettes soumises à la flexion.

Fig. 17. — Iinfluence de la teneur en silicium sur la résilience.

Fig. 18. — Iinfluence de la teneur en silicium sur la résistance à l'usinage.

Fig. 19. — Courbe dilatométrique de la fonte ordinaire à 2% de Si.

Fig. 20. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 2% de Si.

Fig. 21. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 2,8% de Si.

Fig. 22. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 4,25% de Si.

Fig. 23. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 5,04% de Si.

Fig. 24. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 5,65% de Si.

Fig. 25. — Influence de la teneur en silicium sur la contraction permanente des fontes nodulaires.

Fig. 26. — Influence de la teneur en silicium sur la position des points de transformation.

Fig. 27. — Influence de la teneur en silicium sur la résistance à l'oxydation à l'air, à 700°C.

Fig. 28. — Influence de la teneur en silicium sur la résistance à l'oxydation à l'air, à 850°C.

Fig. 29. — Influence de la teneur en silicium sur la résistance à l'oxydation à l'air, à 1000°C.

Fig. 30. — Microstructure de la fonte à graphite lamellaire, après 25 heures d'oxydation, à 1000°C.

Fig. 31. — Microstructure de la fonte à graphite nodulaire, après 220 heures d'oxydation, à 1000°C.

Fig. 32. — Aspect des sections des éprouvettes, soumises pendant 220 heures à l'oxydation, à 850°C.

Fig. 33. — Aspect des sections des éprouvettes, soumises pendant 25 heures à l'oxydation, à 1000°C.

Fig. 34 et 35. — Les microstructures de la fonte ordinaire à 1,12% de Mn, non attaquée et attaquée: × 100.

Fig. 36 et 37. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 1,12% de Mn, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 38 et 39. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 1,51% de Mn. non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 40 et 41. — Les microstructures de la fonte à graphite nodulaire à 1,70% de Mn, non attaquée et attaquée; × 100.

Fig. 42. — Microstructures de la fonte à 2,73% de Mn, non attaquée.

Fig. 43. — Microstructure de la fonte à 3% de Mn, non attaquée.

Fig. 44. — Influence de la teneur en manganèse sur la dureté.

Fig. 45. — Influence de la teneur en manganèse sur la résistance à la traction et sur l'allongement.

Fig. 46. — Influence de la teneur en manganèse sur la résistance à la flexion et sur la flèche.

Fig. 47. — Aspect des éprouvettes soumises à la flexion.

Fig. 48. — Influence de la teneur en manganèse sur la résistance à l'usinage.

Fig. 49. — Courbe dilatométrique de la fonte ordinaire à 1,12% de Mn.

Fig. 50. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 1,12% de Mn.

Fig. 51. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 1,5% de Mn.

Fig. 52. — Courbe dilatométrique de la fonte à graphite nodulaire à 2,43% de Mn.

Fig. 53. — Courbe dilatométrique de la fonte à 2,73% de Mn.

Fig. 54. — Courbe dilatométrique de la fonte à 3% de Mn.

Fig. 55. — Influence de la teneur en Mn sur la contraction permanente des fontes nodulaires.

Fig. 56. — Influence de la teneur en Mn sur la position des points de transformation.

Fig. 57. — Influence de la teneur en Mn sur la résistance à l'oxydation à l'air, à 700°C.
Fig. 58. — Influence de la teneur en Mn sur la résistance à l'oxydation à l'air, à 850°C.
Fig. 59. — Influence de la teneur en Mn sur la résistance à l'oxydation à l'air, à 1000°C.
Fig. 60. — Aspect des sections des éprouvettes, soumises pendant 220 heures à l'oxydation, à 850°C.
Fig. 61. — Aspect des sections des éprouvettes, soumises pendant 25 heures à l'oxydation, à 1000°C.

BIBLIOGRAFIE

1. I. G. Ghirsovici, *Turnarea fontei.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1951, p. 257—267.
2. G. V. Achimov, *Principiile coroziunii şi protecţiei metalelor.* Moscova, 1945. p. 65—82.
3. E. Morgan a. A. L. Norbury, *The effect of carbon and silicon on the growth and scaling of grey cast iron.* The J. Iron and Steel Inst., 1931, vol. I, p. 413—444.
4. H. Carpenter a. J. M. Robertson, *Metals.* Londra, 1939, p. 1227—1230.
5. E. Piwowarschi, *Hochwertiges Gusseisen.* Berlin, 1942. p. 605—619.
6. F. Giolitti, *Refractory cast Irons.* Metal-Progres, noiembrie, 1937, p. 680.
7. H. W. Uhlitzsch u. A. Keller, *Beitrag zur Kenntnis der aluminiumlegierten Gusseisen.* Die neue Giesserei, 1949, caietul 8, p. 227—232.
8. C. I. Vascenko, *Piese turnate din aliaje rezistente la agenţi chimici.* I.D.T., Bucureşti, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE ŞI TEHNOLOGIE

CONTRIBUŢII LA STABILIREA INFLUENŢEI DIFERITELOR TRATAMENTE HIGRO- ŞI HIDROTERMICE ASUPRA PROPRIETĂŢILOR FIZICO-MECANICE ALE LEMNULUI DE FAG

DE

GH. I. PANĂ

Introducere

Într-o publicaţie anterioară [1] au fost stabilite modificările permanente, ca mărime şi sens, produse prin diferite tratamente higro- şi hidrotermice asupra elasticităţii şi rezistenţei lemnului de fag.

În lucrarea de faţă se continuă cercetările anterioare, stabilindu-se influenţa acestor tratamente şi asupra altor proprietăţi mecanice (despicare şi duritate), precum şi asupra principalelor proprietăţi fizice (greutate specifică, contragere şi absorbţie de apă) şi tehnologice (uzură şi rezistenţă la tăiere dinamică prin aşchiere).

Modificările, pe care le aduc aceste tratamente proprietăţilor menţionate ale lemnului alb şi inimii roşii de fag, nu au fost cercetate şi nu se cunosc nici în practică.

Din această cauză, în industria de prelucrare mecanică există o oarecare confuzie, alteori rutină la impunerea condiţiilor tehnice de recepţie şi de utilizare a lemnului de fag.

În afară de valorile absolute şi comparative obţinute pentru proprietăţile lemnului tratat şi netratat, în lucrare se determină, pe baza modificărilor aduse de aceste tratamente, durata optimă de aburire industrială, în raport cu diferitele utilizări ale lemnului, precum şi limitele parametrilor regimului de aburire şi fierbere sub presiune, de la care se produce degradarea chimică şi mecanică a lemnului.

A. METODE DE LUCRU

a. *Materialul şi tratamentul aplicat*

Materialul utilizat la încercări, tratamentul aplicat şi modul de debitare în epruvete au fost aceleaşi ca în studiul precedent [1].

Astfel lemnul de fag *(Fagus silvatica* L.*)* a provenit din pădurea Izvorul fără Nume, situată la altitudinea de 700—900 m pe valea rîului Buzău (Reg. Ploeşti, r. Nehoiu).

Tratamentul aplicat materialelor a constat din:

— aburire industrială pe timp de 24, 36 şi 42 ore (seria I de experimentări);

— aburiri şi fierberi în autoclav la diferite trepte de presiune: 0,1; 1,2; 3; 4; 5 şi 7 at (circa 102...170°C) şi pe durate diferite: 20, 50, 100 şi 150 minute (seria a II-a de experimentări).

La prima serie de experimentări s-a utilizat material neselecţionat, cu inima roşie de culoare roz închis, deci într-o fază mai avansată de formare (cherestea obişnuită din fabrică), iar la a doua serie, material selecţionat, cu inima roşie de culoare roz deschis (palid) deci în prima fază de formare (piese pentru doage).

b. *Epruvetele şi modul lor de încercare*

Pentru determinarea greutăţii specifice, contragerii*), durităţii statice (după Janka) şi rezistenţei la despicare, s-au aplicat metodele standardizate (STAS 84—51, 85—51, 2417—51 şi 1038—50).

Determinarea absorbţiei de apă în atmosferă saturată de vapori ($\varphi = 100\%$) şi determinarea absorbţiei de apă prin imersie au fost făcute prin introducerea epruvetelor în stare anhidră, cu dimensiunile 2/2/2,5 cm (2,5 cm longitudinal), în mediile respective şi cîntărirea lor la anumite intervale de timp. Creşterea în greutate s-a exprimat procentual faţă de greutatea epruvetelor în stare anhidră.

Determinarea durităţii dinamice s-a executat cu ajutorul unui aparat special [3]**) care produce pe suprafaţa lemnului, prin intermediul unei bile, o sarcină dinamică corespunzătoare unei sarcini statice anumite (la încercări s-a utilizat bila cu $d = 10$ mm şi sarcina de 250 kg). Pentru calcularea durităţii încercate astfel, s-a aplicat formula Brinell ***) pentru determinările statice ale durităţii, scopul încercărilor fiind stabilirea unor valori comparative.

Uzura a fost determinată cu o maşină de încercat [2] prevăzută cu hîrtie de şlefuit. Încercările au fost făcute pe suprafaţa radială a pieselor, cu hîrtie de şlefuit cu grăunţi de carbură de siliciu nr. 220 ca abraziv, direcţia de şlefuire fiind succesiv paralelă şi perpendiculară pe fibre; schimbarea hîrtiei s-a făcut după fiecare 200 de frecări, odată cu schimbarea sensului de frecare pe suprafaţa epruvetei ****).

Numărul total de frecări pentru fiecare epruvetă a fost de 2000. Măsurarea grosimii epruvetei s-a făcut după 1000 şi 2000 de frecări.

Rezistenţa la tăiere dinamică prin aşchiere s-a măsurat cu ajutorul unui aparat special conceput [4].

Toate determinările şi încercările s-au efectuat la temperatura de 20 ± 2°C.

Umiditatea lemnului a fost de 10...12%, cu excepţia menţionată la determinarea absorbţiei.

Valorile greutăţii specifice, rezistenţei la despicare şi durităţii au fost recalculate pentru umiditatea de 15%.

---

*) Coeficientul de contragere pentru variaţia umidităţii cu 1% în intervalul de umidităţi $u = 10...12\%$ şi $u = 0\%$.

**) Aparatul pentru încercat duritatea prin lovire, construit de prof. R. Baumann şi ing. H. Steinrüch [3].

***) $H_B = \dfrac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$, în care: P = sarcina aplicată pe bilă, în kg,

D = diametrul bilei, în mm.

d = diametrul urmei lăsată pe bilă, în mm.

****) A fost necesară schimbarea hîrtiei după un număr mai mic de frecări, faţă de cel indicat în instrucţiunile de folosire a maşinii, din cauza dezlipirii grăunţilor abrazivi, mai rapidă la hîrtia utilizată.

B. REZULTATELE CERCETĂRILOR PRIVITOARE LA PROPRIETĂȚILE FIZICO-MECANICE COMPARATIVE ALE LEMNULUI DE FAG ALB ȘI INIMĂ ROȘIE, NETRATAT ȘI TRATAT

a. *Rezultatele privitoare la lemnul netratat*

Valorile obținute și rezultatele prelucrării lor prin metoda statisticii matematice sînt cuprinse în tabloul nr. 1.

Din examinarea lor se constată o diferență certă ($Cd \geqslant 3$) de proprietăți între lemnul alb și inima roșie, pentru contragere, absorbție de apă prin imersie, rezistență la despicare și duritatea Janka.

Pentru restul proprietăților cercetate (greutatea specifică, absorbție de apă din atmosferă saturată, uzură și rezistența la tăiere dinamică prin așchiere) apare numai o tendință de creștere sau scădere ($Cd < 3$) a valorilor obținute la lemnul alb în comparație cu inima roșie.

Gradul de alterare al inimii roșii joacă de asemenea un rol important în mărimea și sensul variației unei proprietăți a lemnului.

1. *Contragerea* tangențială și volumică a inimii roșii în faza incipientă de alterare (materialul selecționat) este mai mare decît a lemnului alb, respectiv cu 10,6% și 7,5%. Contragerea radială are o tendință de scădere la inima roșie față de lemnul alb.

La lemnul neselecționat nu s-a constatat o diferență de contragere volumică între lemnul alb și inima roșie; la lemnul din inima roșie s-a observat însă o creștere a contragerii în direcție tangențială și o scădere în direcție radială. În acest caz s-ar produce numai o deformare diferită a piesei fără schimbare de volum.

În general, contragerea lemnului din inima roșie, în primă fază de alterare (materialul selecționat), prezintă variații mai mari decît inima roșie trecută de această fază (materialul neselecționat).

Contragerea diferită a inimii roșii s-ar putea explica prin proporția diferită a celulozei și ligninei față de ale lemnului alb și prin prezența în pereții celulari a unor substanțe de incrustare, cu un coeficient de contragere diferit decît acela al celulozei și ligninei.

2. *Absorbția de apă după un timp de* 50 *și* 124 *zile de imersie* este mai mică la lemnul din inima roșie decît la cel alb, respectiv 6,2% și 3,1%.

Prezența tilelor, a gomelor etc. în lemnul din inima roșie, explică în parte capacitatea sa mai redusă de absorbție a apei prin imersie.

Într-o fază mai avansată de formare, inima roșie absoarbe proporțional mai puțină apă (−6,2%) decît într-o fază inițială de formare (−3,1%).

3. *Rezistența la despicare* a inimii roșii este micșorată apreciabil, atît în plan radial, cît și tangențial (12,3...13,2%) față de lemnul alb, la materialul selecționat.

La materialul neselecționat nu s-au constatat diferențe de rezistență, între lemnul alb și inima roșie, deși aceasta era de formație mai avansată.

În acest stadiu de alterare, substanțele incrustante, gomele etc. produc probabil o adeziune mai mare a fibrelor și o creștere a rezistenței la despicare (în general la toate eforturile transversale).

4. *Duritatea statică* este mai redusă (5,7...8,5%) la inima roșie din materialul selecționat, față de inima roșie din lemnul neselecționat, care este într-o fază mai avansată de formare și la care se constată o tendință de creștere a durității, atît statice cît și dinamice.

Tablo

Indicii proprietăţilor fizico-mecanice ale lemnului de fag şi interpreta

Nr. crt.	Indicele: Denumirea	Indicele: Simbol (unit. de măsură)	Lemn alb: Nr. valorilor observate n	Media aritmetică $\bar{X}_1$	Abaterea medie pătratică (standard) σ	Eroarea medie aritmetică m_1	Coeficientul de variaţie $V\%$	Precizia încercă $P\%$
1	Greutatea specifică aparentă	γ (g/cm³)*)	5 1 (4 0)	0,657 (0,642)	0,036 (0,026)	0,005 1 (0,004 1)	5,48 (4,05)	0,78 (0,64)
2	Coeficient de contragere: —radială....	$\alpha_{\%}$ α_{rd}	5 1 (4 0)	0,185 (0,200)	0,019 (0,030)	0,002 7 (0,004 7)	10,26 (15,00)	1,46 (2,35)
	— tangenţială.....	α_{tg}	5 1 (4 0)	0,311 (0,330)	0,031 (0,034)	0,004 3 (0,003 4)	9,97 (10,30)	1,38 (1,64)
	— volumică	α_v	5 1 (4 0)	0,511 (0,530)	0,041 (0,052)	0,005 7 (0,008 2)	8,02 (9,81)	1,12 (1,55)
3	Absorbţia de apă în atmosferă saturată de vapori ($\varphi = 100\%$)**	A_v (%)	3 5 (2 0)	30,8 (29,0)	1,51 (1,58)	0,255 (0,354)	4,90 (5,45)	0,83 (1,22)
4	Absorbţia de apă prin imersie***)	A_a (%)	3 4 (2 0)	131,5 (121,3)	9,00 (4,92)	1,544 (1,099)	6,87 (4,07)	1,17 (0,91
5	Rezistenţa la despicare paralel cu fibrele: — în plan radial..	σ_d (kg/cm²) σ_{drd}	3 3 (3 8)	6,9 (6,8)	1,63 (137)	0,284 0 (0,222 4)	23,62 (20,15)	4,12 (3,27
	— în plan tangenţial ..	σ_{dtg}	3 9 (3 6)	12,5 (12,2)	1,81 (1,62)	0,289 6 (0,270 0)	14,48 (13,28)	2,32 (2,21
6	Duritatea Janka pe secţiunea: —radială..	H_{Jk} (kg/cm²) $H_{Jk\,rd}$	3 2 (4 0)	303 (336)	37,19 (34,15)	6,58 2 (5,40 3)	12,26 (10,16)	2,1 1,6
	— tangenţială.....	$H_{Jk\,tg}$	— (4 0)	— (343)	— (32,63)	— 5,16 3	— (9,51)	— 1,5

*) Valorile între paranteze sînt pentru materialul selecţionat, iar celelalte pentru materialul neselecţionat.
**) Valorile în afară de paranteze sînt obţinute după 120 zile, iar cele între paranteze după 50 zil
***) Valorile în afară de paranteze sînt după 124 zile, iar cele între paranteze, după 50 zile de im

. 1

r după statistica matematică (lemn alb și inimă roșie)

Inimă roșie						Diferența mediilor aritmetice	Certitudinea diferenței
Nr. alorilor bservate	Media aritmetică	Abaterea medie pătratică (standard)	Eroarea medie aritmetică	Coeficientul de variație	Precizia încercării		
n	$\overline{X}_2$	σ	m_2	$V\%$	$P\%$	$(\pm\%)$	Cd
3 2 (4 0)	0,672 (0,633)	0,034 (0,025)	0,006 0 (0,003 9)	5,06 3,95	0,893 (0,616)	+2,3 (−1,4)	−1,9 (+1,6)
3 2 (4 0)	0,175 (0,195)	0,020 (0,025)	0,003 5 (0,003 9)	11,43 (12,82)	2,01 (2,00)	−5,4 (−2,5)	+2,3 (+0,8)
3 2 (4 0)	0,321 (0,365)	0,035 (0,028)	0,006 2 (0,004 4)	10,90 (7,67)	1,93 (1,21)	+3,2 (+10,6)	−1,3 (−5,0)
3 2 (4 0)	0,511 (0,570)	0,041 (0,036)	0,007 3 (0,005 7)	8,02 (6,31)	1,43 (1,00)	0 (+7,5)	0 (−4,4)
2 9 (2 0)	31,3 (29,7)	1,47 (0,71)	0,273 (0,159)	4,74 (2,39)	0,87 (0,54)	+1,6 (+2,4)	−1,4 (−1,8)
2 9 (2 0)	123,3 (117,5)	9,00 (10,31)	1,670 (2,301)	7,30 (8,77)	1,36 (1,96)	−6,2 (−3,1)	+3,7 (+1,5)
3 4 (3 6)	7,0 (5,9)	1,61 (0,80)	0,276 2 (0,133 3)	23,00 (13,56)	3,95 (2,26)	+1,5 (−13,2)	−0,3 (+3,5)
3 6 (3 0)	12,4 (10,7)	1,73 (1,40)	0,288 3 (0,255 9)	13,95 (13,08)	2,33 (2,39)	− 0,80 (−12,30)	+0,2 (+4,0)
2 8 (4 0)	313 (317)	44,45 (34,15)	8,403 (5,403)	14,20 (10,77)	2,68 (1,70)	+3,3 (−5,7)	−1,2 (+2,7)
— (4 0)	— (314)	— (31,27)	— (4,948)	— (9,96)	— (1,58)	— (−8,5)	— (+4,1)

diționare a epruvetelor.
pruvetelor.

Tabloul nr

Nr. crt.	Indicele: Denumirea	Indicele: Simbol (unit de măsură)	Lemn alb: Nr. valorilor observate n	Media aritmetică $\bar{X}_1$	Abaterea medie pătratică (standard) σ	Eroarea medie aritmetică m_1	Coeficientul de variație $V^0/_0$	Precizi încercă $P^0/_0$
	Duritatea dinamică pe secțiunea: —transversală	H_D (kg/mm²) $H_{D\,tr}$	3 2 (3 8)	12,1 (11,9)	0,59 (0,42)	0,10 4 (0,06 8)	4,88 (3,53)	0,86 (0,57)
	— radială	$H_{D\,rd}$	35 (40)	6,8 (7,1)	0,75 (0,38)	0,127 (0,060 2)	11,03 (5,35)	1,87 (0,85)
	— tangențial	$H_{D\,tg}$	35 —	7,1 —	0,71 —	0,120 —	10,00 —	1,69 —
7	Uzura	Uz (mm)	19 (10)	0,40 (0,43)	0,095 (0,106)	0,022 (0,034)	23,75 (24,65)	5,50 (7,91
8	Rezistența la tăiere dinamică prin aşchiere (energia absorbită)*)	$W\|\|_{rd}$ (kg/cm²)	7 (7)	0,036 2 (0,040 7)	0,003 3 (—)	0,001 3 (—)	9,12 (—)	3,59 (—)

*) Lucrul mecanic specific, aşchie 1 cm² — grosime 0,12 mm.

5. *Uzura* lemnului alb este mai mare cu 2,5...16,3% decît a inimii roşii. *Rezistența la tăiere dinamică* înregistrează de asemenea o descreştere de 2,7... la 11,3% la inima roşie faţă de lemnul alb.

Valorile mai mari ale durităţii, uzurii şi rezistenţei la tăiere, ale inimii roşii, într-o fază mai înaintată de alterare, s-ar putea explica tot prin tiloza mai avansată, prezenţa în cantitate mai mare a gomelor şi prin incrustarea mai puternică a pereţilor celulari în această fază.

6. *Greutatea specifică şi higroscopicitatea* înregistrează diferenţe mici (1,4... 2,4%) între lemnul alb şi inima roşie. Se constată totuşi tendinţa inimii roşii de a fi mai higroscopică decît lemnul alb, spre deosebire de absorbţia de apă prin imersie.

b. *Rezultatele privitoare la lemnul aburit industrial*

În tabloul nr. 2 sînt date diferenţele procentuale între valorile obţinute la lemnul de fag alb şi inima roşie aburit industrial pe de o parte şi cele obţinute la lemnul netratat pe de altă parte.

Din analizarea acestor date se constată, că influenţa tratamentului higrotermic asupra proprietăţilor lemnului de fag este pozitivă sau negativă şi varia-

(continuare)

Inimă roşie						Diferenţa mediilor aritmetice	Certitudinea diferenţei
Nr. valorilor observate n	Media aritmetică $\overline{X}$	Abaterea medie pătratică (standard) σ	Eroarea medie aritmetică $m_{\bar{x}}$	Coeficientul de variaţie $V\%$	Precizia încercării $P\%$	$(\pm\%)$	C_d
27 (38)	12,1 (11,8)	0,78 (0,41)	0,150 (0,067)	6,45 (3,47)	1,24 (0,56)	0 (−0,8)	(+0,1) 0
28 (40)	6,9 (7,0)	0,81 (0,41)	0,153 (0,065)	11,74 (5,86)	2,22 (0,93)	+1,5 (−1,4)	−0,5 (+1,2)
28 —	7,2 —	0,78 —	0,147 —	10,83 —	2,04 —	+1,4 —	−0,5 —
14 (10)	0,41 (0,50)	0,120 (0,071)	0,032 (0,023)	29,27 (14,20)	7,80 (4,6)	+ 2,5 (+16,3)	−0,3 (−1,7)
7 (7)	0,035 2 (0,035 4)	0,004 2 (−)	0,001 6 (−)	11,93 (−)	4,55 (−)	− 2,7 (−11,3)	+0,5 (−)

bilă în funcţie de durata aplicării tratamentului şi de structura fizico-chimică a lemnului, atît a celui alb cît şi a inimii roşii.

În comparaţie cu lemnul netratat, proprietăţile lemnului tratat prezintă variaţii procentuale limită de la −18,3% pînă la +23,7%, valori care arată că influenţa tratamentului este destul de importantă.

1. *Greutatea specifică* aparentă a lemnului este puţin influenţată de aburire. Se observă o creştere a ei doar de 2,9...4 % numai la inima roşie, la lemnul alb nefiind vreo diferenţă sensibilă.

Creşterea greutăţii specifice s-ar putea explica prin producerea unei uşoare densificări a lemnului, datorită aburirii.

2. *Contragerea* lemnului este influenţată destul de mult de aburire, constatîndu-se o micşorare a contragerii longitudinale (4,6...18,2 %) şi o creştere a contragerii radiale (0...17,3%), tangenţiale (0...6,8 %) şi volumice (1,4... 10,1 %).

Creşterea cea mai mare se produce la lemnul alb şi la cel din inima roşie aburit 36 ore, urmat apoi de cel aburit 42 şi 24 ore.

Influenţa aburirii industriale asupra contragerii nu am găsit-o menţionată în literatură.

Tabloul nr. 2

Diferența procentuală dintre valorile indicilor proprietăților fizico-mecanice ale lemnului de fag (alb și inima roșie) aburit industrial și valorile indicilor lemnului netratat

Lot nr.	Timpul de aburire ore	Felul lemnului	Proprietățile fizico-mecanice ale lemnului													
			γ_{15}	α_l	α_{rd}	α_{tg}	α_v	A_v	A_a	σ_d rd	σ_d tg	H_{Jk} rd	H_D tr	H_D rd	H_D tg	U_z rd	$W_{\|\|}$ rd
1	24	alb	+ 0,9	— 4,6	— 2,2	+ 5,7	+ 1,9	+0,32	—2,03	— 3,1	+10,1	+10,1	— 4,3	+ 6,9	+ 0,3	+10,2	— 0,6
		inimă roșie	+ 4,0	+ 5,0	+ 3,4	0	+ 1,4	+ 2,9	— 1,1	—18,3	—11,2	+ 5,8	— 2,2	— 4,5	+ 6,2	+ 1,5	— 9,0
2	36	alb	+ 0,1	—13,7	+ 7,5	+ 5,9	+ 6,1	—2,56	+1,12	— 8,1	+ 5,3	— 5,3	— 5,4	—10,1	+ 2,6	+10,1	— 1,1
		inimă roșie	+ 2,9	— 8,3	+17,3	+ 6,8	+10,1	+0,95	— 0,5	+ 7,5	+ 5,6	+ 5,7	— 5,1	+ 0,7	— 0,1	+23,7	—14,3
3	42	alb	0	— 5,0	+ 5,5	+ 4,4	+ 4,3	+0,33	+0,74	—14,7	— 9,0	— 1,8	— 3,3	— 1,8	— 3,0	+15,1	— 4,0
		inimă roșie	+ 3,4	—18,2	+ 6,8	0	+ 1,5	+1,27	—2,16	0	+ 7,7	+10,0	— 3,3	+ 8,0	+ 3,8	+17,3	+ 8,3

3. *Absorbția de apă din atmosferă saturată de vapori*, după o durată de 120 zile, înregistrează variații mici (−2,56 % la lemnul alb și +2,9 % la cel din inima roșie).

Variații în timp se pot urmări după diagramele*) din figura 1, și se constată că absorbția este mai mare la lemnul alb tratat și netratat, decît la cel din inima roșie în primele 30 zile, după care timp se produce o inversiune, lemnul din inima roșie devenind mai higroscopic.

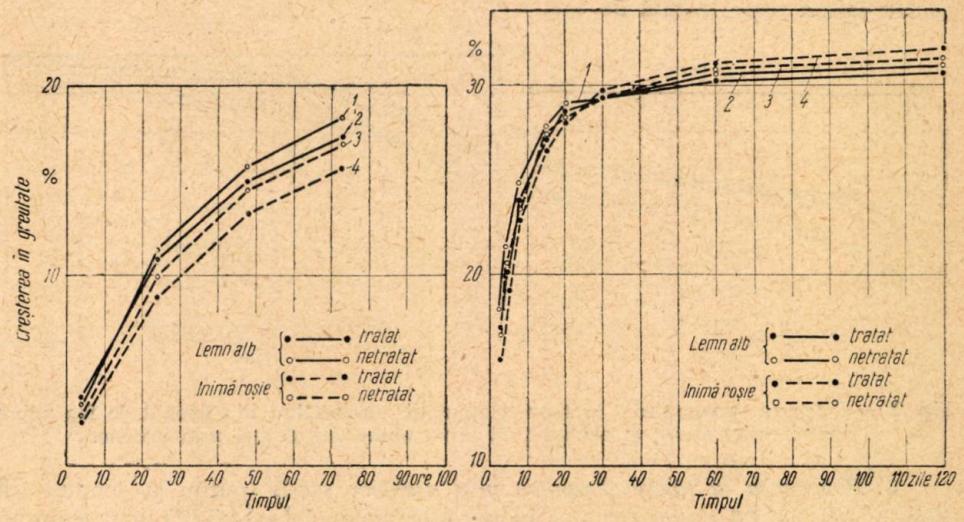


Fig. 1. — Creșterea procentuală în timp a greutății epruvetelor din lemnul de fag (alb, și inima roșie), aburit și neaburit, prin absorbția apei din atmosferă saturată de vapori ($\varphi = 100\%$).

Totodată, după 30—40 zile se produce o inversiune a higroscopicității lemnului din inima roșie, devenind mai mare la cel tratat.

4. *Absorbția de apă prin imersie*, după o durată de 124 zile, înregistrează variații reduse de la −2,16 % la +1,12 %, cu valori mai mari negative.

După 15—25 zile de imersie, atît absorbția lemnului alb, cît și a inimii roșii netratate, se mențin mai ridicate decît a lemnului tratat.

Spre deosebire de cazul precedent, lemnul alb absoarbe pe toată durata imersiei mai multă apă decît inima roșie, așa cum se vede din figura 2. După 4...6 ore de imersie, diferența este de 100 %, iar după 124 zile de 8 %.

5. *Rezistența la despicare* este influențată puternic prin aburire, în general în sens negativ (scăderi de rezistență pînă la 18,3 %).

Scăderile cele mai mari se înregistrează la inima roșie (−11,2...18,3 %), cînd durata de aburire este de 24 ore și la lemnul alb (−9...14,7 %), cînd durata este de 42 ore.

Aburirea timp de 36...42 ore are însă o influență pozitivă asupra rezistenței inimii roșii.

6. *Duritatea* statică radială a înregistrat creșteri (5,3...10,1 %) pentru inima roșie, după orice durată de tratament. La lemnul alb, duritatea a crescut numai cînd durata tratamentului a fost de 24 ore (10 %) și a scăzut cînd aburirea a durat 36—42 ore (−5,3... −1,8 %).

*) Valorii medii pentru creșterea în greutate a probelor tratate, 24, 36 și 42 ore.

Duritatea dinamică pe secţiunea transversală scade prin tratament cu 2,2 pînă la 5,4 %, atît la lemnul alb, cît şi la inima roşie. Duritatea dinamică pe secţiunile radiale şi tangenţiale creşte pînă la 8 %, la inima roşie şi scade pînă la 10,1 %, la lemnul alb.

7. *Uzura* lemnului alb şi a inimii roşii creşte apreciabil (cu 1,5...27 %), prin aburire, odată cu durata tratamentului. Cea mai mare uzură, de 15,1 şi 23,7 %, se înregistrează respectiv pentru lemnul alb tratat timp de 42 ore şi pentru inima roşie tratată 36 ore.

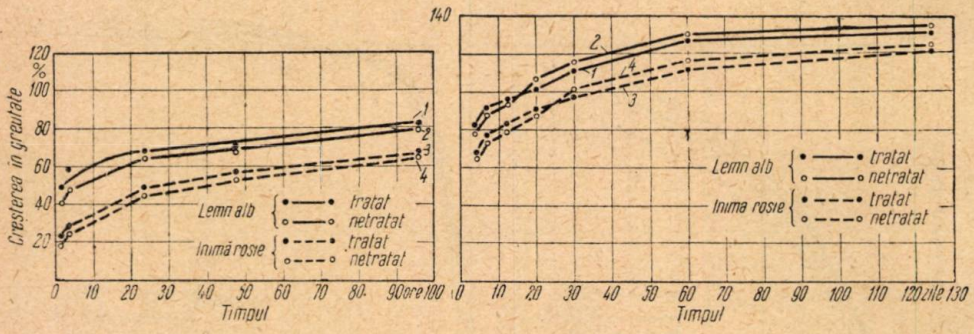


Fig. 2. — Creşterea procentuală în timp a greutăţii epruvetelor din lemnul de fag (alb şi inima roşie) aburit şi neaburit, în urma absorbţiei de apă prin imersie.

8. *Rezistenţa la tăiere dinamică prin aşchiere* scade puţin la lemnul alb (0,6... 4,0 %). La inima roşie, scăderea este maximă (—14,3 %) pentru durata de tratament de 36 ore, mai mică (—9 %) pentru durata de 24 ore, producîndu-se însă o creştere de rezistenţă (8,3 %) după aburire, timp de 48 ore.

★

Densificarea lemnului, concomitentă cu reducerea adeziunii fibrelor şi spălarea unor substanţe din lemn prin aburire, explică variaţiile diferitelor proprietăţi, ca sens şi valoare.

c. *Rezultatele privitoare la lemnul aburit şi fiert sub presiune*

Diferenţele procentuale între valorile*) indicilor proprietăţilor lemnului tratat prin aburire sau fierbere sub presiune, faţă de cel netratat, sînt prezentate în tablourile nr. 3, nr. 4, nr. 5 şi nr. 6 şi în graficele din figurile 3, 4, 5 şi 6.

Din examinarea acestor date, se constată că tratamentele pe timp mai scurt (la presiuni pînă la 3 at., timp de 20...50 min.) produc în general efecte similare (asupra proprietăţilor studiate ale lemnului), cu acelea rezultate prin aburirea sa industrială de 36...42 ore.

Tratamentele forte la presiune de 3...7 at timp de 100...150 min., produc o schimbare accentuată a proprietăţilor, iar cînd sînt prea puternice, conduc la o degradare a lemnului.

De asemenea, se constată o deosebire între modul de comportare al lemnului alb şi al inimii roşii, precum şi influenţa diferită a aburirii sau a fierberii. Astfel:

*) Valorile obţinute, în marea lor majoritate, urmează o lege de variaţie generală, cu unele excepţii datorite numărului mic de încercări efectuate (pentru fiecare caz două epruvete comparative). Din această cauză, valorile mult dispersate, faţă de mersul general al variaţiei respective, au fost considerate ca erori.

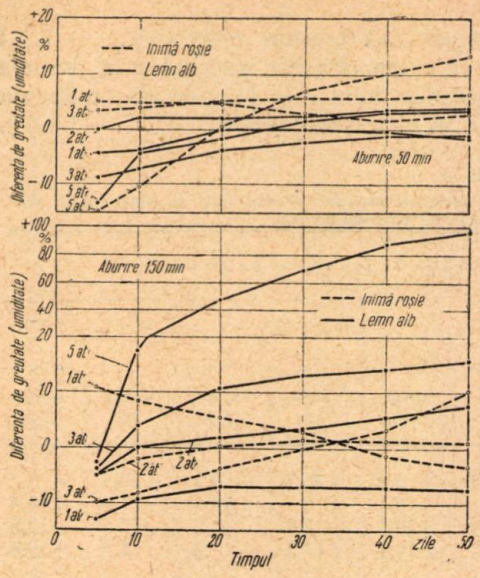


Fig. 3. — Variaţia în timp a diferenţei procentuale a greutăţii (umidităţii) lemnului de fag (alb şi inima roşie) aburit sub presiune, în comparaţie cu lemnul netratat, prin absorbţie de apă din atmosferă saturată cu vapori ($\varphi = 100\%$)

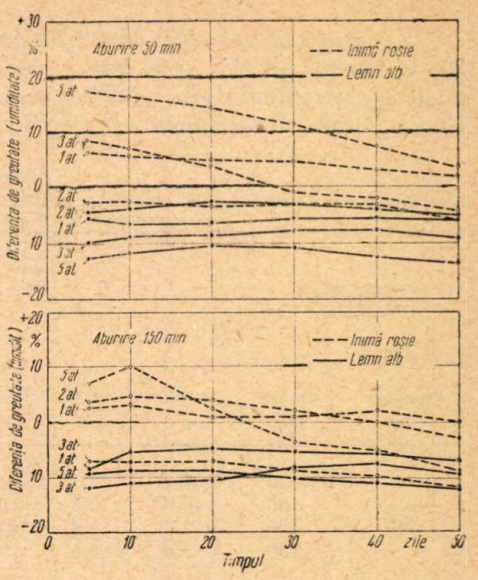


Fig. 5. — Variaţia în timp a diferenţei procentuale a greutăţii (umidităţii) lemnului de fag (alb şi inima roşie) aburit sub presiune, în comparaţie cu lemnul netratat, datorită absorbţiei de apă prin imersie.

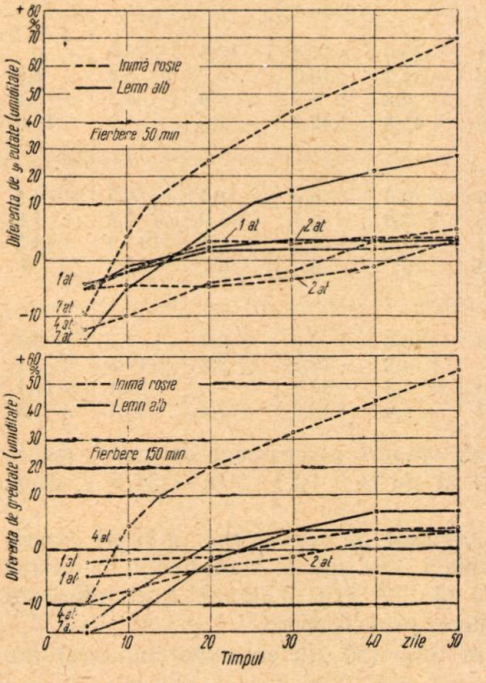


Fig. 4. — Variaţia în timp a diferenţei procentuale a greutăţii (umidităţii) lemnului de fag (alb şi inima roşie) fiert sub presiune, în comparaţie cu lemnul netratat, prin absorbţia de apă în atmosferă saturată cu vapori ($\varphi = 100\%$)

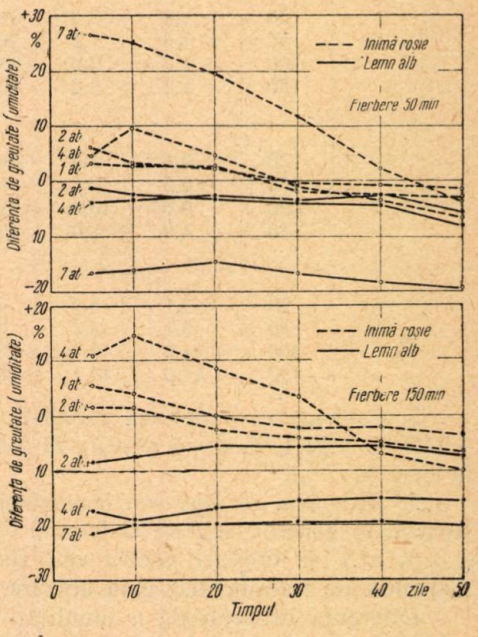


Fig. 6. — Variaţia în timp a diferenţei procentuale a greutăţii (umidităţii) lemnului de fag (alb şi inimă roşie) fiert sub presiune, în comparaţie cu lemnul netratat datorită absorbţiei de apă prin imersie.

1. *Greutatea specifică* aparentă înregistrează creşteri mari (4,9...14,2 %) atît la lemnul alb, cît şi la inima roşie, în urma aburirii, pe cînd prin fierbere creşterile accentuate (10...14,5 %) se produc numai la lemnul alb, influenţa asupra lemnului din inima roşie fiind redusă sau chiar negativă (1,1...—4,0 %).

Tabloul nr. 3

Diferenţa procentuală dintre valorile indicilor proprietăţilor fizice ale lemnului de fag (alb şi inimă roşie) aburit sub presiune şi valorile indicilor lemnului netratat

Caracteristicile tratamentului		Proprietăţi fizice ale lemnului							
		γ_{15}		α_{rd}		α_{tg}		α_v	
Presiunea at.	Darata min.	lemn alb	inimă roşie	lemn alb	inimă roşie	lemn alb	inimă roşie	lemn alb	inimă roşie
0,1	20	— 2,3	+ 2,7	+ 6,7	+ 5,0	+26,1	— 7,3	+20,5	— 3,2
	50	— 0,85	+ 0,5	0	0	0	+23,5	— 1,9	+14,5
	100	— 5,4	— 3,8	—42,9	—20,0	— 2,9	—10,8	—17,5	—13,8
	150	— 3,6	+ 3,6	0	+19,1	+17,3	+17,2	+ 8,5	+19,6
1	20	+ 0,9	— 1,1	—23,8	0	— 9,7	—10,5	—13,5	— 6,8
	50	— 5,1	+ 0,8	0	+ 9,5	—11,7	+ 7,9	—14,6	+10,2
	100	+ 1,5	+ 1,7	+31,3	0	+17,3	—18,8	+23,9	—10,7
	150	— 1,2	+ 1,9	— 4,6	+23,6	0	— 2,6	— 1,8	+ 3,4
2	20	— 9,8	+ 3,0	—19,1	+30,0	—11,8	—18,5	—16,0	0
	50	— 1,6	+ 1,2	—20,0	+31,2	+10,0	— 6,7	— 5,4	+ 6,0
	100	— 1,7	+ 2,0	—18,7	+ 4,8	+ 6,9	+ 5,9	— 4,3	+ 5,4
	150	— 1,2	+ 3,2	—62,0	+43,8	+42,3	— 2,6	+ 3,9	+10,9
3	20	+ 0,6	+ 1,4	—16,0	+30,0	+ 6,1	— 5,4	— 6,8	+ 3,4
	50	+ 0,5	+ 4,7	+ 5,0	— 5,6	+ 6,1	—13,9	+ 5,6	— 1,8
	100	— 0,6	—10,0	—19,1	+37,6	—11,8	+ 9,1	—17,9	+13,2
	150	+ 4,9	+ 8,0	—10,0	0	0	0	— 5,3	0
4	20	+ 2,1	+ 4,9	+ 4,8	—10,0	+ 5,9	+ 9,1	+ 9,1	+ 3,7
	50	+ 8,1	+ 8,2	0	+ 4,8	+18,2	+ 8,8	+19,6	+ 7,1
	100	+14,2	+ 9,4	+10,0	+ 4,8	—37,9	—	—21,1	—11,1
	150	+11,0	+10,1	—18,7	— 5,9	—20,0	+ 2,6	—19,1	+ 1,8

2. *Contragerea* volumică înregistrează scăderi excepţional de mari, de la —11,1 la —21,1 %, după aburire la 5 at. şi de la —10,7 % la —37,5 % după fierbere la 7 at.

3. *Absorbţia de apă din atmosferă saturată de vapori* (fig. 3 şi 4) înregistrează, în general, scăderi la lemnul căruia i s-au aplicat tratamente mai slabe (1...4 at.) şi creşteri pentru cele forte (4...7 at.). Lemnul este influenţat mai mult de tratamentele prin aburire, decît prin fierbere.

Diferenţa procentuală a umidităţii în timp (50 zile de experimentare) are tendinţă de creştere.

Punctul de saturaţie al fibrei a variat între 27,5 % şi 30,6 % la lemnul tratat pînă la 150 min. şi 2 at. Din datele cuprinse în tabloul nr. 7, se con-

Tabloul nr. 4

Diferența procentuală dintre valorile indicilor proprietăților mecanice ale lemnului de fag (alb și inimă roșie) aburit sub presiune și valorile indicilor lemnului netratat

Caracteristicile tratamentului		Proprietăți mecanice ale lemnului															
		σ_d rd		σ_d tg		H_{Jk} rd		H_{Jktg}		H_D tr		H_D rd		U_z rd		$W \parallel$ rd	
Presiunea at	Durata min	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie
0,1	20	+ 4,8	—	—	— 1,8	—20,1	— 6,2	—19,5	+ 0,9	0	— 3,5	—3,33	+ 0,14	—	—	—	—
	50	— 9,0	—	— 1,7	— 3,9	— 6,0	+ 7,4	—14,0	+ 8,9	— 3,5	— 6,5	—0,84	—0,29	—	—	—	—
	100	+ 4,6	+ 2,9	—15,8	—35,2	— 7,0	+ 1,3	—12,6	— 4,6	+ 3,7	0	—10,0	+11,2	—	—	—	—
	150	— 1,5	— 7,8	—	—11,1	+11,8	+ 6,6	— 1,5	+ 4,8	— 3,1	+ 0,5	—1,72	— 6,7	+30,2	—	—	—
1	20	— 4,7	+10,4	—19,0	— 3,4	+ 1,9	— 1,1	— 0,6	— 9,5	— 3,5	— 0,3	—0,14	0	—	—	—	—
	50	—27,0	+ 4,6	+19,0	+33,3	— 9,5	— 1,3	— 2,6	+10,0	— 6,0	— 3,1	—3,76	—5,85	+ 8,3	+ 2,8	—	—
	100	— 4,6	+40,4	—23,4	+65,7	— 4,1	+ 3,9	—12,1	— 3,8	0	+ 1,6	0	—2,84	—	—	—	—
	150	—18,3	—	+27,9	+ 8,0	+25,7	— 2,8	+22,1	— 0,3	0	— 0,5	—0,66	+0,28	—	—	—	—
2	20	—	—	+ 3,7	+54,9	— 9,7	+10,1	— 3,6	+ 9,6	+ 0,5	+ 3,2	0	+0,14	—	—	—	—
	50	+ 3,2	—33,3	—11,6	—33,1	—12,7	+ 3,7	—17,2	+ 3,2	— 3,5	— 0,5	— 2,4	+ 5,9	—	—	—	—
	100	—	+30,7	— 7,3	+22,5	— 2,4	— 2,0	— 8,5	— 0,6	+ 0,5	0	+0,28	+18,3	—	—	—	—
	150	—61,3	—21,9	—20,6	—	— 5,2	+ 3,2	— 2,5	+14,6	— 1,8	— 3,1	—8,70	— 2,02	+17,0	—14,3	—	—
3	20	+17,3	+ 7,6	—42,8	+ 2,6	— 4,0	+10,1	— 2,8	+ 5,2	—10,1	+ 7,0	—2,74	+4,04	—	—	—	—
	50	—33,3	—	—	—	— 2,0	+ 3,0	— 5,2	+ 4,2	—	+ 3,7	+1,38	+11,2	+35,9	+ 4,4	—8,60	— 11,30
	100	—40,7	+13,7	0	— 6,4	—11,3	+ 5,7	—12,1	+ 6,0	— 2,1	—	—4,35	—2,43	—	—	—10,33	— 3,41
	150	—22,7	—37,1	—12,8	—29,0	— 2,2	— 1,8	— 9,0	— 4,8	—	— 5,6	+0,54	—10,5	—	—	—	—
	20	+17,5	—45,8	— 7,3	—21,5	+10,8	+ 1,1	+ 9,3	+ 5,9	+ 7,8	— 5,1	—6,95	—17,7	—	—	—	—
	50	—69,3	—	—25,2	—	— 4,3	— 0,3	+ 7,2	— 8,8	— 1,3	—10,0	+1,56	—13,7	—	—	—	—
	100	—	—31,1	—41,0	—61,4	—10,8	+15,8	+20,0	+ 9,4	+ 7,0	— 7,5	—1,66	+8,06	—	—	—	—
	150	—49,2	—	—	—	— 4,3	—	— 9,2	—	—12,2	—	—1,67	—2,63	+ 7,8	+16,7	—	—

stată însă un fenomen care trebuie subliniat, şi anume, creşterea umidităţii de saturaţie a fibrei de la valoarea normală de 28...30% la 32...54 %, creşterea fiind mult mai accentuată la lemnul din inima roşie.

Această creştere a umidităţii de saturaţie a fibrei s-ar datora unei transformări mai adînci a structurii fizico-chimice a lemnului.

Tabloul nr. 5

Diferenţa procentuală dintre valorile indicilor proprietăţilor fizice ale lemnului de fag (alb şi inima roşie) fiert sub presiune şi valorile indicilor lemnului netratat

Caracteristicile tratamentului		Proprietăţile fizice ale lemnului							
		γ_{15}		α_{rd}		α_{tg}		α_v	
Presiunea at.	Durata min.	lemn alb	inimă roşie	lemn alb	inimă roşie	lemn alb	inimă roşie	lemn alb	inimă roşie
0,1	20	− 7,5	0	0	0	− 8,8	+13,9	− 5,8	+ 6,8
	50	− 2,5	− 0,8	−19,1	−22,7	− 8,8	−13,9	−12,5	−15,3
	100	+ 1,5	− 1,4	+28,6	+18,4	+64,0	−20,0	+42,8	− 7,9
	150	+ 0,7	+ 3,0	0	+23,8	− 8,8	− 7,7	− 7,1	+ 3,3
1	20	− 1,6	−13,2	+25,0	−30,7	−14,7	−11,1	0	−19,1
	50	− 2,2	+ 1,6	−16,0	− 4,5	−21,1	−13,9	−18,4	−11,6
	100	− 1,1	+ 2,2	0	+ 4,8	0	+ 5,9	+ 9,1	+ 7,0
	150	− 0,8	+ 2,1	+ 4,8	+12,5	+20,0	+ 9,1	+15,7	+ 1,9
2	20	− 4,0	+ 6,1	0	0	+ 3,2	− 2,4	+ 1,9	− 3,1
	50	− 1,3	+ 0,7	+29,4	+35,4	− 6,8	− 7,5	− 3,8	+ 3,4
	100	− 2,4	+ 3,2	−14,6	+ 4,5	− 5,3	− 5,1	− 6,8	− 1,6
	150	+ 0,1	+ 9,2	+ 9,5	+35,0	− 2,9	+ 5,7	− 1,7	+16,4
4	20	− 0,2	+ 2,8	+43,8	+ 5,9	+ 6,7	+14,3	+14,6	+11,3
	50	− 0,8	+ 6,6	− 9,5	+64,5	−10,5	− 8,3	−11,7	+14,8
	100	− 0,9	+14,3	−57,0	−38,2	+22,8	−22,8	+35,1	−30,0
	150	+10,0	+ 1,1	+ 4,8	−14,3	−20,0	−46,2	−11,5	−34,4
7	20	+ 5,4	+ 1,7	+50,0	+64,8	−47,4	−38,5	−18,9	−43,3
	50	+12,0	+ 4,9	+11,8	−56,0	+13,3	−21,1	+ 8,0	−33,4
	100	+14,0	− 1,3	−23,1	−23,6	−51,3	−21,1	−37,5	−20,0
	150	+14,5	− 4,0	+29,4	+50,0	−31,6	−24,3	−10,7	0

4. *Absorbţia de apă prin imersie* (fig. 5 şi 6) este mai mică la lemnul alb tratat (0... −20 %) şi variabilă (−10... +20 %) la inima roşie, faţă de lemnul netratat; diferenţa procentuală a umidităţii în timp are tendinţă de scădere. Umiditatea lemnului după 50 zile de imersie a ajuns la 100...130 %.

5. *Rezistenţa la despicare* este foarte mult influenţată, putînd atinge scăderi maxime de 60...70 %.

6. *Duritatea* este mai puţin influenţată, variaţiile fiind atît negative, cît şi pozitive (−20... +20 %).

Tabloul nr. 6

Diferența procentuală între valorile indicilor proprietăților mecanice ale lemnului de fag (alb și inima roșie) fiert sub presiune și valorile indicilor lemnului netratat

Caracteristicile tratamentului		Proprietăți mecanice ale lemnului															
Presiunea at.	Durata min.	σ_d rd		σ_a tg		H_{Jk} rd		H_{Jk} tg		H_{D} tr		H_{D} rd		U_z rd		$W_{\|\|}$ rd	
		lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie	lemn alb	inimă roșie
0,1	20	—21,4	—19,7	—10,1	+ 6,4	— 0,3	— 4,8	— 8,1	— 2,3	— 7,3	— 3,5	+10,90	— 9,66	—	—	—	—
	50	—27,9	— 9,2	— 8,5	+27,1	+ 2,5	+ 1,1	+ 2,2	+12,8	— 3,5	0	+14,20	— 3,90	—	—	—	—
	100	+ 36,4	—	—	—	+ 2,7	— 2,1	+ 3,0	— 9,1	+ 0,5	+ 0,5	— 0,84	— 5,70	—	—	—	—
	150	—25,1	— 4,1	— 4,3	+58,6	+ 4,7	0	+ 1,5	+ 7,0	— 7,7	— 4,3	+10,5	— 5,60	+ 12,1	— 6,8	—	—
1	20	—58,8	—	—44,4	—	+ 2,6	—27,2	+ 5,2	— 3,7	— 3,5	— 3,0	+ 0,14	— 1,48	—	—	—	—
	50	—	—	—	—	— 4,7	—14,5	+ 1,0	— 6,4	— 3,1	— 6,5	+ 0,28	+ 1,64	+ 35,4	+ 10,6	—	—
	100	—17,0	— 8,2	—25,8	—	— 7,4	+ 3,0	+12,6	+ 9,2	—10,1	— 3,5	— 1,78	— 5,85	—	—	—	—
	150	—37,7	—25,3	—44,0	—	— 1,5	+ 8,6	— 1,1	— 3,6	— 1,4	+ 0,5	— 0,31	+ 4,56	—	—	—	—
2	20	—12,5	—40,5	—	—	— 7,8	+ 7,2	— 8,6	+14,3	—10,1	—	— 8,50	+ 6,43	—	—	—	—
	50	—	—	—13,5	+ 5,8	+ 7,5	+ 4,4	— 7,0	+ 2,8	— 3,0	—	— 4,70	— 7,55	—	—	—	—
	100	+ 32,6	—42,1	—21,5	—	— 7,3	+ 0,9	+ 0,5	+ 4,3	— 6,5	— 9,7	—10,90	— 3,35	—	—	—	—
	150	—	—	—	—	— 7,8	+ 11,7	— 8,0	+12,7	—10,0	— 6,5	— 6,06	— 0,95	+ 28,6	+ 22,4	—	—
4	20	— 6,2	—15,4	— 7,7	—44,2	— 4,6	+ 3,0	+ 0,4	+ 0,7	— 3,0	+ 0,5	— 5,80	— 0,90	—	—	—	—
	50	—	—45,5	—	—	—16,0	+ 30,7	—17,6	+16,2	— 4,8	— 3,0	—10,30	+16,80	+ 10,8	+ 13,3	—19,66	—10,08
	100	—39,3	—67,3	+ 23,8	—35,5	+ 1,2	+ 20,7	— 0,5	+10,0	—12,9	+ 1,4	—11,10	+ 2,20	—	—	—11,21	—14,63
	150	—	—	—57,5	—	—27,1	—	—19,5	+ 6,1	— 0,1	— 5,1	—20,70	+13,00	—	—	—	—
7	20	—60,5	—74,1	0	—42,9	+ 1,3	+ 6,2	—10,1	+ 2,9	+ 0,5	— 5,6	—10,70	+ 7,42	—	—	—	—
	50	—45,3	—	+ 21,8	—	—45,7	—	—23,3	—	— 3,0	—	—31,20	—	—	—	—	—
	100	—	—	—	—	—17,0	—	+ 12,5	— 9,0	+ 0,5	—	— 9,0	9,20	—	—	—	—
	150	—	—	—	—	+ 1,5	—	— 0,8	—	+ 0,2	—	— 7,90	—	+ 80,0	+ 56,9	—	—

7. *Uzura* lemnului tratat prin fierbere este mai mare (scăderi de 80 % la materialul tratat la 7 at., 150 min.) decît la cel aburit (7,8...16,7 % la materialul tratat la 5 at., 150 min.).

8. *Rezistența la tăiere* scade cu 3,4...11,3 % la lemnul aburit la 3 at., 50...100 min. şi cu 10,1...19,7 % la cel fiert la 4 at., 50...100 min.

CONCLUZII

1. În cazul lemnului netratat, contragerea volumică şi uzura inimii roşii sînt mai mari decît ale lemnului alb (respectiv 0...7,5 % şi 2,5...16,3 %); iar absorbția de apă prin imersie, rezistența la despicare, duritatea şi rezistența la tăiere sînt mai mici (respectiv 3,1...6,2 %, 0...13,2 %, 0...8,5 % şi 2,7... 11,3 %). Greutatea specifică şi absorbția de apă din aer saturat prezintă diferențe mici (1,4...2,4 %).

Tabloul nr. 7

Umiditatea finală a lemnului de fag aburit şi fiert sub presiune, în comparație cu a lemnului netratat, ținut 50 de zile în atmosferă saturată de vapori

Caracteristicile tratamentului		Absorbția de apă (%) în atmosferă saturată de vapori (A_v) după 50 zile							
		La lemnul tratat prin aburire				La lemnul tratat prin fierbere			
		lemn alb		inimă roşie		lemn alb		inimă roşie	
Presiunea at.	Durata min.	netratat	tratat	netratat	tratat	netratat	tratat	netratat	tratat
3 at. (Aburire)	50	28,6	28,2	28,8	30,7	—	—	—	—
	150	32,5	32,0	30,2	31,9	—	—	—	—
4 at. (Fierbere)	50	—	—	—	—	28,9	28,1	29,1	29,5
	150	—	—	—	—	30,5	33,6	28,7	44,9
5 at. (Aburire)	50	29,0	30,7	30,1	34,1	—	—	—	—
	150	26,7	53,9	—	—	—	—	—	—
7 at. (Fierbere)	50	—	—	—	—	28,4	37,2	29,9	51,4
	150	—	—	—	—	28,2	35,3	—	—

Faza de alterare a inimii roşii influențează hotărîtor mărimea şi sensul de variație ale valorilor proprietăților menționate.

Proporția diferită de celuloză şi lignină, precum şi prezența tilelor, gomelor, materiile incrustante etc. la inima roşie față de lemnul alb, explică aceste fenomene.

Variația proprietăților influențate mai mult, din cele citate, ar putea constitui criterii de bază într-o metodică pentru stabilirea gradului de alterare (în stadiu incipient) al inimii roşii *).

2. Prin tratarea lemnului prin aburire sau fierbere în apă se produce o schimbare mai mult sau mai puțin accentuată a structurii fizice şi a compoziției

*) Literatura recomandă şi practica aplică un singur procedeu pentru stabilirea gradului de alterare al inimii roşii şi anume, capacitatea de a rezista la şoc.

chimice a lemnului, după regimul aplicat, ceea ce se traduce printr-o schimbare de proprietăți.

În unele cazuri, lemnul alb este influențat de tratamentele higro- și hidrotermice în mod diferit ca valoare și sens decît inima roșie.

3. Prin aburire și fierbere, mai ales la un regim forte, se produce o densificare și în același timp o scădere a coeziunii dintre fibre și, o spălare de substanțe chimice, fapt care explică creșterea greutății specifice, higroscopicității, variațiile coeficientului de contragere (mai ales micșorarea importantă în cazul fierberii), ale absorbției de apă și ale durității, precum și scăderea rezistenței la despicare, la uzură și la tăiere.

4. Între proprietățile fizice ale lemnului, cel mai mult influențată este absorbția de apă, iar dintre proprietățile mecanice, rezistența la despicare și la uzură, datorită unei micșorări a adeziunii fibrelor lemnoase prin aburire sau fierbere.

Un fenomen deosebit de interesant, care trebuie studiat în continuare, este creșterea valorii umidității de saturație a fibrei (32...54 %) peste cea normală (30 %) la lemnul supus unui tratament forte.

5. Mărimea și sensul variației valorilor stabilite pentru diferitele proprietăți fizico-mecanice *), precum și schimbările de culoare ale lemnului, permit o indicare precisă a tratamentului (durata și presiunea de aburire sau de fierbere) ce urmează a se aplica, în raport cu utilizarea dată materialului.

De exemplu, lemnul pentru construcții și industrie supus la sarcini statice este recomandabil a fi aburit industrial pînă la 40 ore, deoarece elasticitatea și rezistența scad după această durată de tratament; în schimb, lemnul care va fi supus la sarcini dinamice — și în mod special inima roșie — dacă este aburit peste 40 ore, își mărește cu mult rezistența la șoc, depășind prin aceasta scăderea calitativă produsă prin creșterea rigidității.

De asemenea, în industria mobilei se cere ca lemnul să aibă în primul rînd contragerea, higroscopicitatea și rezistența la tăiere mai mici, intensitate și uniformitate de culoare etc., modificări de proprietăți care pot fi obținute printr-o aburire industrială pe o durată mai lungă (60...70 ore) sau prin tratamente mai forte, spre exemplu prin aburire la 1...3 at. timp de 50...100 min.

К ВОПРОСУ ОБ УСТАНОВЛЕНИИ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ГИГРО- И ГИДРОТЕРМИЧЕСКИХ ОБРАБОТОК НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДРЕВЕСИНЫ БУКА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Предпринятые автором исследования установили значения некоторых физических, механических и технологических свойств необработанной древесины бука — красной сердцевины и белой древесины — и величину и направление постоянных изменений, вызванных обычным производственным пропариванием, а также пропариванием и проваривaнием под давлением.

*) Inclusiv proprietățile lemnului din comunicarea citată[1].

В случае необработанной древесины объемное сжатие и износ врасной сердцевины больше, чем у белой древесины, а поглощение коды при погружении, сопротивление раскалыванию, твердость и сопротивление распиловке меньше.

Пропаривание и проваривание вызывают неустойчивое изменение свойств древесины, в зависимости от примененного режима обработки, влияющего в некоторых случаях на красную сердцевину иначе, чем на белую древесину.

Вообще установлено, что у обработанной древесины, в особенности при усиленном режиме обработки, понижается сопротивление раскалыванию, износу и распиловке, повышается кажущийся удельный вес, водопоглощение и изменяется коэффициент сжатия (значительное уменьшение в случае проварки). Особенно сильно влияет обработка на водопоглощение и сопротивление раскалыванию и износу.

На основании полученных результатов, автор предлагает различные режимы обработки, в зависимости от применения лесоматериала в строительстве и в промышленности.

Рекомендуется производить производственное пропаривание строительных материалов, подвергающихся статическим нагрузкам, приблизительно в течение 40 часов, строительных материалов, подвергающихся динамическим нагрузкам (в особенности содержащих значительный процент красной сердцевины), приблизительно в течение 70 часов, что касается лесоматериалов, предназначенных для мебельной промышленности, то производственное пропаривание их рекомендуется производить в течение 70—80 часов или под давлением в 1—3 атм в течение 50—100 минут.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Процентное увеличение во времени веса испытываемых образцов белой древесины и древесины красной сердцевины бука, непропаренных и пропаренных вследствие поглощения ими воды из атмосферы, насыщенной парами ($\varphi = 100\,\%$).

Рис. 2. — Процентное увеличение во времени веса испытываемых образцов белой древесины и древесины красной сердцевины бука, непропаренных и пропаренных вследствие поглощения ими воды при погружении.

Рис. 3. — Изменение во времени процентной разницы в весе (влаги) белой древесины и древесины красной сердцевины бука, пропаренных под давлением, по сравнению с древесиной, необработанной путем поглощения воды из атмосферы насыщенной парами ($\varphi = 100\,\%$).

Рис. 4. — Изменение во времени процентной разницы веса (влаги) белой древесины и древесины красной сердцевины бука, прокипяченных под давлением, по сравнению с древесиной, необработанной путем поглощения воды из атмосферы, насыщенной парами ($\varphi = 100\,\%$).

Рис. 5. — Изменение во времени процентной разницы веса (влаги) белой древесины и древесины красной сердцевины бука, пропаренных под давлением по сравнению с древесиной, необработанной путем поглощения воды при погружении.

Рис. 6. — Изменение процентной разницы веса (влаги) белой древесины и древесины красной сердцевины бука, проваренных под давлением, по сравнению с древесиной, необработанной путем поглощения воды при погружении.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTABLISSEMENT DE L'INFLUENCE DES DIFFÉRENTS TRAITEMENTS HIGRO-ET HYDROTHERMIQUES SUR LES PROPRIÉTÉS PHYSICO-MÉCANIQUES DU BOIS DE HÊTRE

(RÉSUMÉ)

Les recherches entreprises ont établi des valeurs pour certaines propriétés physiques, mécaniques et technologiques du bois de hêtre non traité — valeurs comparatives, pour le cœur rouge et le bois blanc — ainsi que les modifications permanentes, portant sur la grandeur et le sens, modifications produites par l'étuvage industriel ordinaire et en faisant étuver et bouillir le bois sous pression.

Pour le bois non traité, la rétractibilité du volume et l'usure du cœur rouge sont plus importantes que pour le bois blanc; l'absorption d'eau par immersion, la résistance au fendage, la dureté et la résistance à la coupe sont moindres.

En étuvant et en faisant bouillir le bois, il se produit des modifications variables de ses propriétés; ces modifications sont en fonction du régime appliqué, le cœur rouge étant, dans certains cas, influencé différemment du bois blanc.

On a constaté en général, pour le bois traité — surtout sous un régime énergique — une diminution de la résistance au fendage, à l'usure et à la coupe, une augmentation du poids spécifique apparent et de l'hygroscopicité ainsi que la variation du coefficient de rétractabilité (importante diminution, pour le bois bouilli). L'absorption d'eau, la résistance au fendage et l'usure sont particulièrement influencées.

En vertu des résultats obtenus, l'Auteur propose des régimes de traitement, variant avec l'emploi à donner au matériel: dans la construction et dans l'industrie.

On recommande un étuvage industriel d'environ 40 heures, pour le bois de construction soumis à des charges statiques, et d'environ 70 heures, pour celui soumis à des charges dynamiques (surtout s'il contient une forte proportion de cœur rouge); pour le material destiné à l'industrie du meuble, on recommande un étuvage industriel de 70 à 80 heures ou bien l'étuvage, à des pressions de 1—3 atmosphères, pendant 50 à 100 minutes.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Augmentation procentuelle du poids des éprouvettes de bois blanc et de coeur rouge de hêtre, étuvé et non étuvé, par absorption d'eau dans une atmosphère saturée de vapeur ($\varphi = 100\%$), en fonction du temps.

Fig. 2. — Augmentation procentuelle du poids des éprouvettes de bois blanc et de coeur rouge de hêtre, étuvé et non étuvé, par suite de l'absorption d'eau par immersion, en fonction du temps.

Fig. 3. — Variation, en fonction du temps, de la différence procentuelle du poids (de l'humidité) du bois blanc et du coeur rouge de hêtre, étuvé sous pression, en comparaison du bois non traité, par absorption d'eau dans une atmosphère saturée de vapeur ($\varphi = 100\%$).

Fig. 4. — Variation, en fonction du temps, de la différence procentuelle du poids (de l'humidité) du bois blanc et du coeur rouge de hêtre, bouilli sous pression, en comparaison du bois non traité, par absorption d'eau dans une atmosphère saturée de vapeur ($\varphi = 100\%$).

Fig. 5. — Variation, en fonction du temps, de la différence procentuelle du poids (de l'humidité) du bois blanc et du coeur rouge de hêtre, étuvé sous pression, en comparaison du bois non traité, par suite d'absorption d'eau par immersion.

Fig. 6. — Variation, en fonction du temps, de la différence procentuelle du poids (de l'humidité) du bois blanc et du coeur rouge de hêtre, bouilli sous pression, en comparaison du bois non traité, par suite d'absorption d'eau par immersion.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. I. Pană şi N. Ghelmeziu, *Contribuţiuni la stabilirea influenţei diferitelor tratamente higro- şi hidrotermice asupra elasticităţii şi rezistenţei lemnului de fag.* Bul. Stiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. VI, 1954, p. 133.
2. F. Kollmann, *Eine neue Abnützungsprüfmaschine.* Holz als Roh- und Werkstoff, 1937, 1, nr. 3, p. 87-89.
3. E. Siebel, *Handbuch der Werkstoffprüfung. Prüf- und Messeinrichtungen.* J.Springer, Berlin, 1940, vol. I.
4. Gh. I. Pană şi N. Ghelmeziu. *Influenţa temperaturii şi a greutăţii specifice aparente a lemnului asupra rezistenţei lui la tăiere dinamică prin aşchiere.* Bul. Stiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. VI, 1954, p. 123.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

În această rubrică se publică lucrările de nivel ştiinţific superior, în care se expun:
— stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou;
— generalizări asupra dezvoltărilor matematice în probleme de cercetări de mecanică aplicată;
— descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de Mecanică Aplicată.

DETERMINAREA EXACTĂ A DIFERENŢEI TENSIUNILOR PRINCIPALE PRIN FOTOELASTICIMETRIE CU COMPENSATORUL «COKER»

DE

M. ARCAN şi E. NICOLAU

Examinarea, în lumina polarizată, a unui model dintr-o masă plastică cu proprietăţi de birefringenţă accidentală permite să se obţină, pe cale experimentală, două familii de curbe: izoclinele şi izocromatele. Primele, izoclinele, ne indică în fiecare punct al modelului, direcţiile tensiunilor principale, iar ultimele, izocromatele, reprezintă locul punctelor de egală mărime a diferenţei tensiunilor principale $(\sigma_1 - \sigma_2)$. Mărimea vectorului luminos la trecerea luminii polarizate provenite de la polarizor prin modelul birefringent (sub sarcină), şi apoi prin analizor, va fi, dacă se ţine seama de faptul că axele principale ale modelului tensionat, în punctul prin care trece lumina, sînt tocmai axele de birefringenţă

$$S_a = a' \cos\alpha \sin\alpha \cos\omega t - a' \sin\alpha \cos\alpha . \cos(\omega t - \varphi)$$

sau

$$S_a = a' \sin 2\alpha \sin\frac{\varphi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{1}$$

În această relaţie, $a' = \mu a$ este amplitudinea vectorului rezultant după absorbţia prin model, μ fiind coeficientul de absorbţie asupra amplitudinii a a vectorului luminos înainte de trecerea prin model; φ este diferenţa de fază, dintre cele două componente ale vibraţiei pe direcţiile σ_1, respectiv σ_2, care apare datorită diferenţei între vitezele respective de propagare a undei luminoase.

După cum se ştie, diferenţa de fază este funcţie de diferenţa de drum optic şi este dată de relaţia

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - n_2) \cdot d. \tag{2}$$

În conformitate cu legea cantitativă a fotoelasticităţii, între diferenţa indicilor de refracţie şi diferenţa tensiunilor principale există proporţionalitatea, adică

$$(n_1 - n_2) = C(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{3}$$

Examinînd relaţia (1), constatăm că amplitudinea vectorului luminos va fi nulă, indiferent de momentul t pentru

$$\alpha = k\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

sau

$$\varphi = 2k\pi. \tag{5}$$

Punctele pentru care $\alpha = k\,\frac{\pi}{2}$, se găsesc pe izoclina de parametru β, unde β este unghiul dintre planul principal al polarizorului şi o direcţie arbitrar aleasă ca reper.

Punctele pentru care $\varphi = 2k\pi$ alcătuiesc izocromatele. Deoarece $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - n_2)\,d$, iar $n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2)$, izocromatele vor fi date de relaţia

$$2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2)\,d$$

şi deci

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = K\frac{\lambda}{C \cdot d}. \tag{6}$$

Aşadar pentru diferitele valori ale lui K vor corespunde diferite valori — determinate — ale diferenţei $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Dacă lumina va străbate succesiv două modele solicitate diferit, însă prin puncte în care direcţiile principale sînt respectiv paralele, diferenţele de fază corespunzătoare φ' şi φ'' se vor însuma algebric.

Extincţia va apare cînd suma defazărilor va egala $2k\pi$

$$2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\, C'(\sigma_1 - \sigma_2)'\, d' + C''\,(\sigma_1 - \sigma_2)''\, d''\,\right]. \tag{7}$$

De aici cunoscînd de pildă $(\sigma_1 - \sigma_2)''$ pentru al doilea model, putem determina valoarea $(\sigma_1 - \sigma_2)'$ în primul model.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)' = \left[K - \frac{C''d''}{\lambda}\,(\sigma_1 - \sigma_2)''\right]\frac{\lambda}{C'd'} \tag{8}$$

sau, ţinînd seama de notaţia

$$2\,\mathfrak{S}_0' = \frac{\lambda}{C'd'} \tag{9}$$

şi

$$2\mathfrak{S}_0'' = \frac{\lambda}{C''d''}, \tag{10}$$

unde $\mathfrak{S}_0$ este valoarea benzii modelului respectiv,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)' = 2\mathfrak{S}_0'\left[k - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)''}{2\mathfrak{S}_0''}\right]. \tag{11}$$

În această relaţie, $(\sigma_1 - \sigma_2)'$ este diferenţa tensiunilor principale în primul model, $(\sigma_1 - \sigma_2)''$ este diferenţa tensiunilor principale în cel de al doilea model, $\mathfrak{S}_0'$ şi $\mathfrak{S}_0''$ sînt valorile benzilor modelelor, iar K este ordinul de bandă obţinut după suprapunerea celor două modele încărcate.

Dacă notăm cu K' şi $K' + 1$ ordinele benzilor între care este cuprins punctul din primul model, în care vrem să determinăm diferenţa tensiunilor principale, se pot ivi două cazuri

$K > K'$ dacă φ' şi φ'' au acelaşi semn
$K < K'$ sau chiar $K = 0$, dacă φ' şi φ'' au semne opuse.

[Semnele defazărilor φ' şi φ'' depind de semnele diferenţelor tensiunilor principale $(\sigma_1 - \sigma_2)'$ respectiv $(\sigma_1 - \sigma_2)''$. În mod convenţional se ia σ_1 valoarea tensiunii principale algebric

maxime. Rezultă deci că φ' şi φ'' vor fi de semne diferite, dacă direcţiei tensiunii principale maxime σ_1' pe primul model, îi corespunde pe al doilea model tensiunea *minimă* σ_1'' şi deci $(\sigma_1 - \sigma_2)'' < 0$ ceea ce face ca $\varphi'' < 0$].

Interes practic prezintă cazul al doilea şi anume în ipoteza $K = 0$. Relaţia de mai sus devine

$$(\sigma_1 - \sigma_2)' = -\frac{\tilde{\sigma}_0'}{\tilde{\sigma}_0''}(\sigma_1 - \sigma_2)''. \tag{11'}$$

Rezultă de aici că, prin cunoaşterea valorilor benzii celor două modele şi a diferenţei ensiunilor principale în cel de al doilea model, se poate obţine diferenţa tensiunilor principale în primul model. În acest scop, se procedează astfel:

— Se determină, în punctul de pe modelul studiat, direcţiile principale cu ajutorul izoclinelor.

— Se aşează în faţa sau în spatele modelului de studiat o piesă de compensare dintr-un material optic activ — eventual diferit de cel din care s-a executat modelul ce se studiază — căreia i se poate da o solicitare simplă, întindere sau compresiune, cunoscută.

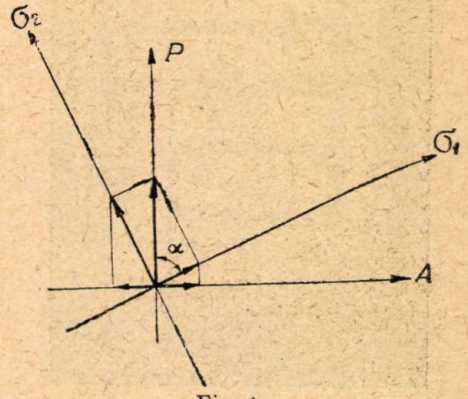


Fig. 1

— Se orientează direcţia solicitării simple astfel încît, prin creşterea acesteia în piesa de compensare, ordinul de bandă observat prin transparenţa piesei în punctul studiat al modelului să descrească. În acest scop, dacă direcţia (1) este direcţia tensiunii principale maxime în model (fig. 1), atunci piesa întinsă trebuie aşezată cu direcţia întinderii (tensiunea principală maximă σ_2'') perpendiculară pe direcţia (1), iar piesa comprimată cu direcţia compresiunii (tensiunea principală minimă σ_1'') paralelă cu direcţia (1). Dacă nu se ştie, dintre cele două direcţii principale din punctul de pe model, care corespunde tensiunii principale maxime, se procedează prin încercări, alegîndu-se acea orientare a piesei care duce la descreşterea ordinului de bandă, odată cu creşterea solicitării.

— Se solicită piesa compensatoare pînă cînd în punctul studiat se obţine extincţia (în cazul luminii albe, punctul devine negru) şi se determină forţa care a solicitat piesa de compensare în acest moment.

— Se calculează valoarea lui $(\sigma_1 - \sigma_2)$ în punctul studiat după relaţia

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{A\tilde{\sigma}_0''}\tilde{\sigma}_0' P, \tag{11''}$$

în care A = secţiunea piesei în cm^2;

$\tilde{\sigma}_0''$ = valoarea benzii modelului la piesa compensatorului în kg/cm^2;

$\tilde{\sigma}_0'$ = valoarea benzii modelului studiat în kg/cm^2;

P = forţa care a solicitat piesa compensatorului în mărime absolută.

Semnul minus a dispărut şi a rămas plus permanent — indiferent de tipul solicitării — datorită faptului că, dacă piesa este întinsă, $\frac{P}{A} = \sigma_2'' > 0$, $(\sigma_1 - \sigma_2)'' < 0$ şi deci $(\sigma_1 - \sigma_2)' > 0$

iar dacă piesa este comprimată, $\frac{P}{A} = \sigma_1'' < 0$, $(\sigma_1 - \sigma_2)'' < 0$ şi deci $(\sigma_1 - \sigma_2)' > 0$. Aceasta se obţine prin orientarea corespunzătoare a piesei compensatorului.

Coeficientul $2C = \frac{1}{A\tilde{\sigma}_0''}$ depinde de dimensiunile şi însuşirile optice ale piesei compensatorului, deci este o constantă a aparatului.

Deoarece evaluarea diferenţei tensiunilor principale într-un punct de pe o izocromatică se face cu ajutorul relaţiei

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = K \cdot 2\tilde{\sigma}_0$$

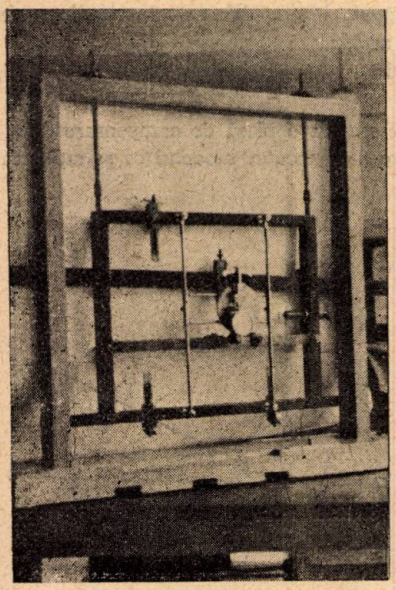


Fig. 2

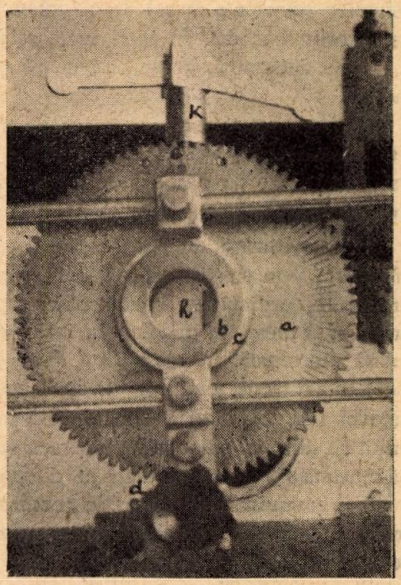


Fig. 3

şi presupune cunoaşterea numărului întreg K, ordinul benzii, se poate extinde această relaţie şi pentru punctele cuprinse în intervalele dintre benzi, urmînd însă ca numărul K să poată vea şi valori fracţionare. Din relaţia (11'') de mai sus se vede că în acest caz

$$K = \frac{1}{2A\tilde{\sigma}_0''} P = C_1 P. \tag{12}$$

Mărimea diferenţei tensiunilor principale în punctul considerat este dată deci de relaţia

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = K \cdot 2\tilde{\sigma}_0', \tag{13}$$

unde K are valoarea indicată mai sus.

Colectivul de fotoelasticitate din Institutul de mecanică aplicată, a proiectat şi executat un compensator de tip Coker, bazat pe principiul expus mai sus. Aparatul, montat pe cadrul metalic de încărcare a modelelor, este reprezentat în figura 2. El culisează pe două tije paralele orizontale, solidarizate între ele cu două manşoane, care permit ca aceste tije, împreună cu compensatorul, să poată fi deplasate pe direcţia verticală. Deplasarea compensatorului pe tijele orizontale şi apoi împreună cu acestea pe cele verticale, permite fixarea compensatorului în dreptul oricărui punct al modelului care se găseşte pe cadrul de încărcare.

Figura 3 reprezintă dispozitivul de compensare, de aproape. Se poate vedea astfel că este compus dintr-o roată dințată *a* divizată în 360° care, solidară cu o bucșă *b*, se poate roti în jurul unui inel coaxial *c*. Inelul este fixat prin intermediul a două aripioare (cu șuruburi de presiune) de tijele orizontale, astfel încît se poate deplasa — împreună cu întreg dispozitivul pe care-l susține — pe orizontală. Cu ajutorul butonului *d* solidar cu un pinion angrenat la roata dințată *a*, aceasta poate fi rotită de un unghiu ce poate fi citit în *e*.

Figura 4 reprezintă cealaltă față a dispozitivului compensator. Se observă că pe roata dințată *a* se găsesc două bacuri *f* și *g* de prindere a epruvetei compensatoare *h*. Bacul *f* este fixat solidar cu roata dințată, în timp ce bacul *g*, care se continuă cu o coadă filetată *i*, alunecă la suprafața ei. Răsucind piulița *k*, ea se propteşte în lagărul *l*, bacul *g* se ridică și tracționează epruveta *h*. Epruveta este solicitată doar în domeniul elastic și deformațiile sînt proporționale cu forțele. Alungirea este citită la un microcomparator fixat cu ajutorul unei piese cu șurub de presiune la roata dințată. Piciorul microcomparatorului se spijină pe o consolă solidară cu bacul lunecător. O etalonare fotoelastică a epruvetei poate să stabilească scara forțelor pe cadranul microcomparatorului.

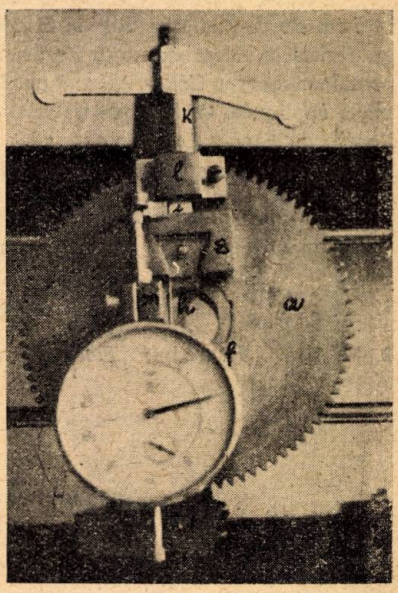


Fig. 4

Pentru folosirea compensatorului se deplasează acesta de-a lungul tijelor orizontale și verticale pînă ce eprubeta compensatoare se găsește în fața punctului de pe model în care vrem să determinăm valoarea exactă a ordinului de bandă. Se rotește apoi epruveta cu roata dințată pînă ce direcția efortului unitar principal (întindere) din epruveta compensatoare este perpendiculară pe direcția tensiunii principale în punctul de pe modelul studiat. Direcția tensiunilor principale se determină după izoclina ce străbate punctul. În această poziție se încarcă epruveta prin răsucirea piuliței *k*, pînă ce prin epruveta compensatoare punctul de pe model prezintă fenomenul de extincție. În acest moment, ordinul de bandă în punctul considerat al modelului se obține din relația (13).

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗНИЦЫ ОСНОВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПУТЕМ ИЗМЕРЕНИЯ ФОТОЭЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ КОМПЕНСАТОРА „КОКЕРА“

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор дает прежде всего теоретическое обоснование устройства компенсатора для измерений по методу компенсации Кокера. После перечисления различных операций, посредством которых с точностью определяется число полос, автор переходит к описанию компенсатора типа Кокер, построенного коллективом фотоэластициметрии Института прикладной механики. Приводятся отношения, при помощи которых с точностью выводится число полос, и фотографии, изображающие этот компенсатор, впервые построенный в РНР.

LA DÉTERMINATION EXACTE DE LA DIFFÉRENCE DES TENSIONS PRINCIPALES PAR LA PHOTOÉLASTICIMÉTRIE À L'AIDE DU COMPENSATEUR « CQKER »

(RÉSUMÉ)

L'article présente d'abord le fondement théorique du compensateur construit d'après la méthode de compensation de Coker. Après avoir énuméré les opérations grâce auxquelles on obtient la valeur exacte de l'ordre de l'isochromatique, on passe à la description du compensateur du type Coker, exécuté par le collectif de photoélasticimétrie de l'Institut de Mécanique appliquée. On indique les relations à l'aide desquelles on opère la déduction exacte de l'ordre de bande. Les photographies montrent l'aspect de ce compensateur, réalisé pour la première fois dans la République Populaire Roumaine.

BIBLIOGRAFIE

1. Coker şi Filon, *Opticeski metod issledovania napriajenii.* ONTI, Moscova – Leningrad, 1936.
2. M. M. Frocht, *Fotoprugosti*, OGIZ, Moscova – Leningrad, 1948. vol. I.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

GRINZI CONTINUE DIN BETON PRECOMPRIMAT ŞI FOLOSIREA LOR LA REALIZAREA GRINZILOR PRINCIPALE DE PODURI

DE

A. FROIMESCU

A. *INTRODUCERE*

1. Consideraţii generale

Pentru a îmbunătăţi tehnica betonului şi a betonului armat, materialele de bază în realizarea măreţelor construcţii ale socialismului, folosind din plin rezultatele pozitive ale cercetătorilor şi constructorilor sovietici, s-a trecut şi la noi în ţară la introducerea şi folosirea betonului precomprimat în construcţii. S-au obţinut o serie de rezultate atît teoretice cît şi experimentale şi în anul 1953 s-au realizat chiar cîteva construcţii în acest sistem [1], [2], [3] şi [4].

Avantajele betonului precomprimat sînt cunoscute; ele au fost arătate pe larg [5] şi nu este cazul să se mai revină asupra lor.

Dintre dezavantaje, faptul că realizarea acestui tip de construcţii necesită utilaj special şi mînă de lucru de calificare superioară, nu pot fi considerate drept caracteristice, ele decurgînd din industrializarea mai avansată impusă de acest sistem.

O serie de dezavantaje caracteristice pentru betonul precomprimat rezultă din faptul, că imensa majoritate a tipurilor constructive astăzi folosite sînt static determinate, grinzi simplu rezemate şi cu console.

Prezenta lucrare îşi propune să ia în considerare problema introducerii nedeterminării statice în grinzile continue din beton precomprimat. În felul acesta s-ar elimina în mare măsură următoarele dezavantaje, caracteristice construcţiilor realizate cu elemente din beton precomprimat static determinate:

a. *Lipsa caracterului monolit.* Folosind elemente izolate şi simplu rezemate, ele nu conlucrează, făcînd ansamblul construcţiei deosebit de sensibil la sarcini dinamice şi la cutremur. Prin realizarea nedeterminării statice, elementele de construcţie sînt asamblate prin precomprimare, realizîndu-se în felul acesta caracterul monolit cu toate avantajele sale caracteristice.

b. *Solicitări de calcul mari.* Folosind elemente izolate şi deci static determinate, nu se beneficiază de avantajele caracteristice nedeterminării statice, şi

anume, solicitări de calcul mai mici şi răspîndite pe întreaga lungime a elementului de construcţie. Din acest punct de vedere, avantajele sistemelor static nedeterminate sînt deosebit de importante, dacă se ţine seama de capacitatea totală de rezistenţă a construcţiei.

Ţinînd însă seama că precomprimarea introduce în faza elastică eforturi static nedeterminate suplimentare, trebuie analizat amănunţit în ce măsură aceste avantaje se menţin în betonul precomprimat.

c. *Ancoraje de capăt numeroase.* Folosind elemente izolate, sînt necesare ancoraje la fiecare capăt. Acest lucru face ca la deschideri mici şi mijlocii (sub 8—10 m) să nu mai fie raţională folosirea sistemelor postcomprimate, costul ancorajelor de capăt devenind prohibitiv. În plus, existenţa ancorajelor la fiecare capăt de grindă necesită sporirea suprafeţei de rezemare, ducînd de multe ori la soluţii forţate din punct de vedere constructiv. Folosirea continuităţii înlătură toate ancorajele intermediare, rămînînd numai cele de la extremităţile elementului, unde în general se dispune de spaţiu suficient. Înlăturarea unui număr important de ancoraje micşorează sensibil costul total al construcţiei şi permite folosirea postcomprimării betonului cu toate avantajele caracteristice, chiar la deschideri mici de 2—3 m, costul ancorajelor de capăt repartizîndu-se la lungimea totală a elementului de construcţie considerat.

Din cele expuse la punctele a şi c rezultă clar o serie de avantaje importante ce se pot obţine prin introducerea nedeterminării statice în construcţiile din beton precomprimat. Ţinînd însă seama că la realizarea eforturilor de preîntindere din armături iau naştere în sistem solicitări static nedeterminate suplimentare, trebuie analizat dacă, ţinîndu-se seama şi de acestea, avantajele de ordin static amintite la punctul b se menţin, se măresc, sau se transformă în dezavantaje.

În aprecierea generală va trebui de asemenea să se ţină seama şi de anumite dezavantaje suplimentare ce intervin, caracteristice realizării de sisteme static nedeterminate din beton precomprimat, şi anume:

a. *Frecarea fasciculelor de armături pe parcurs.* Fasciculele de armături folosite sînt lungi, şi, în unele cazuri, ca urmare a traseului lor impus de consideraţii statice, au multiple puncte de frecare pe parcurs. Trebuie deci să se ţină seama de eventualitatea unor micşorări ale eforturilor iniţiale ca urmare a acestor frecări, sau prevederea unor dispozitive constructive adecvate pentru micşorarea acestora pînă la valori neglijabile. Micşorarea frecărilor se poate realiza prin adoptarea de fascicule rectilinii sau cu un număr cît mai mic de frînturi, prin contacte discontinue între armături şi învelişul etanş şi prin introducerea între fire a unor elemente metalice unse cu un produs glisant în punctele de frîntură ale fasciculelor de armături.

b. *Precomprimarea directă în operă.* Grinzile continue sînt alcătuite în general din elemente izolate prefabricate ce se montează separat, asamblarea lor prin postcomprimare făcîndu-se direct în operă. Ca urmare a acestui fapt, rezultă o montare mai grea a fasciculelor precum şi o realizare ceva mai dificilă a efortului de preîntindere decît în cazul unor elemente executate în întregime pe bancul de lucru şi montate gata preîntinse. De asemenea, în unele cazuri, sînt necesare şi sprijiniri suplimentare în operă.

În cazul grinzilor continue turnate în operă, dezavantajele amintite la acest punct sînt mult mai reduse.

c. *Consum sporit de armătură obişnuită.* La construcţiile realizate din elemente prefabricate, faptul că preîntinderea se realizează după punerea în operă

face să fie necesară o armătură suplimentară, din oţel obişnuit, pentru a putea rezista în condiţii satisfăcătoare solicitărilor de la transport şi montaj. Acest dezavantaj poate şi merită să fie înlăturat atunci cînd elementele prefabricate au dimensiuni ceva mai mari, fie prin întăriri locale cu material metalic recuperabil, fie prin folosirea unor fascicule suplimentare preîntinse înainte de montaj şi care se scot după realizarea preîntinderii definitive.

2. Ipoteze de calcul

Spre deosebire de grinzile continue obişnuite, cele din beton precomprimat sînt supuse unor solicitări suplimentare provocate de efortul iniţial din armături. Ca urmare a acestor solicitări, iau naştere, în faza elastică, reacţiuni de rezemare static nedeterminate, ce dau în diferitele secţiuni ale sistemului eforturi interioare peste care se vor suprapune cele datorite greutăţii permanente, sarcinilor utile etc.

Una din problemele ce se pun, este tocmai determinarea solicitărilor sau deformaţiilor alese drept necunoscute static nedeterminate rezultate din pretensionarea armăturilor, calculele pentru determinarea necunoscutelor datorite celorlalte sarcini făcîndu-se după metodele cunoscute.

Solicitările maxime totale, în care sînt incluse şi cele static nedeterminate provocate de precomprimare, servesc la determinarea eforturilor unitare în faza de exploatare precum şi la determinarea coeficientului de siguranţă la fisurare, considerînd că abia după fisurare începe să se modifice comportarea generală a structurii. Încercări experimentale au confirmat întocmai valabilitatea celor afirmate.

Pentru verificarea « la rupere», consideraţiile făcute mai înainte nu mai rămîn valabile, deoarece pe măsură ce creşte încărcarea, prin micşorarea rigidităţii grinzii, ca urmare a deschiderii din ce în ce mai pronunţate a fisurilor, al căror număr se măreşte, şi ca urmare a apariţiei articulaţiilor plastice, care tind să facă sistemul static determinat şi apoi să-l distrugă, solicitările suplimentare static nedeterminate provocate de precomprimare se anulează. Acest lucru face ca la calculul coeficientului de siguranţă la rupere al diferitelor secţiuni ce interesează, să nu se mai ţină seama de solicitările suplimentare provocate de precomprimare, calculul făcîndu-se ca la un sistem static nedeterminat obişnuit, în ceea ce priveşte determinarea solicitărilor provocate de sarcini, şi ţinînd seama de caracteristicile secţiunii de beton şi armătură precum şi de calitatea materialelor întrebuinţate, în ceea ce priveşte determinarea momentelor de rupere ale diferitelor secţiuni. Cu alte cuvinte, verificarea « la rupere» a unei construcţii static nedeterminate din beton precomprimat nu diferă cu nimic de verificarea unei construcţii analoge din beton armat obişnuit.

Încercări experimentale au confirmat întocmai valabilitatea celor afirmate.

Pentru calculul în faza elastică s-au mai admis următoarele ipoteze şi date de calcul:

a) Se admite ipoteza materialului omogen şi elastic, betonul fiind în general supus numai la compresiuni, limitate după dorinţă. Se consideră deci aplicabile formulele uzuale stabilite în « rezistenţa materialelor», datele experimentale confirmînd aceasta.

b) Elementele de construcţie analizate sînt acelea care au un plan de simetrie în care acţionează solicitările: secţiunile sînt deci supuse la încovoiere plană simplă sau compresiune excentrică şi la acţiunea forţelor tăietoare.

c) Se consideră traseul fasciculelor de armătură alcătuit din porţiuni rectilinii, cel mai uşor de realizat constructiv, neglijîndu-se influenţa foarte mică a racordărilor curbe.

d) Se consideră în calcule elementele supuse acţiunii unui singur fascicul de armături ca rezultantă a tuturor fasciculelor.

e) Se consideră fasciculele de armături neaderente, situaţie de fapt în momentul creării pretensiunilor, deci în momentul apariţiei eforturilor interioare static nedeterminate ce trebuie calculate.

f) Se consideră fasciculele de armături cu aceeaşi secţiune în tot lungul elementului de construcţii, neavînd rigiditate proprie şi lunecînd fără frecare în jurul punctelor de frîntură. Acest fapt duce la considerarea efortului iniţial constant în tot lungul fasciculelor.

Ţinînd seama că înclinările ce se dau armăturilor sînt mici (10°—15° maximum), se ajunge la concluzia că împingerea exercitată de fascicul în punctul de frîntură nu depăşeşte 5—6 % din efortul total. Considerînd drept coeficient de frecare valoarea maximă $\mu = \frac{1}{7}$ între metal şi metal, rezultă că forţa de frecare maximă poate ajunge abia la 1 % din efort, pentru fiecare punct de frîntură. Aceasta înseamnă că la o grindă continuă cu cinci deschideri, plasînd armăturile la partea inferioară în cîmpuri şi la partea superioară în dreptul reazemelor intermediare, pierderile de efort sînt de 6—9 %, dacă efortul iniţial se exercită de la ambele capete. Valoarea nu este neglijabilă, totuşi încă acceptabilă. Folosind însă unul din procedeele mai înainte amintite sau alegînd variaţia momentului de inerţie în lungul grinzii, astfel ca traseul fasciculelor de armături să fie rectiliniu sau cu frînturi cît mai puţine, pierderile de efort prin frecări se reduc într-atît, încît considerarea efortului constant pe toată lungimea fasciculului apare ca justificată.

În ceea ce priveşte neglijarea rigidităţii armăturii în punctele de frînturi, ţinînd seama de faptul că diametrul maxim al barelor întrebuinţate nu depăşeşte 5—6 mm, ea apare pe deplin admisibilă.

g) În porţiunile în care fasciculul de armături face un unghi cu axa elementului de construcţie, se consideră totuşi acelaşi efort de preîntindere ca în porţiunile în care unghiul este nul. La o pantă maximă uzuală de 15 %, cosinusul corespunzător este 0,989, ceea ce justifică din plin ipoteza enunţată mai înainte. Sinusul corespunzător aceleiaşi pante este de 0,145, ceea ce duce la o componentă normală pe axă destul de redusă. Ţinînd seama de aceasta, apare cu atît mai justificată ipoteza acceptată în general în statica construcţiilor de a neglija influenţa forţelor tăietoare asupra valorii solicitărilor alese ca necunoscute static nedeterminate.

3. Elementele de bază ale calculului

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că la elemente de construcţie static determinate, efortul de preîntindere acţionează în diferitele secţiuni ca o forţă exterioară de compresiune în dreptul centrului de greutate al fasciculelor de armături. Aceste construcţii se pot calcula deci cu ajutorul metodelor uzuale ţinîndu-se seama şi de acest efort de compresiune suplimentar.

În cazul sistemelor static nedeterminate, situaţia se prezintă în mod deosebit dacă sistemul lucrează în faza elastică sau dacă a depăşit această fază, trecînd înspre faza plastică, spre rupere.

În faza elastică, fie conform figurii 1 o bară oarecare secţionată la noduri, a unui sistem static nedeterminat din beton precomprimat. Sub acţiunea efortului de preîntindere iau naştere în această bară solicitări şi deci deformaţii. Fie rotirile extremităţilor φ^{st} şi φ^{dr}; ele nu vor coincide în general cu rotaţia capetelor celorlalte bare ce intră în acelaşi nod, considerată fiecare separat. Pentru restabilirea continuităţii apar deci momente de încastrare elastică la capetele barelor, deci solicitări static nedeterminate.

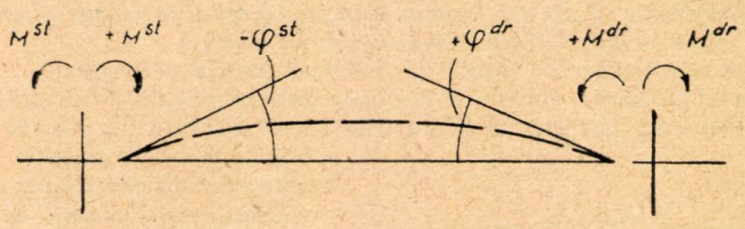


Fig. 1. — Bara unui sistem static nedeterminat secţionată la noduri.

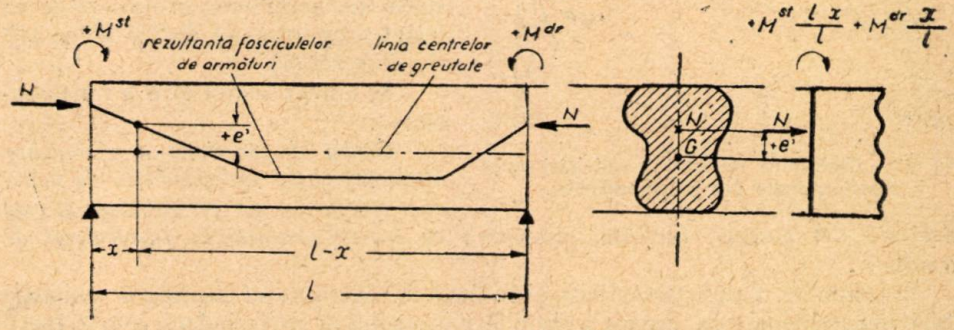


Fig. 2. — Bara unui sistem static nedeterminat. Convenţia de semne pentru solicitări şi excentricităţi.

Se ajunge astfel la o primă concluzie:

În faza elastică iau naştere în grinzile continue din beton precomprimat momente de încastrare elastică la capetele barelor, ca urmare a exercitării eforturilor de preîntindere.

Date experimentale confirmă întru totul această primă concluzie.

Pentru determinarea acestor solicitări static nedeterminate, aşa cum se va arăta în continuare, se pot folosi metodele uzuale; trebuie determinate pentru aceasta rotaţia fiecărui capăt de bară — considerată static determinată — sub acţiunea efortului de precomprimare respectiv, sau, şi mai bine, momentul de încastrare perfectă care ar aduce capătul fiecărei bare în poziţia sa iniţială.

Trebuie, de asemenea, analizată influenţa acestor momente suplimentare static nedeterminate asupra curbei de presiune a eforturilor interioare datorite preîntinderii. În figura 2 este indicată convenţia de semne adoptată.

Într-o secţiune oarecare la distanţa x, vor acţiona următoarele solicitări:

— o forţă normală N;

— un moment încovoietor

$$M = N \cdot e' + M^{st} \frac{l - x}{l} + M^{dr} \frac{x}{l}.$$

Aceste solicitări se pot înlocui printr-o forţă normală N acţionînd cu excentricitatea

$$e = e' + \frac{M^{st}}{N}\,\frac{l-x}{l} + \frac{M^{dr}}{N}\,\frac{x}{l}. \qquad (1)$$

Se ajunge astfel la o a doua concluzie:

În faza elastică, la grinzile continue din beton precomprimat, efortul din armăturile preîntinse acţionează ca o forţă exterioară de compresiune în diferitele secţiuni; punctul de aplicaţie al acestei forţe nu coincide cu cel al rezultantei fasciculelor de armături, excentricitatea efectivă fiind dată de formula (1).

Şi această concluzie îşi găseşte deplină confirmare experimentală.

Calculul eforturilor unitare în diferitele secţiuni precum şi calculul coeficientului de siguranţă la fisurare trebuie deci făcute ţinîndu-se seama de faptul că curba de presiune se abate de la axa medie a fasciculelor de armături.

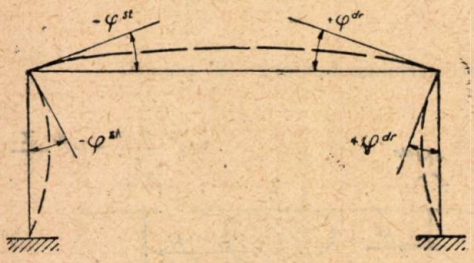


Fig. 3. — Cadrul ce nu capătă solicitări static nedeterminate din precomprimări.

Dacă se consideră că forţa de precomprimare N este constantă pe întregul sistem, toate necunoscutele static nedeterminate provocate de ea îi sînt proporţionale, deci şi M^{st} şi M^{dr} din formula (1).

Se ajunge astfel la o a treia concluzie:

Curba de presiune a eforturilor interioare este independentă de mărimea eforturilor de preîntindere şi este alcătuită din porţiuni rectilinii, asemenea cu traseul rezultantei fasciculelor de armături.

În anumite cazuri particulare, şi în faza elastică, pot să nu apară solicitări static nedeterminate ca urmare a exercitării efortului de preîntindere. Acest lucru se întîmplă atunci cînd în urma preîntinderii armăturilor, capetele tuturor barelor sistemului rămîn nedeformate; analog, în exemplul din figura 3, nu sînt necesare momente de încastrare elastică pentru restabilirea continuităţii. Aceste cazuri sînt însă rare şi nu merită o atenţie deosebită.

După apariţia primelor fisuri, comportarea grinzii continue se modifică. Ca urmare a micşorării rigidităţii barelor, eforturile suplimentare static nedeterminate provocate de pretensionarea armăturilor se micşorează, ele anulîndu-se cu totul atunci cînd au apărut suficiente articulaţii plastice care să facă sistemul static determinat. Totul se petrece ca şi cum între apariţia primei fisuri şi apariţia ultimei articulaţii plastice înainte de rupere, curba de presiune a eforturilor interioare, exprimată prin relaţia (1), tinde să se apropie de traseul rezultantei fasciculului de armături, cu care coincide în momentul distrugerii sistemului.

Se impune deci o a patra concluzie:

În momentul distrugerii totale, la grinzile continue din beton precomprimat — ca şi la cele static determinate — efortul din armăturile preîntinse acţionează ca o forţă exterioară de compresiune în diferitele secţiuni; punctul de aplicaţie al acestei forţe coincide cu cel al rezultantei fasciculelor de armături.

Şi această ultimă concluzie se găseşte pe deplin confirmată de date experimentale.

În cele arătate pînă aici se presupun cunoscute atît traseul fasciculelor de armături cît şi valoarea efortului iniţial de precomprimare.

ELEVATIE

SECTIE TRANSVERSALA

SECTIE LONGITUDINALA

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
KNIHOVNA
1848
MUZEJNÍ SPOLEČNOST MOŠTĚNKI

Determinarea efortului de preîntindere se face dimensionînd secţiunile cele mai solicitate, sau mai exact verificînd ca în aceste secţiuni eforturile unitare efective maxime să nu depăşească pe cele admisibile şi de asemenea să fie respectaţi coeficienţii de siguranţă atît la fisurare cît şi la rupere.

În ceea ce priveşte consideraţiile pentru alegerea traseului fasciculelor de armături, acestea vor fi analizate în continuare; se va arăta cum trebuie alese traseele de armături pentru ca solicitările suplimentare static nedeterminate rezultate să nu fie «parazitare», anulînd efectul static favorabil al continuităţii, ci să accentueze aceste avantaje, făcînd sistemele din beton precomprimat să lucreze mai favorabil, din punct de vedere static, chiar decît construcţiile analoge din beton armat obişnuit.

Ilustrarea afirmaţiilor făcute mai înainte, precum şi modul practic de a conduce calculele, vor fi exemplificate pe un caz concret al unui pod de şosea continuu pe trei deschideri 45—60—45 m, cu moment de inerţie variabil.

B. *POD DE ŞOSEA REALIZAT CU O GRINDĂ CONTINUĂ DIN BETON PRECOMPRIMAT*

1. Consideraţii de ordin tehnico-economic

Pentru trecerea unui rîu se cere proiectarea unui pod de şosea cu o lungime totală între reazemele extreme de 150 m. Se cere o cît mai redusă obstruare a albiei şi înălţimi de construcţii cît mai mici.

Pentru a răspunde acestor condiţii s-a ales soluţia unui pod din beton precomprimat, avînd trei deschideri de 45—60—45 m. Continuitatea grinzilor permite a da celor două reazeme din albia rîului dimensiuni minime, îndeplinind astfel prima cerinţă a temei de proiectare.

De asemenea, continuitatea permite micşorarea eforturilor provocate de sarcinile exterioare şi răspîndirea lor pe toată lungimea grinzii, ceea ce duce la înălţimi de construcţie destul de reduse, satisfăcînd astfel şi cea de-a doua cerinţă a temei de proiectare.

În planşa anexată se vede elevaţia podului proiectat, secţiunea longitudinală şi secţiuni transversale prin dreptul reazemului intermediar şi în mijlocul deschiderii centrale. Se vede că înălţimea de construcţie este de $\frac{1,50}{45} = \frac{l}{30}$ pentru deschiderile marginale, $\frac{1,80}{60} = \frac{l}{33,3}$ pentru deschiderea centrală şi $\frac{4,50}{60} = \frac{l}{13,3}$, valoare maximă, în dreptul reazemelor intermediare. Asemenea înălţimi reduse de construcţie nu erau posibile cu beton armat obişnuit şi nici măcar cu grinzi precomprimate simplu rezemate.

Pentru scurgerea apelor de ploaie, podul este în «spinare de măgar», cu declivităţi de $10^0/_{00}$, racordate în plan vertical cu un arc de cerc de 2 000 m rază.

Podul are secţiunea transversală cu goluri interioare, avînd materialul răspîndit cît mai la periferie, pentru a obţine maximum de moment de inerţie la o secţiune dată de beton; dimensiunile sînt suficiente pentru a permite o uşoară execuţie.

Tălpile şi inimile sînt întărite din loc în loc cu diafragme de rigidizare construite în aşa fel încît să permită vizitarea şi montarea ulterioară a fasciculelor de armături ce se preîntind.

Pentru o execuţie uşoară, s-a prevăzut turnarea întregului pod pînă la blocurile de ancorare din dreptul reazemelor marginale, după care se introduc fasci-

culele de armături, se toarnă blocurile de la capete şi după o întărire corespunzătoare se preîntind armăturile. Nu sînt necesare aparate speciale de descintrare, întrucît prin precomprimare podul se ridică suficient pentru a permite o demontare uşoară a cintrelor.

Aşa cum se va arăta în continuare, podul proiectat prezintă siguranţă deplină, atît din punctul de vedere al eforturilor unitare de exploatare, cît şi din punctul de vedere al fisurării şi ruperii.

Cantităţile totale de materiale necesare pentru executarea suprastructurii acestui pod sînt:

— Beton marca 300	4,88 m^3 pe metru liniar de pod
— Oţel beton obişnuit	470 kg pe metru liniar de pod
— Oţel special (avînd costul dublu ca al oţelului beton obişnuit)	320 kg pe metru liniar de pod.

— Oţel obişnuit în ancoraje 10 kg pe metru liniar de pod sau în total 800 kg armătură pe metru liniar de pod.

Aprecierea acestor cifre se face mai uşor comparîndu-le cu cifrele rezultate la proiectarea unui pod cu grinzi Gerber, avînd deschiderea maximă de 57 m şi cu cele obţinute la un pod precomprimat cu deschideri independente de 40 m, ambele proiectate în instituţiile noastre. Pentru primul au rezultat ca necesare:

— Beton marca 250	6,15 m^3 pe metru liniar de pod
— Oţel beton obişnuit	1 850 kg pe metru liniar de pod

iar pentru cel de-al doilea sînt necesare următoarele cantităţi de materiale:

— Beton marca 350	5,75 m^3 pe metru liniar de pod
— Oţel beton obişnuit	700 kg pe metru liniar de pod
— Oţel special (avînd costul dublu ca al oţelului beton obişnuit)	280 kg pe metru liniar de pod
— Oţel obişnuit în ancoraje	40 kg pe metru liniar de pod

sau în total 1 020 kg armătură pe metru liniar de pod.

Dacă se ţine seama că în ultimul caz rezultă ca necesară o pilă suplimentară în albie şi că dimensiunile infrastructurilor trebuiau să fie mărite constructiv pentru a permite aşezarea grinzilor cu ancorajele respective, soluţia grinzilor continue din beton precomprimat rezultă ca extrem de avantajoasă din punct de vedere tehnico-economic, pe lîngă faptul că este singura care răspunde cel mai bine cerinţelor temei de proiectare enunţate mai înainte.

Este deci cazul ca soluţia preconizată în prezenta lucrare să-şi găsească cît mai curînd o aplicare în practică.

2. Elemente geometrice şi elastice pentru calculul podului

Ţinînd seama de forma şi dimensiunile secţiunilor arătate în planşa anexată, se dau în tabloul nr. 1 elementele geometrice şi elastice necesare calculelor statice ale podului. Schema pentru identificarea secţiunilor este arătată în figura 4, iar distanţele x_g ale centrului de greutate al secţiunilor se înţeleg de la faţa inferioară a grinzii.

În figurile 5, 6 şi 7 se arată grafic cum variază în lungul podului secţiunea de beton, înălţimea secţiunii, poziţia centrului de greutate şi momentul de inerţie.

Pentru calculul solicitărilor static nedeterminate sînt necesare valorile α şi β indicate în schema din figura 8.

Tabloul nr. 1

Elemente geometrice și elastice

Secțiunea	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Abscisa x m	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	5	10	15	20	25	30
Înălțimea secțiunii H m . .	1,50	1,55	1,60	1,65	1,78	2,03	2,44	2,98	3,67	4,50	3,66	2,99	2,47	2,09	1,87	1,80
Secțiunea de beton A_b m² . .	3,70	3,73	3,76	3,79	3,87	4,04	4,30	4,64	5,08	6,76	5,08	4,65	4,32	4,07	3,93	3,88
Distanța centrului de greutate x_g m	0,91	0,94	0,97	1,00	1,07	1,22	1,46	1,77	2,15	2,20	2,15	1,77	1,49	1,25	1,43	1,08
Momentul de inerție I_b m⁴ .	1,285	1,385	1,495	1,607	1,923	2,621	4,026	6,431	10,474	22,254	10,450	6,450	4,143	2,806	2,159	1,980
Moment rezistent W_{sus} m³ .	2,18	2,27	2,37	2,47	2,71	3,24	4,11	5,32	6,88	9,68	6,92	5,28	4,23	3,35	2,92	2,75
Moment rezistent W_{jos} m³ .	1,42	1,47	1,54	1,61	1,80	2,15	2,76	3,64	4,87	10,12	4,86	3,64	2,78	2,25	1,91	1,83

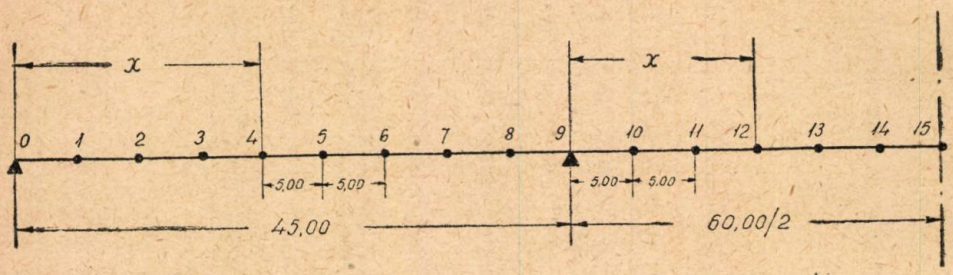


Fig. 4. — Schema pentru indentificarea secţiunilor.

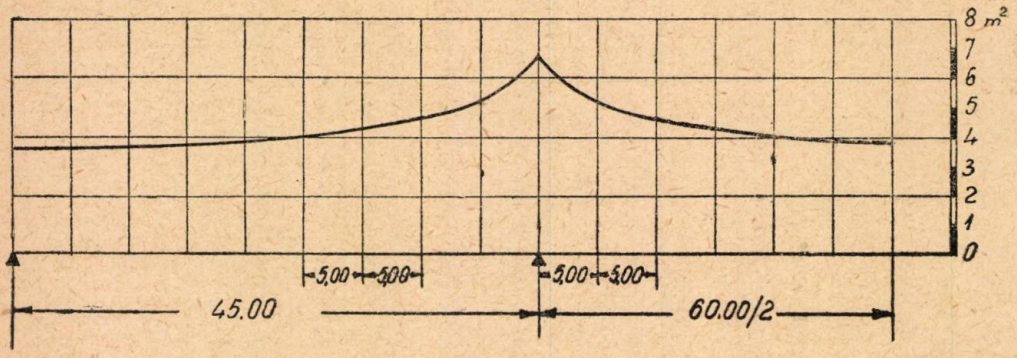


Fig. 5. — Variaţia secţiunii de beton în lungul podului.

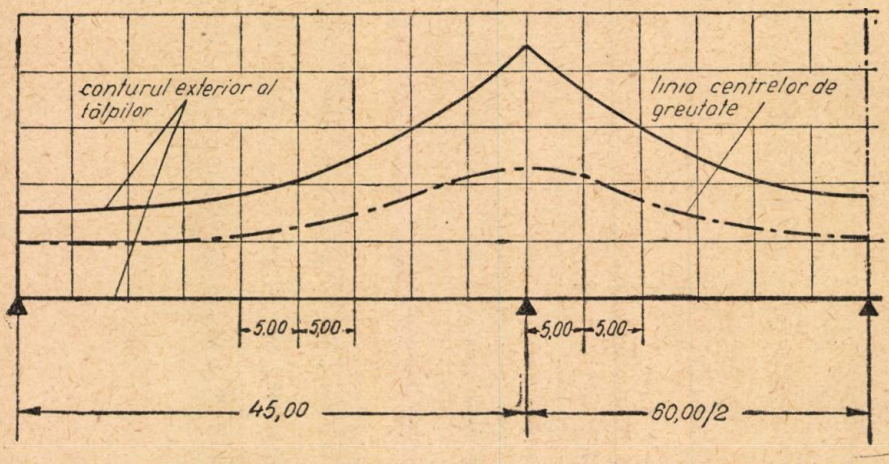


Fig. 6. — Variaţia înălţimii secţiunii şi a poziţiei centrului de greutate (la faţa inferioară a grinzii) în lungul podului.

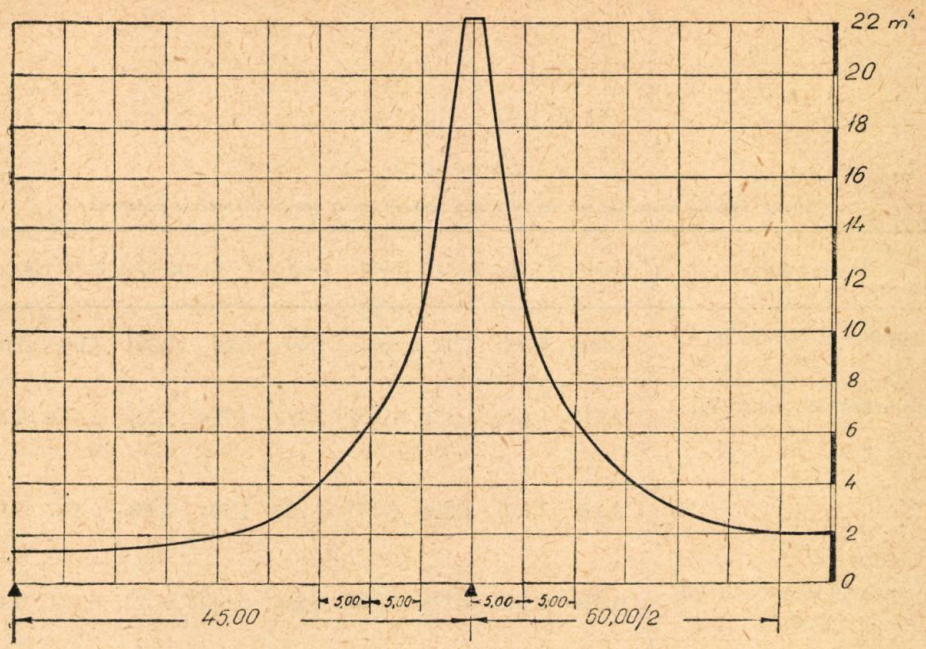


Fig. 7. — Variaţia momentului de inerţie în lungul podului.

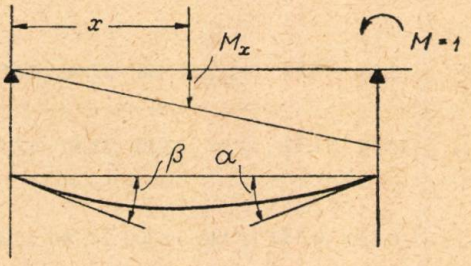


Fig. 8. — Schema de calcul a deformaţiilor sub acţiunea unui moment unitar.

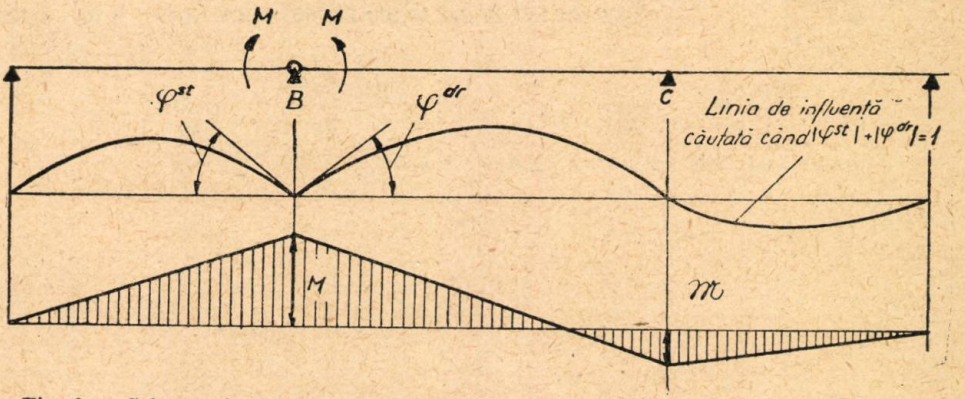


Fig. 9. — Schema ajutătoare pentru calculul liniei de influenţă a momentului din dreptul reazemului intermediar.

Tabloul nr. 2

Calculul rotirilor marginale sub acțiunea unui moment unitar pentru deschiderea marginală

Tronson	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9
Lungimea tronsonului S m	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
Momentul de inerție I_b m^4	1,335	1,440	1,551	1,765	2,272	3,324	5,229	8,453	16,364
$\frac{S}{I_b}$ m^{-3}	3,750	3,470	3,220	2,830	2,200	1,504	0,956	0,590	0,306
Momentul încovoietor M_x tm	0,056	0,167	0,278	0,389	0,500	0,611	0,723	0,834	0,945
$M_x \frac{S}{I_b}$ tm^{-2}	0,208	0,580	0,895	1,100	1,100	0,920	0,692	0,492	0,289
Abscisa x m	2,50	7,50	12,50	17,50	22,50	27,50	32,50	37,50	42,50
$45 - x$ m	42,50	37,50	32,50	27,50	22,50	17,50	12,50	7,50	2,50
$M_x \frac{S}{I_b} x$ tm^{-1}	0,520	4,350	11,180	19,300	24,700	25,300	22,500	18,400	12,300
$M_x \frac{S}{I_b} (45 - x)$ tm^{-1}	8,850	21,750	29,100	30,300	24,700	16,100	8,650	3,700	0,720

$$E\alpha = \frac{\Sigma M_x \frac{S}{I_b} x}{45} = \frac{138{,}450}{45} = 3{,}075 \quad ; \quad E\beta = \frac{\Sigma M_x \frac{S}{I_b} (45-x)}{45} = \frac{143{,}870}{45} = 3{,}195$$

Ca verificare: $E(\alpha + \beta) = 6{,}270 = \Sigma M_x \frac{S}{I_b} \cong 6{,}276.$

Tabloul nr. 3

Calculul rotirilor marginale sub acțiunea unui moment unitar pentru deschiderea centrală

Tronson	9—10	10—11	11—12	12—13	13—14	14—15	15—14′	14′—13′	13′—12′	12′—11′	11′—10′	10′—9′
Lungimea tronsonului S m	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
Momentul de inerție I_b m^4	16,352	8,450	5,297	3,475	2,483	2,070	2,070	2,483	3,475	5,297	8,450	16,352
$\frac{S}{I_b}$ m^{-3}	0,306	0,592	0,945	1,440	2,015	2,415	2,415	2,015	1,440	0,945	0,592	0,306
Momentul încovoietor M_x tm	0,042	0,125	0,208	0,292	0,375	0,458	0,542	0,625	0,708	0,791	0,875	0,958
$M_x \frac{S}{I_b}$ tm^{-2}	0,012	0,074	0,197	0,420	0,755	1,105	1,310	1,260	1,020	0,749	0,517	0,294
Abscisa x m	2,50	7,50	12,50	17,50	22,50	27,50	32,50	37,50	42,50	47,50	52,50	57,50
$60 - x$ m	57,50	52,50	47,50	42,50	37,50	32,50	27,50	22,50	17,50	12,50	7,50	2,50
$M_x \frac{S}{I_b} x$ tm^{-1}	0,030	0,555	2,460	7,350	17,000	30,400	42,500	47,200	43,300	35,500	27,200	16,900
$M_x \frac{S}{I_b} (60 - x)$ tm^{-1}	0,740	3,890	9,350	17,900	28,300	36,000	36,000	28,400	17,800	9,350	3,900	0,750

$$E\alpha = \frac{\Sigma M_x \frac{S}{I_b} x}{60} = \frac{270{,}390}{60} = 4{,}501\,; \quad E\beta = \frac{\Sigma M_x \frac{S}{I_b} (60-x)}{60} = \frac{192{,}340}{60} = 3{,}205$$

Ca verificare: $E(\alpha + \beta) = 7{,}706 = \Sigma M_x \frac{S}{I_b} \cong 7{,}714.$

Plecînd de la schema din figura 9, rezultă ca necesară, mai întîi, determinarea momentului $\mathfrak{M}$. Aceasta se face scriind egalitatea dintre rotirea grinzii BC în punctul C şi cea a grinzii CD în acelaşi punct. Ţinînd seama de valorile α şi β calculate în tablourile nr. 2 şi nr. 3, această egalitate se scrie

$$+\frac{3{,}205\,M}{E}-\frac{4{,}501\,\mathfrak{M}}{E}=+\frac{3{,}075\,\mathfrak{M}}{E},$$

de unde rezultă imediat

$$\mathfrak{M}=0{,}423\,M.$$

Se pune acum problema determinării lui M pentru ca rotirea totală a articulaţiei introduse în B să fie egală cu unitatea. Se obţine

$$\varphi^{st}=\frac{3{,}075\,M}{E},$$

$$\varphi^{dr}=\frac{-4{,}501\,M+3{,}205\times 0{,}423\,M}{E}=-\frac{3{,}143\,M}{E},$$

$$|\varphi^{st}|+|\varphi^{dr}|=\frac{(3{,}075+3{,}143)M}{E}=1,$$

de unde

$$M=0{,}161\,E.$$

Făcînd toate înlocuirile, se dau în figura 10 unghiurile de rotire marginale necesare pentru calculul liniei de influenţă căutate.

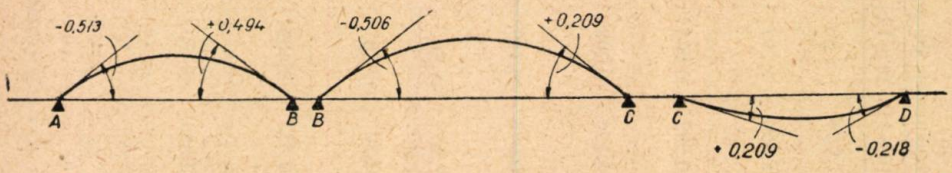


Fig. 10. — Unghiuri de rotire marginale pentru calculul liniei de influenţă a lui M_B.

În tablourile nr. 2 şi nr. 3 sînt arătate elementele necesare pentru calculul acestor valori, momentele de inerţie fiind de rîndul acesta în centrul tronsoanelor considerate.

3. Liniile de influenţă ale solicitărilor

Pentru calculul liniilor de influenţă ale solicitărilor în diferitele secţiuni ce interesează, este suficient să se calculeze, plecînd de la definiţie, linia de influenţă a momentului încovoietor din dreptul unui reazem intermediar, deoarece toate celelalte se obţin din aceasta prin calcule algebrice simple.

În cele ce urmează s-a calculat linia de influenţă a lui M_B (fig. 9), considerînd-o ca o linie elastică a grinzii studiate căreia i s-a introdus o articulaţie în B şi în articulaţie o pereche de momente egale şi de semne contrarii, atît de mari încît rotirea totală a articulaţiei — în valoare absolută — să fie egală cu unitatea.

Tabloul nr. 4

Calculul unor elemente ajutătoare pentru determinarea liniei de influență a lui M_B și pentru deschiderea marginală din stînga

Tronson	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8		8—9
$M_x \frac{S}{I_b}$	0,208	0,580	0,895	1,100	1,100	0,920	0,692	0,492		0,289
$a = \frac{0{,}161\ E.M_x.\ S}{E\ I_b}$	0,0335	0,0934	0,1440	0,1770	0,1770	0,1480	0,1112	0,0793		0,0465
$-0{,}5130 + \Sigma a$	−0,5130 −0,4795	− 0,3861	− 0,2421	− 0,0651	+ 0,1119	+ 0,2599	0,3711	+ 0,4504		+ 0,4969 ≅ + 0,494

Tabloul nr. 5

Calculul liniei de influență a lui M_B pentru deschiderea marginală din stînga

$P = 1$ tonă în secțiunea	$\eta_{n-1} + (-0{,}5130 + \sum a) \times 5{,}00 + a \times 2{,}50 = \eta B$		
0			0,00
1	0,00	− 0,5130 × 5,00	− 0,0335 = − 2,49
2	− 2,49	− 0,4795 × 5,00	− 0,0934 = − 4,66
3	− 4,66	− 0,3861 × 5,00	− 0,1440 = − 6,23
4	− 6,23	− 0,2421 × 5,00	− 0,1770 = − 7,00
5	− 7,00	− 0,0651 × 5,00	− 0,1770 = − 6,93
6	− 6,93	+ 0,1119 × 5,00	− 0,1480 = − 6,00
7	− 6,00	+ 0,2599 × 5,00	− 0,1112 = − 4,42
8	− 4,42	+ 0,3711 × 5,00	− 0,0793 = − 2,36
9	− 2,36	+ 0,4504 × 5,00	− 0,0465 = − 0,00

Plecînd de la aceste valori, linia de influenţă căutată pentru cîmpul marginal din stînga se găseşte calculată în tablourile nr. 4 şi nr. 5, prin aplicarea procedeelor clasice.

Procedînd în mod analog, s-au calculat valorile lui η_{1B} pentru deschiderea centrală şi pentru cea marginală din dreapta. Plecînd de la valorile din η_{1B}, s-au calculat în continuare liniile de influenţă ale momentelor încovoietoare în punctele 2, 4, 6, 8, 10, 12 şi 15, precum şi cele ale forţelor tăietoare în punctele 0 şi 9 pentru deschiderea din stînga şi tot în 9 pentru deschiderea din dreapta. Valorile obţinute s-au trecut în figurile 11 şi 12.

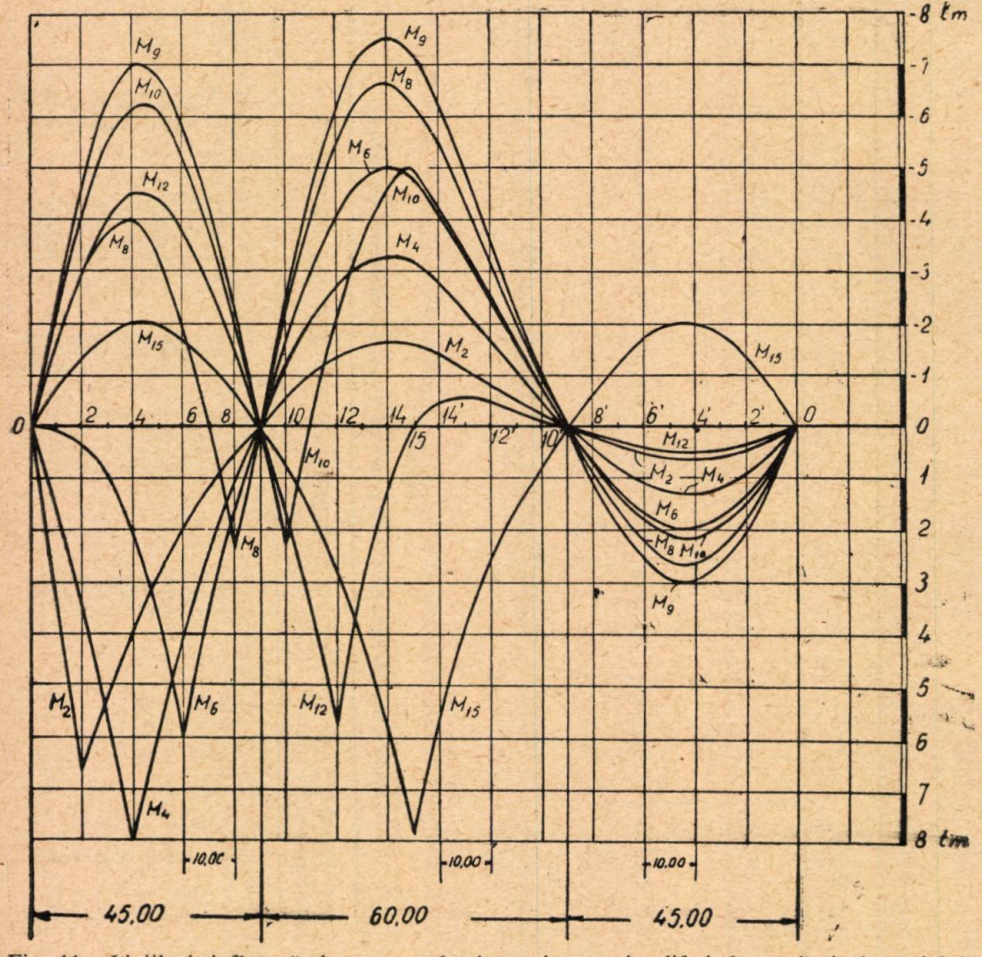


Fig. 11.—Liniile de influenţă ale momentelor încovoietoare în diferitele secţiuni ale podului.

4. Solicitări maxime şi minime provocate de sarcinile exterioare

După calculul sarcinilor permanente care solicită podul, reprezentate în figura 13, plecînd de la liniile de influenţă determinate mai înainte, s-au calculat solicitările provocate de sarcinile exterioare permanente (momentele încovoietoare şi forţele tăietoare). Ţinînd seama de lungimea zonelor pozitive şi negative

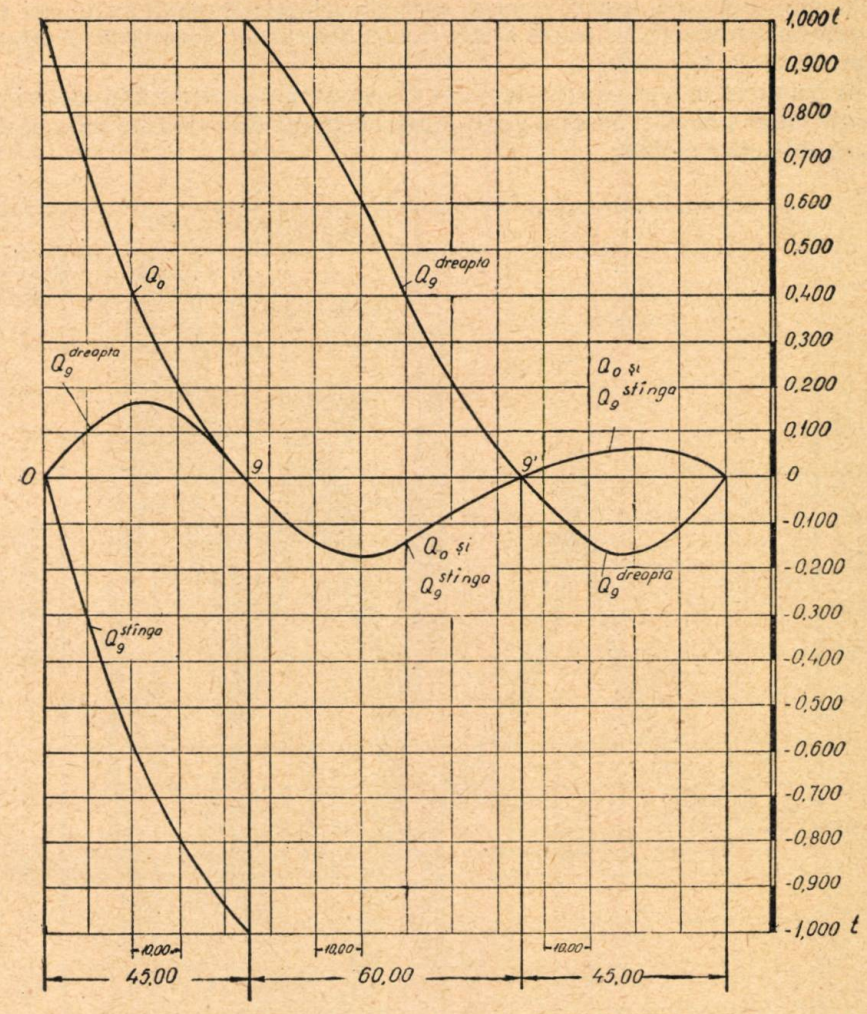


Fig. 12. — Liniile de influență ale forțelor tăietoare în dreptul reazemelor podului.

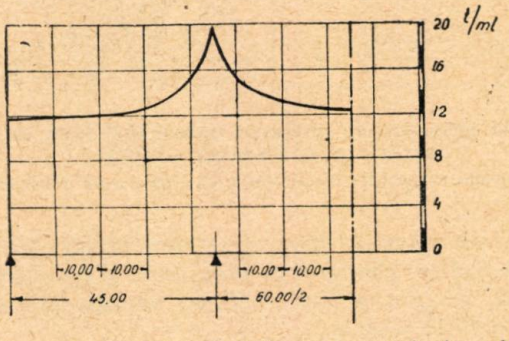


Fig. 13. — Variația sarcinii permanente în lungul podului.

ale liniilor de influenţă, s-au determinat sarcinile echivalente pentru cele mai grele convoaie ce pot circula pe şosele astăzi şi s-au determinat solicitările maxime şi minime în toate secţiunile.

În figura 14 *a*, sînt reprezentate atît diagrama momentelor din sarcini permanente cît şi suprafaţa în care poate varia diagrama de momente ca urmare a acţiunii sarcinilor mobile.

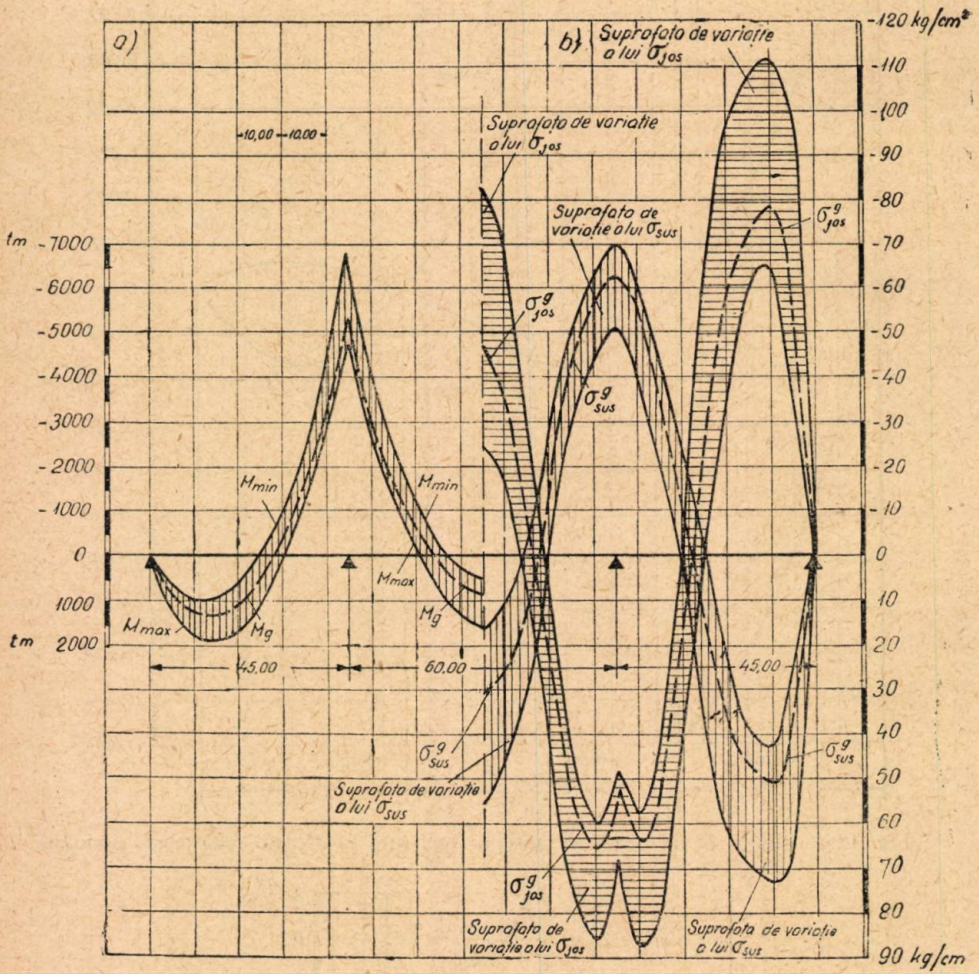


Fig. 14. — Momente încovoietoare şi eforturi unitare provocate de sarcinile permanente exterioare (fără precomprimare):
a) diagrama momentelor încovoietoare, *b)* diagrama eforturilor unitare.

În figura 14 *b*, s-a arătat variaţia eforturilor unitare provocate de sarcinile exterioare în lungul podului pentru fibra superioară şi cea inferioară provocate de sarcina permanentă, precum şi intervalul de variaţie al eforturilor unitare ca urmare a acţiunii sarcinilor mobile.

Avînd determinate aceste elemente, se poate trece acum la stabilirea traseului armăturilor şi a valorii efortului de precomprimare necesar.

5. Determinarea traseului armăturilor şi a efortului de preîntindere necesar

La alegerea traseului armăturilor s-au avut în vedere următoarele consideraţii:

a) Traseul armăturilor trebuie să fie alcătuit din linii drepte, avînd cît mai puţine puncte de frîntură.

b) Traseul trebuie să fie astfel ales încît fasciculele de armături să poată fi introduse după turnarea întregului pod în afară de blocurile marginale. Variaţia posibilă este deci limitată de golurile diafragmelor de rigidizare.

c) Traseul trebuie să fie astfel ales încît solicitările provocate de precomprimare să fie de sens contrar celor provocate de sarcinile exterioare şi avînd asemenea valori încît eforturile unitare de exploatare să fie admisibile şi coeficienţii de siguranţă la fisurare şi rupere să fie satisfăcători.

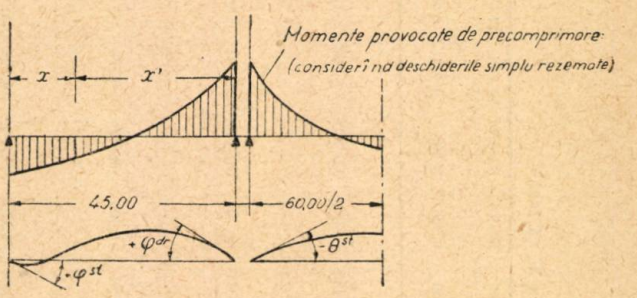


Fig. 15. — Solicitări şi deformaţii provocate de precomprimare în deschiderile considerate simplu rezemate.

d) Îndeplinind primele trei condiţii, traseul ales trebuie să ducă la cel mai mic efort de preîntindere necesar.

Pentru a asigura condiţia *c)*, s-a trecut fasciculul de armături prin punctul cel mai de jos posibil din mijlocul deschiderii centrale. În dreptul reazemelor marginale, variaţia posibilă a centrului de greutate al fasciculelor de armături este de 45 cm. Plecînd de la aceste date, s-au ales pentru a fi studiate trei trasee de armături, care respectă condiţiile de la punctele *a)* şi *b)*, arătate în figura 15.

Traseul *A* are două puncte de frîntură în dreptul reazemelor intermediare, traseul *B* unul singur în dreptul axei de simetrie a podului, iar traseul *C* este rectiliniu pe tot podul. Ţinînd seama de faptul că preîntinderea se face de la ambele capete ale podului, atît traseul *B* cît şi *C* nu dau nici un fel de pierdere de efort, neexistînd nici un punct de frecare pe parcurs.

Pentru a vedea în ce măsură traseele studiate răspund condiţiei de la punctul *c)*, în tabloul nr. 6 se dau schematic elementele necesare şi calculele pentru stabilirea curbei de presiune efective a eforturilor interioare, necesare pentru determinarea eforturilor unitare, în faza de exploatare precum şi a coeficientului de siguranţă la fisurare.

Cu datele din tabloul nr. 6 şi cu notaţiile din figura 15 unghiurile cu care se rotesc extremităţile deschiderilor considerate simplu rezemate, ca urmare a acţiunii precomprimării, sînt pentru deschiderea din stînga

$$E\varphi^{st} = \frac{\sum_{0-1}^{8-9} N \cdot e \cdot \frac{S}{I_b} \cdot x'}{45},$$

$$E\varphi^{dr} = \frac{\sum_{0-1}^{8-9} N \cdot e \cdot \frac{S}{I_b} \cdot x}{45},$$

Tabloul nr. 6

Calculul deformațiilor provocate de precomprimarea N = 1 tonă

Tronson		0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	11—12	12—13	13—14	14—15
$\frac{S}{I_b}$		3,750	3,470	3,220	2,830	2,200	1,504	0,956	0,590	0,306	0,306	0,592	0,945	1,440	2,015	2,415
Traseul *A*	Excentricitatea armăturii e_A m	—0,300	—0,280	—0,260	—0,220	—0,140	—0,005	+ 0,195	+0,465	+1,010	+0,980	+0,390	+0,080	—0,145	—0,290	—0,365
	$N \cdot l_A \cdot \frac{S}{I_b}$	—1,125	—0,972	—0,837	—0,623	—0,308	—0,008	+0,186	+0,274	+0,309	+0,300	+0,231	+0,076	—0,209	—0,584	—0,881
Traseul *B*	Excentricitatea armăturii e_B m	—0,307	—0,300	—0,293	—0,267	—0,200	—0,078	+0,109	+0,365	+0,900	+0,880	+0,330	+0,050	—0,157	—0,290	—0,363
	$N \cdot l_B \cdot \frac{S}{I_b}$	—1,151	—1,041	—0,943	—0,756	—0,440	—0,117	+0,104	+0,215	+0,275	+0,269	+0,195	+0,047	—0,226	—0,584	—0,877
Traseul *C*	Excentricitatea armăturii e_C m	+0,125	+0,095	+0,065	+0,055	+0,085	+0,170	+ 0,320	+0,540	+1,030	+0,980	+0,390	+0,080	—0,145	—0,290	—0,365
	$N \cdot l_C \cdot \frac{S}{I_b}$	+0,469	+0,330	+0,209	+0,156	+0,187	+0,256	+0,306	+0,319	+0,317	+0,300	+0,231	+0,076	—0,209	—0,584	—0,881

iar pentru deschiderea centrală, ca urmare a simetriei, unghiurile căutate devin

$$E\theta^{st} = -E\theta^{dr} = \sum_{9-10}^{14-15} N \cdot e \cdot \frac{S}{I_b}.$$

Aplicînd aceste formule, se obţine

— în cazul deschiderii marginale:

pentru traseul *A* al armăturilor

$$E\varphi^{st} = +2{,}900\,,\ E\varphi^{dr} = +0{,}204;$$

ca verificare

$$E(\varphi^{st} + \varphi^{dr}) = 3{,}104 = -\sum_{0-1}^{8-9} N \cdot e_A \cdot \frac{S}{I_b} \simeq 3{,}104;$$

pentru traseul *B* al armăturilor

$$E\varphi^{st} = +3{,}283\,,\quad E\varphi^{dr} = +0{,}571;$$

ca verificare

$$E(\varphi^{st} + \varphi^{dr}) = 3{,}854 = -\sum_{0-1}^{8-9} N \cdot e_B \frac{S}{I_b} \simeq 3{,}854;$$

pentru traseul *C* al armăturilor

$$E\varphi^{st} = -1{,}313\ ,\ E\varphi^{dr} = -1{,}236;$$

ca verificare:

$$E(\varphi^{st} + \varphi^{dr}) = -2{,}549 = -\sum_{0-1}^{8-9} N \cdot e_C \cdot \frac{S}{I_b} \simeq 2{,}549.$$

— În cazul deschiderii centrale

pentru traseul *A* al armăturilor.

$$E\theta^{st} = -E\theta^{dr} = -1{,}067;$$

pentru traseul *B* al armăturilor

$$E\theta^{st} = -E\theta^{dr} = -1{,}176;$$

pentru traseul *C* al armăturilor

$$E\theta^{st} = -E\theta^{dr} = -1{,}067.$$

Plecînd de la aceste unghiuri şi ţinînd seama şi de unghiurile cu care se rotesc extremităţile deschiderilor sub acţiunea unui moment unitar la unul din capete (calculate în tablourile nr. 2 şi nr. 3) se pot determina momentele suplimentare provocate de precomprimare în dreptul rezemelor intermediare, scriind continuitatea grinzii. Astfel se obţine

$$\varphi^{dr} - 3{,}075\,M = \theta^{st} + 4{,}501\,M + 3{,}205\,M.$$

Valorile φ^{dr} şi θ^{st} se introduc cu semnele lor, pentru fiecare din traseele de armături studiate.

Aplicînd formula de mai sus, s-au obţinut următoarele momente suplimentare provocate de precomprimare, ca urmare a nedeterminării statice:

— pentru traseul *A* al armăturilor

$$M = + 0{,}118 \text{ tm pentru } N = 1 \text{ t};$$

— pentru traseul *B* al armăturilor

$$M = + 0{,}162 \text{ tm pentru } N = 1 \text{ t};$$

— pentru traseul *C* al armăturilor

$$M = - 0{,}016 \text{ tm pentru } N = 1 \text{ t}.$$

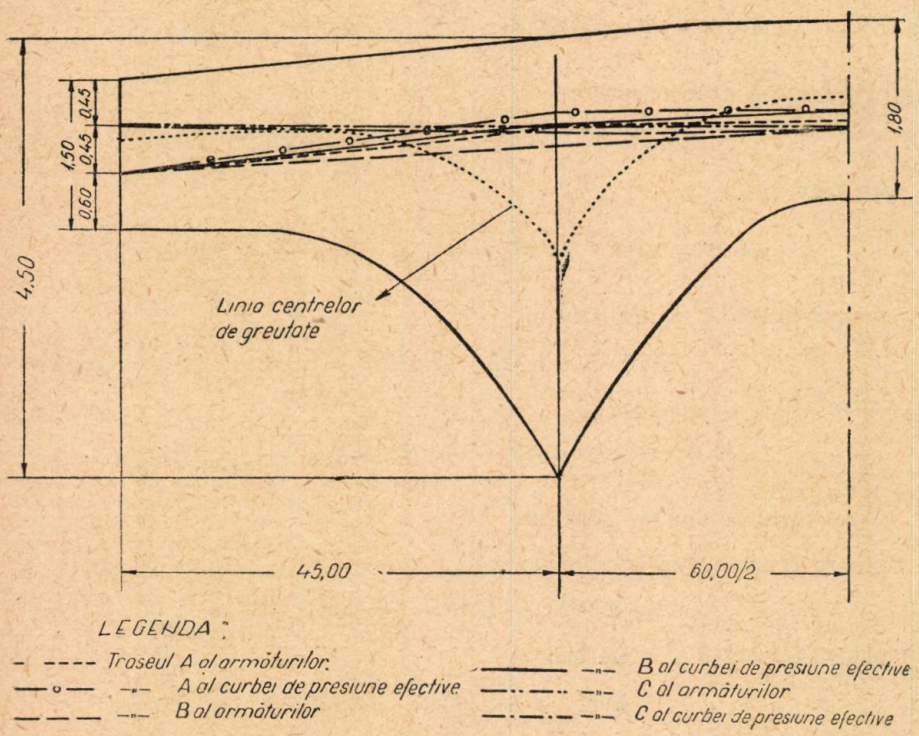


Fig. 16. — Traseul armăturilor şi liniile de acţiune ale eforturilor interioare.

Momentele determinate mai sus, împărţite prin forţa de precomprimare ($N = 1$ tonă), dau excentricitatea suplimentară ce trebuie adăugată excentricităţii armăturii pentru a obţine curba de presiune efectivă a eforturilor interioare.

În tabloul nr. 7 sînt redate calculele pentru obţinerea acestei curbe de presiune efective (în punctele în care s-au calculat solicitările maxime şi minime).

În figura 16 s-au desenat atît traseele studiate pentru armături, cît şi curbele de presiune efective ce au rezultat ţinînd seama de momentele suplimentare provocate de precomprimare, ca urmare a nedeterminării statice.

Plecînd de la curbele de presiune efective ale eforturilor interioare şi ţinînd seama de eforturile unitare maxime şi minime provocate de sarcinile exterioare,

Tabloul nr. 7

Curbele de presiune efective ale eforturilor interioare

	Secţiunea	0	2	4	6	8	9	10	12	15
Traseul *A*	Excentricitatea armăturii	−0,310	−0,270	−0,190	+0,080	+0,620	+1,400	+0,560	−0,060	−0,380
	Excentricitatea suplimentară	0,000	+0,026	+0,052	+0,079	+0,105	+0,118	+0,118	−0,118	+0,118
	Excentricitatea curbei de presiune efectivă	−0,310	−0,244	−0,138	+0,179	+0,725	+1,518	+0,678	+0,058	−0,262
Traseul *B*	Excentricitatea armăturii.....	−0,310	−0,296	−0,243	0,000	+0,514	+1,280	+0,483	−0,080	−0,380
	Excentricitatea suplimentară	0,000	+0,036	+0,072	+0,108	+0,144	+0,162	+0,162	+0,162	+0,162
	Excentricitatea curbei de presiune efectivă	−0,310	−0,260	−0,171	+0,108	+0,658	+1,442	+0,645	+0,082	−0,218
Traseul *C*	Excentricitatea armăturii	+0,140	+0,080	+0,060	+0,230	+0,670	+1,400	+0,560	−0,060	−0,380
	Excentricitatea suplimentară	0,000	−0,004	−0,007	−0,011	−0,014	−0,016	−0,016	−0,016	−0,016
	Excentricitatea curbei de presiune efectivă	+0,140	+0,076	+0,053	+0,219	+0,656	+1,384	+0,544	−0,076	−0,396

Tabloul nr. 8

Eforturi de precomprimare necesare, în tone

Secţiunea	2	4	6	8	9	10	12	15
Traseul *A*	2750	2990	1075	2210	2480	2220	1250	2180
Traseul *B*	2690	2830	1145	2290	2550	2260	1225	2320
Traseul *C*	5400	4380	1135	2290	2600	2380	1440	1850

s-au determinat în tabloul nr. 8 eforturile de precomprimare necesare, punînd condiţia ca în cazurile cele mai defavorabile de încărcare să mai rămînă în secţiune un efort unitar de compresiune de cel puţin 5 kg/cm²; această condiţie este

$$\frac{N_{nec}}{A_b} + \frac{N_{nec} \cdot e_{efectiv}}{W_b} - \frac{M_{max}}{W_b} \geqslant +5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dacă nu se iau în consideraţie secţiunile 6 şi 12 unde, ca urmare a eforturilor unitare mici provocate de sarcinile exterioare, rezultă şi eforturi de precomprimare necesare foarte mici, din analizarea tabloului nr. 8 se pot trage următoarele concluzii:

a) Traseul *C* al armăturilor se elimină ca neeconomic, ducînd la eforturi de precomprimare necesare foarte mari în comparaţie cu celelalte trasee.

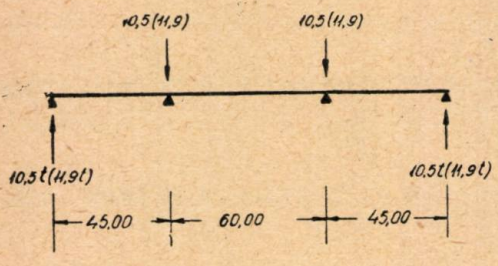


Fig. 17. — Reacţiuni suplimentare provocate de precomprimare.

b) Între traseele *A* şi *B* trebuie preferat ultimul, deoarece pe lîngă faptul că necesită eforturi ceva mai mici şi variaţia eforturilor necesare în lungul grinzii este mai mică, prezintă marele avantaj al unui singur punct de frîntură ce coincide cu axa de simetrie a podului, lucru care elimină cu totul frecările pe parcurs, deoarece exercitarea preîntinderii se face simultan la ambele capete.

Se alege deci traseul *B* al armăturilor. Ţinînd seama de pierderile de tensiune ca urmare a contracţiei, curgerii lente a betonului etc., se pun 33 fascicule avînd fiecare cîte 59 ⌀ 5, exercitînd un efort iniţial de 3 300 tone şi considerînd că rămîne permanent un efort de 2 910 tone.

6. Solicitări provocate de precomprimare. Solicitări finale

Plecînd de la traseul de armături ales şi de la valoarea efortului de precomprimare stabilit mai înainte, se obţine în dreptul reazemelor intermediare un moment suplimentar provocat de precomprimare, ca urmare a nedeterminării statice,

$$M = 0{,}162 \times 2\,910 = 471 \text{ tm } (535).$$

Valoarea din paranteză se referă la perioada iniţială cînd pierderile de tensiune nu s-au produs încă.

În figura 17 sînt arătate reacţiunile suplimentare provocate de acest moment. Ţinînd seama de valoarea efortului de precomprimare precum şi de excentricităţile efective ale curbei de presiune, s-au calculat momentele pe care precomprimarea le introduce în lungul podului. În figura 18 *a* sînt redate momentele provocate de sarcinile permanente, inclusiv precomprimarea, în faza iniţială. Se vede clar în comparaţie cu linia punctată care reprezintă diagrama momentelor provocate de sarcinile exterioare permanente, cît de mult îmbunătăţeşte precomprimarea comportarea statică a grinzii, micşorînd considerabil solicitările. În figura 18 *b* s-au desenat momentele maxime şi minime în lungul podului, ţinînd seama şi de precomprimare; se poate remarca de asemenea considerabila reducere a solicitărilor maxime.

În figura 19 s-a arătat variaţia eforturilor unitare efective în lungul podului atît pentru sarcina permanentă în perioada iniţială (fig. 19 *a*), cît şi valorile maxime şi minime în exploatare (fig. 19 *b*).

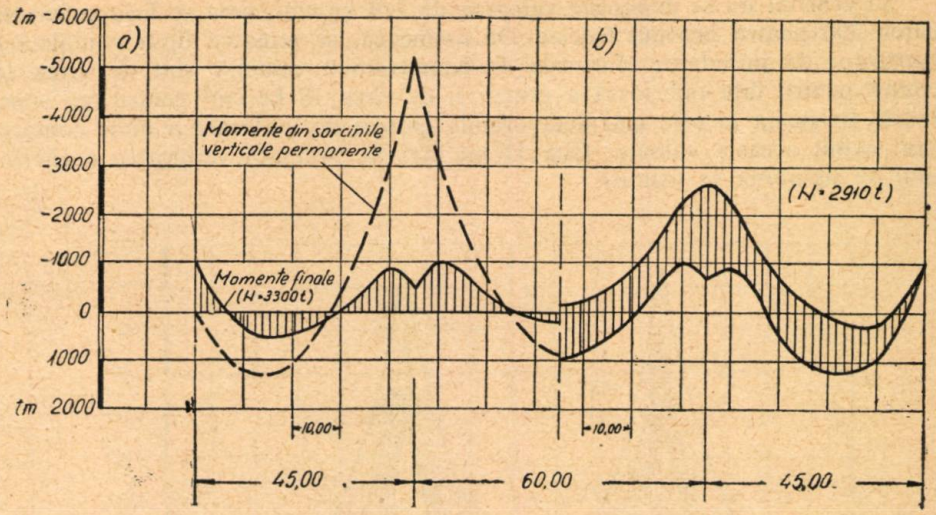


Fig. 18. — Variația momentelor în lungul podului:
a) din sarcini permanente (inclusiv precomprimarea); *b)* momente finale totale.

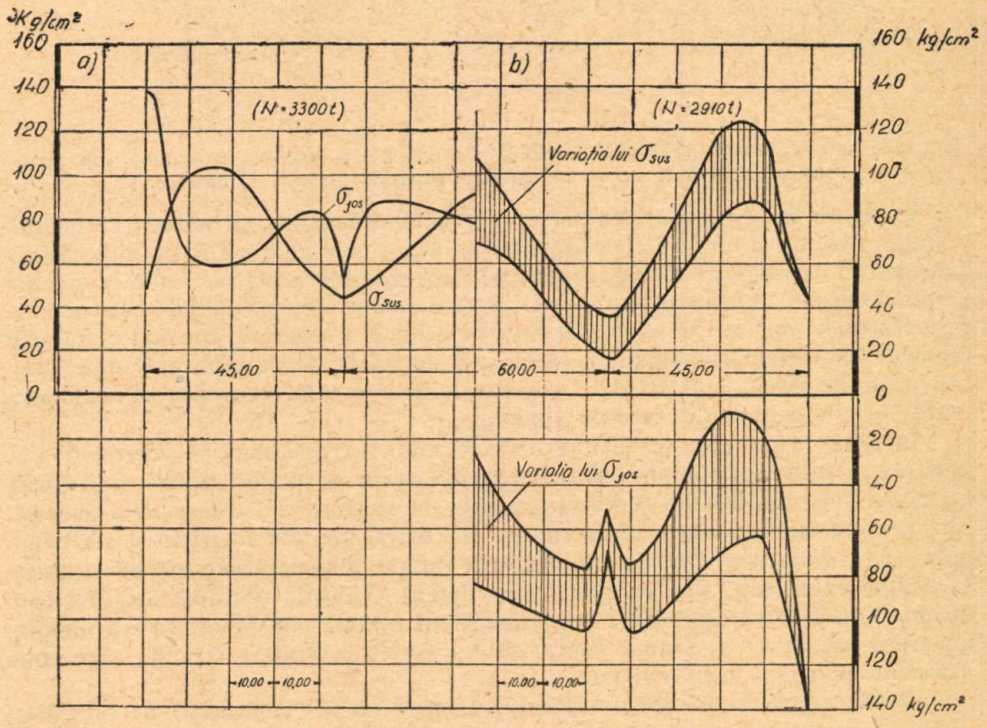


Fig. 19. — Variația eforturilor unitare în lungul podului:
a) din sarcini permanente (inclusiv precomprimarea); *b)* eforturi unitare finale totale.

Se vede că nu se depăşeşte valoarea de 140 kg/cm², ceea ce face suficientă marca 300 pentru betonul folosit. De asemenea, se remarcă lipsa completă a eforturilor de întindere; eforturile de compresiune minimă sînt de circa 10 kg/cm² pentru faţa inferioară a grinzii şi de circa 18 kg/cm² pentru cea superioară. Existenţa în cele mai defavorabile ipoteze de încărcare a unor compresiuni avînd această valoare, face să nu mai fie necesară verificarea coeficientului de siguranţă la fisurare.

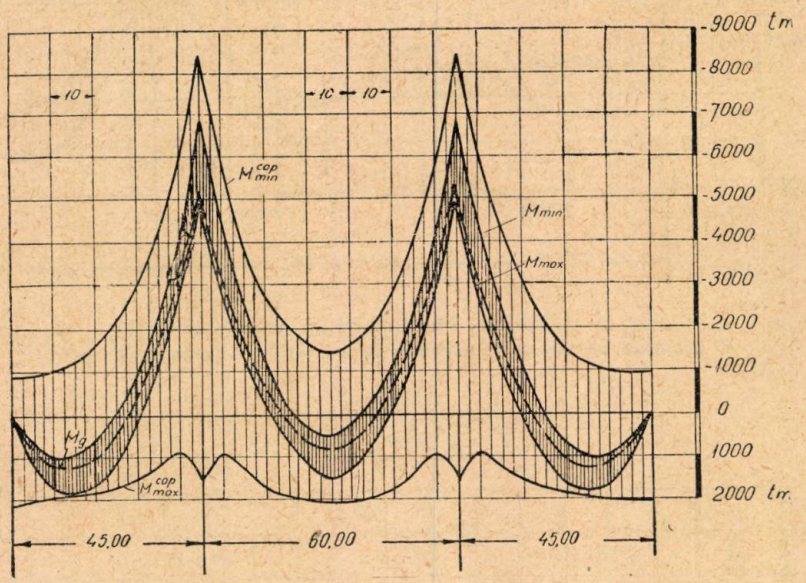


Fig. 20. — Variaţia în lungul podului a momentelor maxime şi minime din sarcini exterioare şi a momentelor capabile maxime şi minime.

În figura 20 s-a trasat diagrama momentelor maxime şi minime în lungul podului, precum şi momentele capabile maxime şi minime ale diferitelor secţiuni, considerînd ca moment maxim capabil al unei secţiuni, acela pentru care efortul unitar de la faţa inferioară este zero, iar ca moment minim capabil acela pentru care efortul unitar nul se găseşte la faţa superioară a secţiunii. Întrucît diagrama momentelor capabile acoperă în întregime suprafaţa de variaţie a momentelor provocate de sarcinile exterioare, se poate trage concluzia că podul se comportă foarte bine din punct de vedere static.

În ceea ce priveşte verificarea coeficientului de siguranţă la rupere, determinarea sa este mai complicată, deoarece din cauza sarcinilor mobile este dificil de calculat momentele de rupere provocate de sarcinile exterioare. Din această cauză, s-a calculat momentul de rupere al fiecărei secţiuni în parte şi s-a comparat acest moment cu cel maxim, respectiv minim, ambele provocate de acţiunea sarcinilor exterioare, din secţiunea considerată. Valorile obţinute au fost totdeauna mai mari decît 2,40 şi acest coeficient trebuie considerat ca un minim, deoarece nu s-a ţinut seama de loc de capacitatea suplimentară de rezistenţă a sistemului static nedeterminat.

Dacă se ţine seama că verificînd eforturile unitare principale de întindere — ţinînd seama şi de precomprimare — nu se depăşeşte valoarea de 12,4 kg/cm², se ajunge la concluzia că podul proiectat corespunde şi din acest punct de vedere.

În concluzie, rezultă că soluția adoptată, menținînd o comportare statică favorabilă datorită continuității și în același timp și avantajele precomprimării, reprezintă o soluție foarte indicată în cazul considerat. Indicii tehnico-economici foarte favorabili arătați mai înainte concretizează aceste avantaje.

НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО СЖАТОГО БЕТОНА И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИХ В КАЧЕСТВЕ ОСНОВНЫХ МОСТОВЫХ БАЛОК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части настоящей работы изглагаются преимущества изготовления неразрезных балок из предварительно сжатого бетона, а также основные элементы их расчета. Вопреки мнению некоторых строителей автор утверждает, что неопределенные статические усилия, вызванные предварительным вытягиванием арматур, могут быть действительно полезны, так как способствуют улучшению статических качеств структуры в целом.

Во второй части работы кратко описан проект шоссейного моста, построенного из вышеуказанных балок.

В заключение автор показывает, что в технико-экономическом отношении предлагаемая система представляет больше преимуществ, чем аналогичные постройки из обыкновенного железобетона и даже из предварительно сжатого бетона с свободно лежащими балками.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Балка статически неопределенной системы, разрезанная в узлах.

Рис. 2. — Балка статически неопределенной системы. Условные знаки для усилий и эксцентричности.

Рис. 3. — Рама, не подвергающаяся статически неопределенным усилиям при предварительном сжатии.

Рис. 4. — Схема для отождествления сечений.

Рис. 5. — Изменения сечения бетона вдоль моста.

Рис. 6. — Изменение высоты сечения и положение центра тяжести (на нижней стороне балки) вдоль моста.

Рис. 7. — Изменение момента инерции вдоль моста.

Рис. 8. — Схема расчета деформаций под действием унитарного момента.

Рис. 9. — Вспомогательная схема для расчета линии влияния момента против промежуточной опоры.

Рис. 10. — Краевые углы вращения для расчета линии влияния M_B.

Рис. 11. — Линии влияния изгибающих моментов в различных сечениях моста.

Рис. 12. — Линии влияния срезывающих сил против опор моста.

Рис. 13. — Изменение постоянной нагрузки вдоль моста.

Рис. 14. — Изгибающие моменты и унитарные усилия, вызванные внешними постоянными нагрузками (без предварительного сжатия): *a* — диаграмма изгибающих моментов; *b* — диаграмма унитарных усилий.

Рис. 15. — Усилия и деформации, вызванные предварительным сжатием в пролетах, считающихся свободно лежащими.

Рис. 16. — Направление расположения арматур по линиям действия внутренних усилий.

Рис. 17. — Дополнительные противодействия, вызванные предварительным сжатием.

Рис. 18. — Изменение моментов вдоль моста: *a* — постоянные нагрузки (включая предварительное сжатие); *b* — окончательные суммарные моменты.

Рис. 19. — Изменение унитарных усилий вдоль моста: *a* — постоянные нагрузки (включая предварительное сжатие); *b* — окончательные тотальные моменты сопротивления.

Рис. 20. — Изменение вдоль моста максимальных и минимальных моментов внешних нагрузок и максимальных и минимальных моментов грузоподъемности.

POUTRES CONTINUES EN BÉTON PRÉCONTRAINT; LEUR EMPLOI À LA RÉALISATION DES POUTRES DES PONTS

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie de cette Note, l'Auteur expose les avantages des poutres continues en béton précontraint ainsi que les éléments de base de leur calcul. L'Auteur est d'un autre avis que certains spécialistes et affirme que les sollicitations statiquement indéterminées, dues à la prétension des armatures, peuvent être d'une utilité réelle, car elles mènent à un comportement statique, de l'ensemble de la structure, bien plus favorable.

La seconde partie du travail comprend la description sommaire du projet d'un pont route, réalisé à l'aide de poutres continues en béton précontraint.

Les conclusions d'ordre technique et économique auxquelles l'Auteur aboutit démontrent que le système proposé est plus avantageux que le système analogue utilisant le béton armé ordinaire et offre même certains avantages sur la solution qui consiste à utiliser le béton précontraint sous forme de poutres reposant librement sur deux appuis.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Poutre d'un système statiquement indéterminé, sectionné aux appuis.

Fig. 2. — Poutre d'un système statiquement indéterminé. Convention sur les signes des sollicitations et excentricités.

Fig. 3. — Cadre qui n'est pas soumis aux sollicitations statiquement indéterminées dues à la précontrainte.

Fig. 4. — Schéma d'identification des sections.

Fig. 5. — Variations de la section du béton le long du pont.

Fig. 6. — Variations de la hauteur de la section et de la position du centre de gravité (à la face inférieure de la poutre) le long du pont.

Fig. 7. — Variations du moment d'inertie le long du pont.

Fig. 8. — Schéma du calcul des déformations sous l'action d'un moment unitaire.

Fig. 9. — Schéma facilitant le calcul de la ligne d'influence du moment en regard de l'appui intermédiaire.

Fig. 10. — Angles marginaux de rotation pour le calcul de la ligne d'influence de M_B.

Fig. 11. — Lignes d'influence des moments de fléxion dans les différentes sections du pont.

Fig. 12. — Lignes d'influence des efforts tranchants en regard des appuis du pont.

Fig. 13. — Variations de la charge permanente le long du pont.

Fig. 14. — Moments de flexion et contraintes dus aux charges permanentes extérieures (sans précontrainte). *a*) Diagramme des moments de flexion; *b*) diagramme des contraintes.

Fig. 15. — Sollicitations etdéformations dues à la précontrainte dans les ouvertures considérées reposant simplement sur deux appuis.

Fig. 16. — Tracé des armatures et des lignes d'action des efforts intérieurs.

Fig. 17. — Réactions supplémentaires dues à la précontrainte.

Fig. 18. — Variations des moments le long du pont. *a*) dues aux charges permanentes (y compris la précontrainte); *b*) moments finaux totaux.

Fig. 19. — Variations des contraintes le long du pont. *a*) dues aux charges permanentes (y compris la précontrainte); *b*) contraintes finales totales.

Fig. 20. — Variations le long du pont des moments maxima et minima dus aux charges extérieures et les moments capables, maxima et minima.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Nicolau, A. Froimescu şi M. Weissenberg, *Elemente de planşeu de deschidere mare din beton precomprimat.* Ed. Ministerului Construcţiilor, Bucureşti, 1953.
2. A. Froimescu şi M. Weissenberg, *Grinzi de rezistenţă pentru poduri din beton precomprimat.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3-4, iulie-decembrie 1954 (sub tipar).
3. — *Date experimentale de la încercarea unei grinzi de pod din beton precomprimat.* Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţii, 1954, nr. 2.
4. A. Froimescu, *Calculul pierderilor de tensiune datorită preîntinderii succesive a fasciculelor de armături.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3-4, 1954 (sub tipar).
5. V. Nicolau, A. Froimescu şi M. Weissenberg, *Căile de dezvoltare ale betonului precomprimat în R.P.R.* Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţii, 1952, nr. 9.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 1—2, 1955

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

UN MODEL NOU DE ANEMOGRAF

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

DE

I. STROESCU

Printre cele dintîi probleme pe care I.M.A. şi le-a propus spre studiere, a fost şi aceea a utilizării energiei eoliene.

Pentru o justă rezolvare a acestei probleme este necesară determinarea «potenţialului energetic eolian» şi mai ales a acelor regiuni numite «vaduri eoliene», unde acest potenţial atinge o valoare medie mai ridicată. În acest scop este utilă trasarea unei hărţi a vînturilor, a cărei alcătuire se poate face numai cu ajutorul unor instrumente cu funcţionare şi înregistrare continuă a frecvenţei, intensităţii şi direcţiei vîntului.

Astfel de instrumente există, sînt însă de o construcţie delicată, costisitoare, fiind concepute pentru o funcţionare în condiţii de laborator. Faţă de această situaţie s-a trecut la studierea, proiectarea şi realizarea *) unui aparat robust, cît mai simplu, care nu necesită o sursă exterioară de energie pentru funcţionare.

În figura 1 este reprezentat prototipul unui astfel de aparat, numit anemograf.

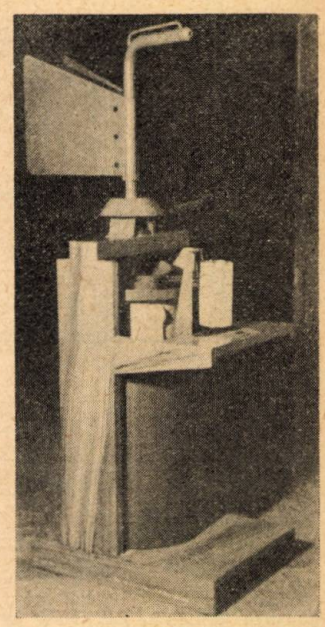


Fig. 1

DESCRIEREA APARATULUI ŞI A FUNCŢIONĂRII LUI

Principial, aparatul este cu funcţionare pneumatico-hidrostatică (fig. 2). În alcătuirea lui se disting trei grupe de piese, avînd roluri diferite. Un grup de piese (la partea de sus a ansamblului) este format dintr-o sondă de presiune auto-orientabilă; un alt grup de piese (la partea de jos a ansamblului) transformă în mişcare rectilinie diferenţa dintre presiunea totală şi presiunea statică a curentului de aer; al treilea grup de piese (în centrul ansamblului) funcţionează mecanic, asigurînd înscrierea rezultatelor culese, pe o bandă rulantă de hîrtie

*) Prototipul a fost realizat în Atelierul central al Academiei R.P.R.

Sonda de presiune, de tip Pitot-Prandtl (fig. 2), este formată din ţevile curbate J şi K. Prin orificiul m se înregistrează presiunea totală $p + \frac{\rho}{2} V^2$, iar prin orificiul l presiunea statică p. Dubla curbură a tubului K, lîngă orificiul m, are rolul de a evita pătrunderea apei, în timp de ploaie, în interiorul aparatului.

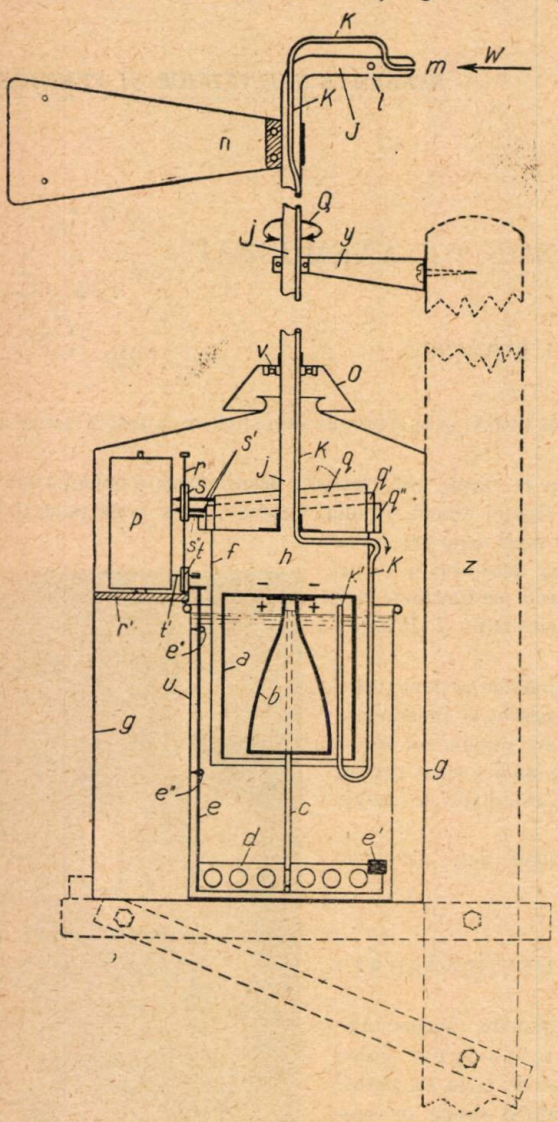


Fig. 2

Această sondă de presiune este autoorientabilă în curentul de aer, cu ajutorul unui ampenaj-giruetă n, în formă de V. Săgeata Q indică această mişcare.

Braţul vertical al sondei j, paralel cu stîlpul Z, susţinător al anemografului, este ghidat de către braţările cu rulmenţi y şi v.

La partea inferioară, sonda se termină cu un recipient de tablă, f, întors cu gura în jos şi care se poate roti în jurul axului vertical odată cu sonda, sub efectul vîntului asupra giruetei. Tubul de presiune totală K, face corp comun cu acest recipient şi prezintă o îndoitură în formă de U, terminîndu-se cu deschiderea lui în K'.

Pe fundul său superior, recipientul f poartă trei gulere circulare de tablă; q, q' şi q'' care fac oficiul de came în mişcarea lor solidară cu braţul sondei j şi cu recipientul f.

Un vas cilindric u este umplut cu apă la care se adaugă un lichid anticongelant pe timp de iarnă precum şi o peliculă de ulei la suprafaţă pentru evitarea evaporării pe timpul verii.

Cu totul independent de aceste două vase concentrice, f şi u, tot coaxial cu axul vertical al ansamblului se află un alt vas răsturnat cu gura în jos, a, care face corp comun cu flotorul b. O tijă c, o lamă orizontală d şi o altă tijă verticală e precum şi o contragreutate e', sînt solidare cu flotorul b şi vasul a.

Cu litera r sînt notate două tije paralele, verticale, încastrate în măsuţa r', între care pot culisa piesele paralelipipedice t şi s, purtătoare ale creioanelor inscriptoare s' şi t'. O bandă de hîrtie P înfăşurată pe doi cilindri verticali, defilează cu viteză constantă prin faţa creioanelor inscriptoare.

Purtătorul s al creioanelor s' prezintă o proeminenţă s'' care se sprijină pe cama perfect circulară q''. Această camă, prin rotaţia ei, deplasează pe verticală piesa cu creioane.

Gulerele-came q şi q', neconcentrice, pe care se sprijină creioanele s', fac prin rotaţia lor ca aceste creioane să nu atingă împreună hîrtia decît la partea de sus şi de jos a curse

piesei *s*. Între cele două extreme ale cursei, fie unul fie celălalt creion *s'* se retrage de pe hîrtie, după cum rotaţia giruetei şi a camelor se face către stînga sau către dreapta. Cum unul din creioane este de culoare neagră, iar celălalt roşu, se va putea distinge pe banda de hîrtie vestul de est. Nordul şi sudul sînt marcate cu ambele creioane, dar se pot distinge prin aceea că nordul se află la partea de sus a hîrtiei, iar sudul la partea de jos a cursei piesei *s* (fig. 3). Sub efectul diferenţei de presiune din recipientele *a* şi *h* (în *a* o suprapresiune +, iar în *h* o depresiune −), flotorul se va ridica pe verticală odată cu tot ansamblul lui: *c*, *d*, *e'*, *e*. Tija *e* va ridica purtătorul *t* al creionului *t'*, înscriind pe hîrtie intensitatea vîntului.

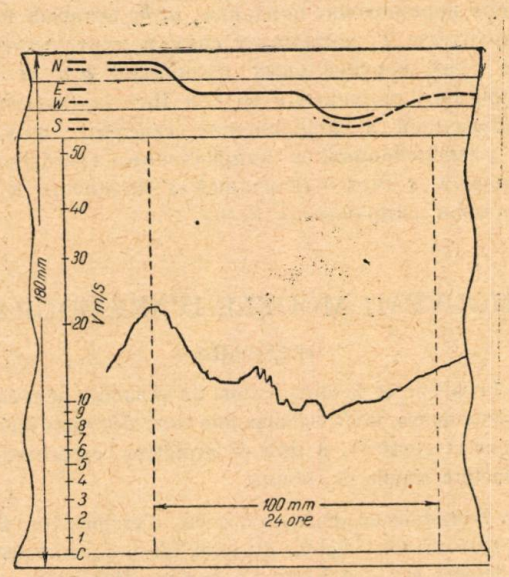


Fig. 3

Întregul ansamblu al aparatului, exceptînd sonda de presiune, se află închis într-o cutie *g*, fixată pe stîlpul de lemn *z*.

Figura 3 reprezintă un fragment de bandă de hîrtie, în care sînt înscrise direcţiile şi intensitatea vîntului. Pe trei fişii înguste, acest anemograf poate reda variaţia continuă a direcţiei vîntului în raport cu cele patru puncte cardinale.

Forma flotorului *b* este determinată aşa fel, încît scara intensităţii vîntului să fie mai mare la vitezele mici, iar indicaţiile să înceapă de la mai puţin de 1 m/s viteză, pînă la 50 m/s. O bandă de hîrtie lungă de 9 m este suficientă pentru o înscriere continuă automată timp de trei luni de zile, distanţa pe această bandă pentru o zi (24 ore) fiind de 10 centimetri.

НОВАЯ МОДЕЛЬ АНЕМОГРАФА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

С целью установить значения и распределения воздушно-энергетического потенциала на отечественной территории и составления в то же время карты ветров, представляющей интерес для климатологии вообще, автором был изобретен и построен, в виде экспериментального прототипа, гидростатический анемограф простого и солидного устройства.

Подобные аппараты, воспроизведенные в нескольких десятках экземпляров, и установленные на деревянных столбах Z, будут распределены по различным областям страны, где будут действовать автоматически, беспрерывно записывая на бумажной передвижной ленте характеристики ветров, а именно их силу, длительность и направление.

Аппарат представляет собой нечто вроде трубки «Питота» с длинным вертикальным стержнем и может самоориентироваться благодаря флюгеру n. Динамическое давление ветра, распределенное и направленное этой трубкой Питота, вызывает вертикальное перемещение поплавка, a, b, который посредством жесткой системы c, d, e, и карандаша t' записывает силу и длительность ветра.

Под действием трех вертикальных цилиндров q, q' и q'', составляющих одно целое с вращающимся стержнем J трубки Питота (концентрических цилиндров на оси, расположенной в направлении север-юг, и эксцентрических по отношению к оси, расположенной в направлении восток-запад, действующих как кулачки), держатель s двух карандашей s' (красного и черного) скользит вверх и вниз, записывая направление ветра.

UN NOUVEAU MODÈLE D'ANÉMOGRAPHE

(RÉSUMÉ)

En vue d'établir la valeur et la distribution du potentiel aéro-énergétique sur le territoire du pays, et, en même temps, pour élaborer une carte des vents intéressant la climatologie en général, on a imaginé et construit, à titre de prototype expérimental, un anémographe hydrostatique, d'une facture simple et robuste.

De tels appareils, reproduits en quelques dizaines d'exemplaires, fixés sur des piliers en bois Z, seront répartis dans diverses régions du pays, où ils fonctionneront automatiquement, en inscrivant continuellement sur une bande de papier déroulante, les caractéristiques du vent: intensité, durée et direction.

L'appareil est constitué par une sorte de tube de Pitot à longue tige verticale, autoorientable grâce à la girouette n. La pression dynamique du vent, sélectionnée et fournie par ce « pitot », provoquera le déplacement vertical d'un flotteur a, b, qui inscrira l'intensité et la durée du vent par l'entremise du système rigide c, d, e et du crayon t'.

Par l'intermédiaire des trois cylindres verticaux q, q', q'', faisant corps commun avec la tige tournante J du « pitot » (cylindres concentriques sur l'axe nord-sud et excentriques sur l'axe est-ouest, faisant l'office de cames), le porteur s de deux crayons s' (rouge et noir) glissera en haut et en bas, inscrivant la direction du vent.

RECENZII

A. L. GOLDENVAIZER, *Teoria uprughih tonkih obolocek* (*Teoria pînzelor subţiri elastice*) Gostehizdat, Moscova, 1953.

Lucrarea *Teoria pînzelor subţiri* de A. L. Goldenvaizer, apărută la începutul acestui an, prezintă un deosebit interes, mai ales pentru cercetătorul ştiinţific în acest domeniu.

Ideea fundamentală a cărţii este aceea a descompunerii stării de tensiune generale a pînzei subţiri în stări de tensiune componente mai simple: starea fără momente (ceea ce corespunde celei mai simple ipoteze asupra distribuţiei liniare), starea de momente pură şi starea de efect de contur. Pornind de la această clasificare, prezentată pentru prima oară de Goldenvaizer într-un articol al său din anul 1945, construirea aproximativă a soluţiei revine la suprapunerea de soluţii corespunzătoare unor stări-componente şi la satisfacerea condiţiilor la limită prin alegerea potrivită a constantelor de integrare.

Cartea cuprinde cinci părţi, din care cele mai interesante, atît prin conţinutul lor, cît şi prin sugestiile şi perspectivele ce le deschid, sînt ultimele două.

Prima parte (cap. 1-4) este consacrată expunerii bazelor teoriei generale (liniare) a pînzelor subţiri (în cadrul ipotezei conservării elementului rectiliniu normal pe suprafaţa mediană). Expunerea conţine mult material, existent pînă acum numai în articole de revistă ale cercetătorilor sovietici (Goldenvaizer, Vlasov, Rabotnov, Lurie). Un interes deosebit îl prezintă rezolvarea sistemului de ecuaţii (omogene) prin cele patru funcţiuni ale lui Lurie (funcţiuni de tensiune, analoge funcţiei lui Airy din cazul problemei plane); analogia statico-geometrică (datorită la origine lui Rabotnov), care permite o interesantă utilizare a rezultatelor teoriei micilor încovoieri ale suprafeţelor, în problemele de teoria pînzelor subţiri; în fine, analiza relaţiilor şi ecuaţiilor teoriei pînzelor subţiri din punctul de vedere al teoremelor generale ale teoriei elasticităţii (teoremele de tip Betii, teorema de unicitate) (datorită lui Goldenvaizer). Notăm că această din urmă preocupare nu este superficială: prezentarea problemei pînzelor subţiri ca problemă în esenţă bidimensională (şi nu pornind de la ecuaţiile generale ale elasticităţii, cum o face Vlasov) pune în discuţie valabilitatea acestor teoreme generale, fără de care nu pot fi elaborate nici metodele variaţionale de construire a soluţiei (problemă pe care cartea nu o abordează, şi nici metoda descompunerii, cu satisfacerea a posteriori a condiţiilor la limită).

Este regretabil faptul că autorul nu foloseşte simbolica tensorială, larg utilizată de el în articolele sale, nu numai ca metodă de transcripţie, ci şi ca procedeu euristic. Aceasta îl obligă la calcule laborioase în scopul păstrării unui sistem de coordonate oarecare (nu neapărat de linii de curbură).

Partea a doua (cap. 5—9) se ocupă de teoria fără momente. De un deosebit interes este materialul relativ la utilizarea, în practică, a analogiei statico-geometrice, precum şi cel relativ la utilizarea teoriei funcţiilor de o variabilă complexă. Importanţa metodelor din acest capitol este încă mărită de faptul că găsirea integralelor stării de momente pură, este o problemă matematic echivalentă cu cea a găsirii integralelor stării fără momente. De asemenea, trebuie ţinut seamă şi de posibilitatea utilizării metodei Muşhelişvili pentru cazul pînzelor subţiri de curbură pozitivă (în care caz sistemul de ecuaţii al stării fără momente este eliptic). Capitolul ar fi cîştigat în adîncime, dacă această din urmă chestiune, abordată, de A. L. Goldenvaizer în articolele sale, ar fi fost prezentată aici.

Partea a treia (cap. 10—12), consacrată studiului pînzelor subţiri cilindrice circulare, este mai puţin interesantă în sine, decît ca «laborator» pentru elaborarea metodelor aproximative generale ce urmează. Calculul pînzelor subţiri cilindrice închise şi deschise, prin metoda seriilor trigonometrice (suprapunerea unei infinităţi de stări de tensiuni periodice, cu perioadă din ce în ce mai mică), analiza condiţiilor la limită pe liniile asimptotice şi neasimptotice de contur, anunţă în parte metodele părţilor IV şi V.

Partea a patra (cap. 13—15) este consacrată analizei stării de tensiune a unei pînze subțiri oarecare.

Capitolul 13 este consacrat integrării asimptotice a sistemelor de ecuații cu parametru mic. Întrucît ideea de bază a autorului este descompunerea stării de tensiune în stări «fundamentale», care se întind pe toată suprafața pînzei subțiri, și altele «de contur» cu caracter local net pronunțat, el a condus la considerarea de integrale pentru care raportul dintre derivată și funcție este mic și altele pentru care acest raport este mare. De aici, se ajunge la studierea numai a celor integrale ce pot fi puse sub forma

$$\Psi = k^q \psi(\alpha, \beta; k)\, e^{kf(\alpha,\beta;k)}. \tag{1}$$

unde $k = h^{*-l}$ și h^* = «grosimea redusă».

Se înțelege că, dacă funcțiile ψ și f pot fi obținute prin dezvoltările lor în serii asimptotice de forma

$$\varphi(\alpha,\beta;k) \sim \varphi_0(\alpha,\beta) + \frac{\varphi_1(\alpha,\beta)}{k} + \frac{\varphi_2(\alpha,\beta)}{k^2} + \dots \tag{2}$$

atunci problema este rezolvată, cu un grad sau altul de aproximație. Dacă avem de-a face cu o ecuație de forma

$$L(\Phi) + hN(\Phi) = 0, \tag{3}$$

unde L și N sînt operatori diferențiali asupra lui Φ, atunci se pot obține, în funcție de h, evaluări ale erorii asimptotice comise atunci cînd ecuația (3) este înlocuită prin

$$L(\Phi) = 0. \tag{4}$$

O analiză corespunzătoare poate fi făcută pentru cazul ecuațiilor cu caracteristice multiple și pentru alte cazuri interesante în cele ce urmează.

În capitolul 14 aceste metode sînt folosite pentru construirea efectivă a funcțiunilor f și φ, pentru cazul sistemului de ecuații al teoriei pînzelor subțiri (sistemul în deplasări) cu evaluarea erorii proprii pentru fiecare variantă posibilă, precum și cu analiza cazului de trecere de la teoria generală (corespunzătoare ecuației (3)) la teoria fără momente (corespunzătoare ecuației (4)).

Capitolul 15 conduce la construirea ecuațiilor teoriei fără momente, de data asta drept corespunzătoare cazului h (micul parametru) = 0, a ecuațiilor stării de tensiune cu exponent de variație mare ($t > 1/2$), precum și a diferitelor variante de efecte de contur (legate de anumite linii de pe suprafața mediană).

Trebuie spus că evaluarea erorii, făcută de fiecare dată cu multă grijă, este în parte iluzorie, atîta timp cît nu dispunem de teoreme de existență pentru aceste ecuații, și atîta timp cît convergența seriilor utilizate nu este niciodată cercetată. Nu este mai puțin adevărat că rezultatele rămîn plauzibile și, mai ales, utilizabile.

Partea a cincea a cărții (cap. 16—18) se ocupă de metodele aproximative de rezolvare a ecuațiilor stărilor fundamentale și de contur, obținute în partea a patra. Metoda principală de lucru este dezvoltarea sarcinii și a soluției în serie Fourier, deci, în fond, descompunerea în sumă de soluții cu exponent de variație t dat. De aici rezultă pentru fiecare din exemplele tratate, în funcție de conturul ales și de exponentul de variație, metoda aproximativă de întrebuințare.

Cartea nu cuprinde totalitatea materialului de teoria pînzelor subțiri. Ar fi fost însă de dorit ca anumite scheme de calcul ale autorului să fie comparate cu schemele de calcul din cărțile lui Lurie, Vlasov sau Novojilov, aceasta pentru a da o idee mai exactă de valabilitatea metodelor aproximative propuse și pentru a ridica măcar în parte suspensiunea inevitabil generată de nesiguranța asupra convergenței proceselor asimptotice larg utilizate.

Aceste observații nu micșorează însă nicidecum valoarea deosebită a cărții, ci indică numai unele probleme pe care ea le lasă în suspensie, probleme în legătură cu care orice precizare în plus ar fi binevenită.

Liviu Solomon

Rasciotîi na procinost jestkost i polizuciest elementov maşinostroitelnîh costrucţii. Calcule de rezistență, rigiditate și fluaj ale elementelor de mașini sub redacția lui S. D. PONOMAREV, Mașghiz, Moscova, 1953.

Lucrarea a apărut în colecția Institutului tehnic superior I. E. Bauman, din Moscova, grație unui colectiv tehnico-științific sub conducerea prof. dr. S. D. Ponomarev.

În cele 258 pagini ale volumului sînt cuprinse următoarele studii:

N. N. Malinin, *Calculul discului în rotație, fixat pe un arbore cu strîngere.*

N. M. Sapojkov, *Calculul și construcția inelelor compuse cu rotație rapidă, care se montează prin ajustaj de presare.*

N. N. Malinin, *Calculul plăcilor circulare și inelare încărcate simetric, de grosime variabilă.*

S. P. Demidov, *Asupra calculului unei plăci dreptunghiulare încastrată pe contur, încărcată cu o sarcină uniformă.*

S. P. Demidov, — *Încovoierea pură a unei bare curbe, de secțiune transversală dreptunghiulară.*

S. V. Boiarșinov, *Calculul cilindrilor cu goluri, cu pereți subțiri, care se găsesc sub acțiunea unei sarcini axial simetrice arbitrare.*

L. E. Andreeva, *Calculul membranelor cu ondulație trapezoidală, slab înclinate.*

A. A. Lapin, *Asupra calculului elementului activ al cuplelor pneumatice cu coardă de cauciuc.*

A. N. Cekanov, *Construcția grafică a diagramei dependenței intensității tensiunilor de intensitatea deformațiilor după diagrama întinderii sau deplasării.*

S. M. Zasedatelev, *Metoda grafică pentru rezolvarea unor probleme de încovoiere elasticoplastică a barelor la deplasări mari.*

S. D. Ponomarev, *Calculul arcurilor comprimate formate din mai multe elemente înfășurate, constituite din cabluri cu o inimă centrală.*

N. N. Malinin, *Fluajul permanent al plăcilor circulare încărcate simetric.*

K. K. Liharev, *Instalații pentru încercarea materialelor în cazul stărilor de tensiune triaxială.*

S. V. Boiarșinov, *Asupra problemei determinării deformațiilor principale cu ajutorul cercului deformațiilor.*

Volumul mai sus citat constituie o continuare a lucrării importante apărute în 1952, sub titlul *Bazele metodelor moderne ale calculului de rezistență în construcțiile de mașini*, lucrare realizată — tot sub conducerea prof. dr. S. D. Ponomarev — de un colectiv, din care unii membri au colaborat și la volumul prezentat în recenzia de față.

Problemele tratate în acest volum și indicate mai sus constituie cazuri particulare ale chestiunilor tratate în cele 12 capitole ale lucrării apărute în 1952. Aproape toate problemele au un caracter de aplicație directă în practică, stabilind metode de calcul a diverselor elemente, ca: discuri, inele, plăci, bare etc., dînd procedee grafice și diagrame utile proiectanților.

De un deosebit interes sînt, de exemplu, calculele relative la plăcile de grosime variabilă sau cele dreptunghiulare încastrate pe contur, precum și studiul fluajului plăcilor circulare încărcate simetric.

Lucrarea este de un nivel științific și tehnic ridicat și utilizează cele mai înaintate metode de analiză și calcule în domeniul elementelor destinate construcțiilor de mașini. Ea completează bibliografia necesară sectoarelor de proiectare și construcție de mașini, a institutelor de cercetări și a învățămîntului tehnic superior.

V. Marcu

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

F2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

3-4

ANUL VI

IULIE—DECEMBRIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

3-4

ANUL VI

IULIE — DECEMBRIE 1955

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI – redactor responsabil;
ACADEMICIAN N. PROFIRI; A. BELEȘ; A. BĂRGLĂZAN;
N. TIPEI; M. ARCAN.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VI, nr. 3–4 Iulie–decembrie 1955

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

Pag.

AEROMECANICĂ

E. CARAFOLI şi L. DUMITRESCU, Asupra aripii delta subţiri dublu-conice cu incidenţă variabilă, în curent supersonic 237

N. PATRAULEA şi C. STĂNESCU, Teoria mişcărilor subsonice cu dîră aproape rectilinie 259

TIBERIU HACKER, Contribuţii la studiul stabilităţii longitudinale a avionului în evoluţiile cele mai defavorabile 269

AL. MARINESCU, Problema stabilităţii elicopterului cu rotor antrenat prin jet în zbor la punct fix 299

GH. RADO, Contribuţii la studiul coeficientului de umplere al pulsoreactoarelor.. 315

HIDROMECANICĂ

D. DUMITRESCU şi DAN GH. IONESCU, Asupra mişcării turbulente a unui lichid greu într-o conductă circulară netedă 323

T. OROVEANU, Asupra unei probleme de scurgere spre sondă în cazul unei variaţii oarecare a permeabilităţii 333

D. DUMITRESCU, V. IONESCU şi R. TOTH, Aplicarea metodei reţelelor la studiul mişcării fluidelor grele cu suprafaţa liberă 339

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Consideraţii asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze 377

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU, Clasificarea lubrifianţilor de motoare după criteriul viscozităţii 401

VIBRAŢII

L. HAMBURGER, Asupra fundaţiilor cu pături elastice intermediare ale maşinilor generatoare de şocuri şi trepidaţii periodice 433

M. MIŞICU, Asupra determinării vibraţiilor proprii ale construcţiilor 447

SANDU RĂUTU şi MIHAIL IFRIM, Unele probleme ale vibraţiilor proprii la construcţiile cu mai multe etaje 457

E. PROCOPOVICI şi C. TANASICIUC, Analogiile electrice ale vibraţiilor mecanice 473

Pag.

REZISTENȚA MATERIALELOR – ELASTICITATE

M. ARCAN și ED. NICOLAU, Metodă grafică pentru separarea tensiunilor principale în fotoelasticitate 491

N. S. PÎRVULESCU, Integrarea ecuației liniei elastice în instabilitatea de rotație a tijelor verticale 501

MIRCEA SOARE, Studiul stării de eforturi în plăcile curbe subțiri în formă de suprafețe cu două parabole directoare și plan director, în teoria de membrană 513

VIOREL VISARION, Starea de eforturi și de momente pure ale suprafeței subțiri sferice 535

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

MIRCEA MIHAILESCU și ION UNGUREANU, Încercări la compresiune pe betoane confecționate cu trei tipuri de ciment..... 545

M. WEISSENBERG și S. CIUNGU, Influența compoziției mineralogice a cimentului asupra adeziunii dintre beton și armătură..... 571

A. FROIMESCU și V. ILLE, Influența compoziției mineralogice a cimentului asupra proprietăților fizico-mecanice ale betonului și betonului armat. Curgere lentă 589

TEHNOLOGIA PRELUCRĂRII MATERIALELOR

GH. I. PANĂ, Cercetări asupra puterii absorbite la tăierea lemnului prin așchiere, în funcție de temperatura și umiditatea sa 607

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

FL. DINCĂ, Considerații asupra torsiunii unor bare cilindrice..... 617

RECENZII 621

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICA APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, rezistenţa materialelor, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, frecare, ungere, uzură).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, utilizarea energiei eoliene, etc.).

— Construcţii de maşini (cinematica mecanismelor, studiul solicitărilor în diferite maşini şi metode moderne de calcul ale acestora, coeficienţi de siguranţă, procese tehnologice, automatizare, mecanizare).

— Mecanica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studii asupra problemelor specifice materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidrotehnică şi Maşini hidraulice (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajarea cursurilor de apă).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice, precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă şi franceză. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză, germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, Str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, сопротивление материалов, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, трение, смазки, износ).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, использование энергии ветра).

— Машиностроение (кинематика механизмов, исследование напряжения в различных машинах и современные методы расчета последнего, коэффициенты запаса, технологические процессы, автоматизация, механизация).

— Строительную механику (методы статического и динамического расчета сооружений, исследования характерных задач неоднородных материалов, геомеханика, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидротехнику и гидравлические машины (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, руслообразование).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения ценных работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, написанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском, русском и французском языках. Резюме должно в среднем составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VI, № 3 – 4 Июль – декабрь 1955

СОДЕРЖАНИЕ

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ Стр.

АЭРОМЕХАНИКА

Е. КАРАФОЛИ и Л. ДУМИТРЕСКУ, О двуконических тонких крыльях дельта с переменным углом атаки в сверхзвуковом потоке 237

Н. ПАТРАУЛЯ и К. СТЭНЕСКУ, Теория дозвуковых движений с почти прямолинейным следом 259

Т. ГАКЕР, К вопросу о продольной устойчивости самолета при самых невыгодных условиях полета 269

А. МАРИНЕСКУ, Вопрос об устойчивости вертолета с ротором, приводимым в действие посредством струи в висячем полете..... 299

Г. РАДО, К вопросу о коэффициенте наполнения пульсореактора.... 315

ГИДРОМЕХАНИКА

Д. ДУМИТРЕСКУ и Д. Г. ИОНЕСКУ, О турбулентном движении тяжелой жидкости в круглой гладкой трубе..... 323

Т. ОРОВЯНУ, О притоке нефти к буровой скважине при некотором изменении проницаемости породы 333

Д. ДУМИТРЕСКУ, В. ИОНЕСКУ и Р. ТОТ, Применение метода сеток при изучении безнапорного движения тяжелых жидкостей 339

СМАЗКА, ТРЕНИЕ И ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, К расчету круглых бесконечно удлиненных подшипников с газовой смазкой..... 377

Л. РОЗЯНУ и О. ПРЕОЦЕСКУ, Классификация смазочных веществ для двигателей по признаку вязкости..... 401

ВИБРАЦИИ

Г. ГАМБУРГЕР, О фундаментах с эластичной промежуточной постелью для машин, у которых возникает биение и периодические колебания 433

М. МИШИКУ, Об определении собственных вибраций конструкций 447

С. РЭУТУ и М. ИФРИМ, Некоторые вопросы о собственных колебаниях многоэтажных конструкций 457

Е. ПРОКОПОВИЧ и К. ТАНАЩУК, Электрическая аналогия механических колебаний 473

Стр.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И УПРУГОСТЬ

М. АРКАН и Э. НИКОЛАУ, Графический метод отделения основных напряжений в фотоэластичности 491

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Интегрирование уравнения упругой линии в вопросе неустойчивости вертикальных стержней при их вращательном движении 501

М. СОАРЕ, Исследование состояния усилий на тонких оболочках 513

В. ВИСАРИОН, Состояние чистых усилий и моментов тонких сферических поверхностей 535

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. МИХЭЙЛЕСКУ и И. УНГУРЯНУ, Испытание на сжатие бетонов из трех типов цемента 545

М. ВЕЙССЕНБЕРГ и С. ЧУНГУ, Влияние минералогического состава цемента на сцепление бетона с арматурой 571

А. ФРОЙМЕСКУ и В. ИЛИЕ, Влияние минералогического состава цемента на физико-механические свойства бетона и железобетона (медленная текучесть) 589

ТЕХНОЛОГИЯ ПЕРЕРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ

Г. И. ПАНЭ, Исследование поглощаемой мощности при механической обработке дерева в зависимости от его температуры и влажности 607

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Ф. ДИНКА, По поводу явления скручивания цилиндрических брусьев 617

РЕЦЕНЗИИ 621

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VI, nos 3—4 Juillet—décembre 1955

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES — Page

AÉROMÉCANIQUE

E. CARAFOLI et L. DUMITRESCU, Sur les ailes delta minces, doublement-coniques, à incidence variable, en courant supersonique 237

N. PATRAULEA et C. STĂNESCU, Théorie des mouvements subsoniques au sillage presque rectiligne 259

TIBERIU HACKER, Contribution à l'étude de la stabilité longitudinale de l'avion dans les évolutions les plus défavorables 269

AL. MARINESCU, Le problème de la stabilité de l'hélicoptère à rotor entraîné par jet en vol en un point fixe 299

GH. RADO, Contribution à l'étude du coefficient de remplissage des pulsoréacteurs 315

HYDROMÉCANIQUE

D. DUMITRESCU et DAN GH. IONESCU, Sur le mouvement turbulent d'un liquide pesant dans une conduite circulaire lisse 323

T. OROVEANU, Sur le problème de l'écoulement vers un puits de pétrole dans le cas d'une variation quelconque de la perméabilité 333

D. DUMITRESCU, V. IONESCU et R. TOTH, L'application de la méthode des réseaux à l'étude du mouvement des fluides pesants à surface libre 339

LUBRIFICATION, FROTTEMENT, USURE

V. N. CONSTANTINESCU, Considérations sur le calcul des paliers circulaires d'allongement infini, lubrifiés aux gaz 377

L. ROZEANU et O. PREOȚESCU, Classification des lubrifiants des moteurs d'après le critérium de la viscosité 401

VIBRATIONS

L. HAMBURGER, Sur les fondations à couches élastiques intermédiaires des machines génératrices de chocs et de trépidations périodiques 433

M. MIȘICU, Sur la détermination des vibrations propres des constructions 447

SANDU RĂUTU et MIHAIL IFRIM, Certains problèmes des vibrations propres dans le cas des constructions à plusieurs étages 457

E. PROCOPOVICI et C. TANASICIUC, Analogies électriques des vibrations mécaniques 473

Page

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX, ÉLASTICITÉ

M. ARCAN et ED. NICOLAU, Méthode graphique de séparation des tensions principales dans la photoélasticité 491

N. S. PÎRVULESCU, Intégration de l'équation de la ligne élastique dans l'instabilité de rotation des tiges verticales 501

MIRCEA SOARE, Etude de l'état des efforts dans les voiles minces ayant la forme de surfaces admettant deux paraboles directrices et un plan directeur, dans la théorie de membrane 513

VIOREL VISARION, État d'efforts et de moments purs de la surface mince sphérique..... 535

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

MIRCEA MIHAILESCU et ION UNGUREANU, Essais de résistance à la compression des bétons préparés avec trois qualités de ciment..... 545

M. WEISSENBERG et S. CIUNGU, Influence de la composition minéralogique du ciment sur l'adhésion entre le béton et les armatures..... 571

A. FROIMESCU et V. ILLE, Influence de la composition minéralogique du ciment sur les propriétés physico-mécaniques du béton et du béton armé — fluage 589

TECHNOLOGIE DE L'USINAGE DES MATÉRIAUX

GH. I. PANĂ, Recherches sur la puissance absorbée à la coupe du bois par détachement en copeaux, en fonction de sa température et de son humidité 607

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

FL. DINCĂ, Considérations sur la torsion de certaines barres cylindriques.... 617

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....621

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment:

— Mécanique générale (élasticité, résistance des matériaux, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, frottement, lubrification, usure);

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énérgie éolienne, etc.);

— Construction mécanique (cinématique des mécanismes, méthodes modernes de calcul des différentes machines, processus technologiques, automatisation, etc.);

— Mécanique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, géotechnique, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction);

— Hydrotechnique et machines hydrauliques (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

AEROMECANICĂ

ASUPRA ARIPII DELTA SUBŢIRI DUBLU-CONICE CU INCIDENŢĂ VARIABILĂ, ÎN CURENT SUPERSONIC

DE

ACADEMICIAN E. CARAFOLI şi L. DUMITRESCU

A. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] s-a indicat metoda de trasare a aripilor triunghiulare dublu-conice, sau, după denumirea curentă, a aripilor *delta* dublu-conice. În lucrarea de faţă ne vom referi numai la aripile subţiri.

Directricea care generează cele două suprafeţe conice ale aripii: cea anterioară, cu vîrful în O, şi cea posterioară (de închidere), cu vîrful în A (fig. 1), va fi astfel constituită, încît incidenţa unui element de aripă, într-o secţiune $X=1$, să varieze după expresia

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 + (m-1) \frac{|y|}{l} \right], \tag{1}$$

unde s-au notat:

α_0, incidenţa în secţiunea longitudinală mediană a aripii;

y, abscisa unui punct curent, într-o secţiune a aripii situată la distanţa $X=1$ de vîrf;

l, semianvergura aripii triunghiulare de profunzime $X=1$;

$\alpha_0 m$, incidenţa aripii la bordul de atac.

Se poate considera orice altă variaţie a incidenţei, fără nici o dificultate de principiu; totuşi, fără a prejudicia asupra generalităţii problemei, am considerat numai variaţia liniară, spre a simplifica efectuarea calculelor, dat fiind, mai ales, că rezultatele finale vor putea da o indicaţie generală suficientă asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripilor delta dublu-conice.

Am ţinut, pe de altă parte, să legăm această aripă de cea simetrică generată într-un mod identic, pentru care s-a făcut analiza rezistenţei sale de undă în altă lucrare [2].

Ecuaţia directricei corespunzătoare variaţiei liniare a incidenţei, definită de (1), este dată de relaţia

$$z = \alpha_0 [1 - |\lambda| - (m-1) \, |\lambda| \ln |\lambda|], \tag{2}$$

unde

$$\lambda = \frac{y}{l}, \tag{3}$$

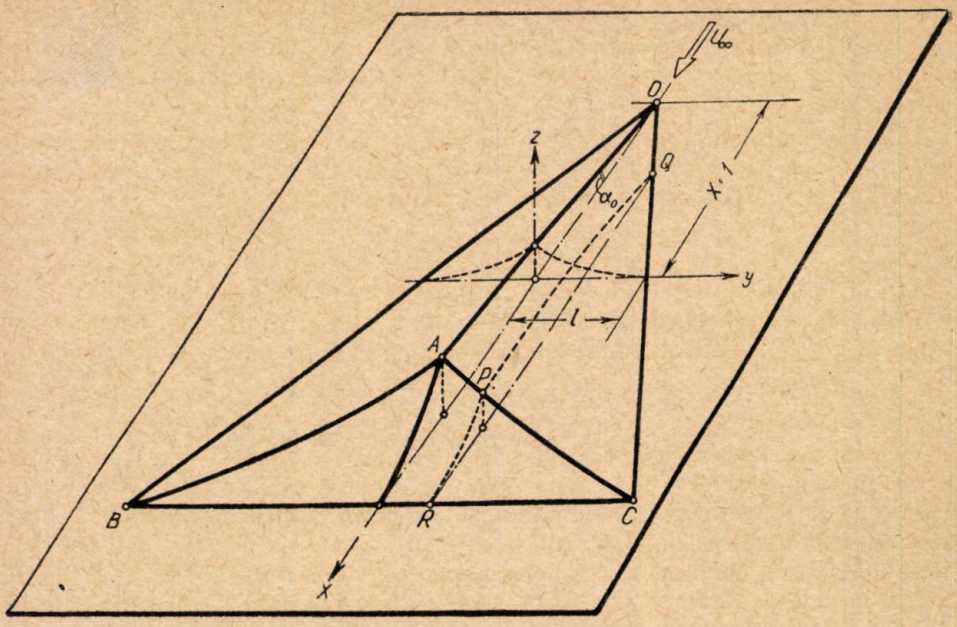


Fig. 1

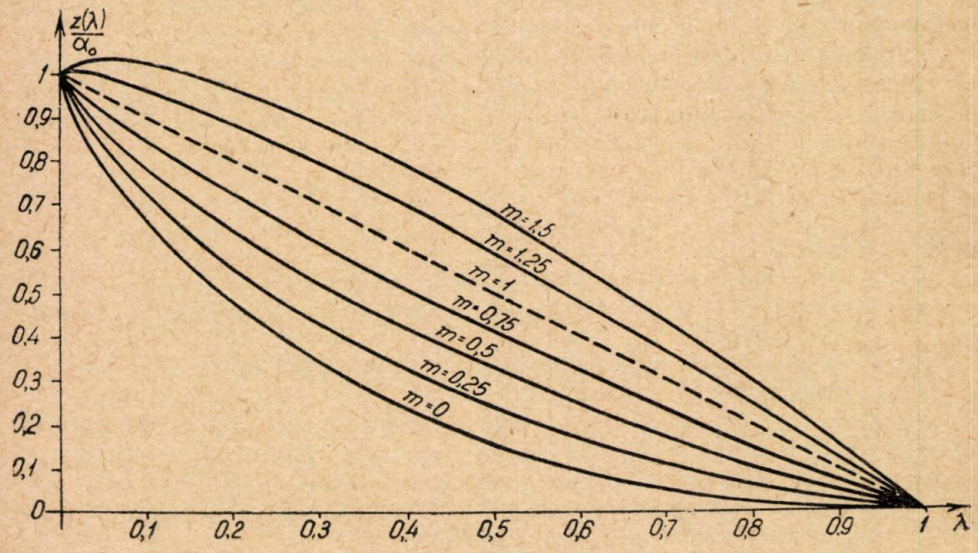


Fig. 2

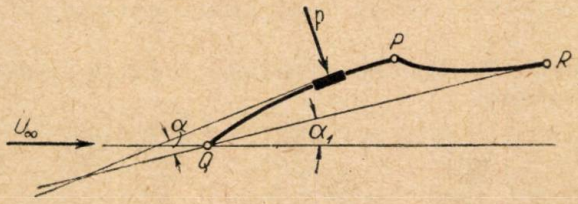


Fig. 3

iar z este cota directricei față de planul triunghiului OBC. Diagrama respectivă este indicată în figura 2, din care se poate vedea ușor gama de variație a acestei clase de aripi.

Dacă planul bordurilor de atac și de fugă ale aripii nu este paralel cu direcția curentului neperturbat (așa cum a fost reprezentat în fig. 1), ci are la rîndul său incidența α_1, incidența totală într-o secțiune y (fig. 3) va fi

$$\alpha_t = \alpha_1 + \alpha. \tag{4}$$

În ipoteza perturbațiilor mici, mișcarea din jurul aripii se descompune în două: cea relativă la aripa plană avînd incidența α_1 și cea în jurul aripii conice avînd incidența α. Ca urmare a acestui fapt, și viteza axială de perturbație se compune din două părți

$$u_t = u_1 + u. \tag{5}$$

În consecință, și presiunile, care sînt legate liniar de aceste viteze, vor fi date de cele două mișcări.

Prima mișcare fiind cunoscută, urmează s-o determinăm pe cea de a doua. În acest scop, vom reaminti că, după cum s-a arătat într-o lucrare anterioară deja citată [1], aceasta din urmă se compune dintr-o mișcare conică cu vîrful în O (fig. 4), care se întinde pe întreaga aripă, și o altă mișcare conică cu vîrful în A, a cărei acțiune se exercită numai în aval și în interiorul conului Mach respectiv.

Pentru calculul portanței, urmează să considerăm presiunea datorită primei mișcări și s-o integrăm pe întreaga suprafață, iar apoi să scădem portanța datorită celei de a doua mișcări, care se întinde numai pe partea posterioară.

În cele ce urmează, vom raporta toate lungimile la coarda maximă a aripii, pe care o vom lua ca unitate.

Este ușor de văzut că, pentru aripa din spate, atît tangenta unghiului de deschidere δ', cît și incidența α', variază invers proporțional cu distanța h, de la punctul A la baza aripii (fig. 4):

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{1}{h} \operatorname{tg} \delta \quad , \quad \alpha' = \frac{1}{h} \alpha. \tag{6}$$

Urmărind figura 4, se poate verifica ușor că cele două aripi vor avea următoarele portanțe unitare:

$$S \cdot C_z = \frac{2}{U_\infty} \int_{-l}^{+l} u \, dy, \tag{7}$$

pentru aripa din față, unde $S = l$ reprezintă aria întregii aripi, iar C_z este considerat pozitiv cînd are sensul spre z pozitiv, și

$$S' \cdot C_z' = \frac{2}{U_\infty} \int_{-l}^{+l} u' \, dy, \tag{8}$$

pentru aripa din spate, unde u' este viteza de perturbație axială în condițiile de scurgere ale aripii din spate.

Coeficientul de portanță al întregii aripi devine atunci

$$C_{z_t} = C_z - \frac{S'}{S} C_z'. \tag{9}$$

Referindu-ne la figura 4, constatăm că sînt de studiat trei cazuri:

1) Cazul cînd unghiul Mach este mai mic decît semideschiderea aripii din faţă:

$$\mu_1 < \delta.$$

2) Cazul cînd

$$\delta < \mu_2 < \delta'.$$

3) Cazul cînd

$$\delta' < \mu_3 .$$

În acest din urmă caz, formula (9) trebuie completată cu efectul interferenţei

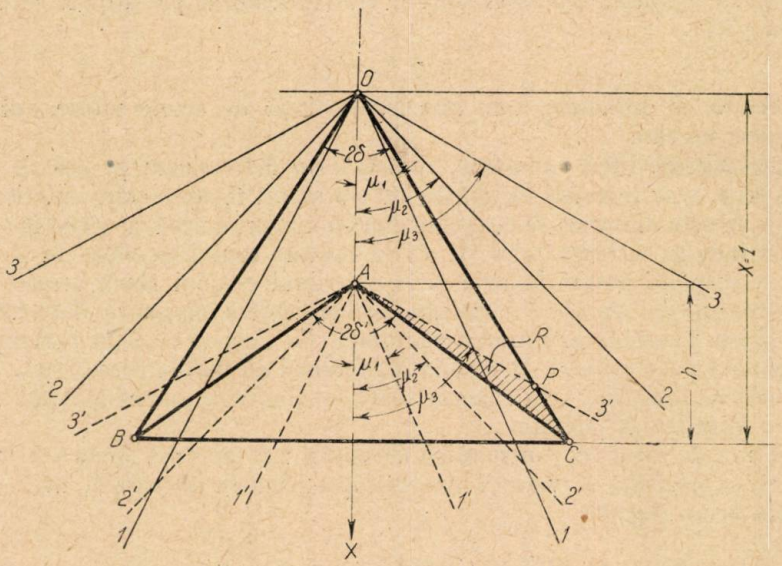


Fig. 4

mişcării conice generate de aripa din spate, asupra regiunii R de pe aripa din faţă (conform fig. 4) şi anume:

$$S_i C_{z_i} = \frac{8}{U_\infty} \iint_R u' \, d\sigma . \tag{10}$$

Acest efect se scade din portanţa totală. În formula precedentă, S_i este dublul ariei regiunii R, iar u' este viteza de perturbaţie dată de mişcarea conică posterioară, într-un punct de pe aripa din faţă.

Potenţialul fictiv de mişcare, din care deducem viteza axială u, va avea forme diferite în diversele situaţii care apar, după cum urmează:

a) Aripa conică subţire cu bordurile de atac subsonice. Se utilizează pentru aripa din faţă în cazurile 2) şi 3) de mai sus.

b) Aripa subţire cu borduri de atac supersonice. Se aplică în cazul 1), pentru ambele aripi, iar în cazul 2), pentru aripa din spate.

c) Aripa subţire cu borduri de atac subsonice, continuate cu un plan de incidenţă nulă. Această situaţie se întîlneşte în cazul 3), pentru aripa din spate, aşa cum se va vedea ulterior.

B. CALCULUL PORTANȚEI ARIPII UNGHIULARE CU BORDURI DE ATAC SUBSONICE

1. Determinarea potențialului

Într-o lucrare anterioară [3], s-a dedus forma potențialului de mișcare. Vom reda aici în mod succint calea urmată, iar apoi vom duce calculele pînă la capăt, pentru cazul ce ne interesează.

Dacă se face o secțiune perpendiculară pe aripă, la o distanță de la vîrf egală cu unitatea, se obține configurația din figura 5, *a*. Secțiunea conului Mach este

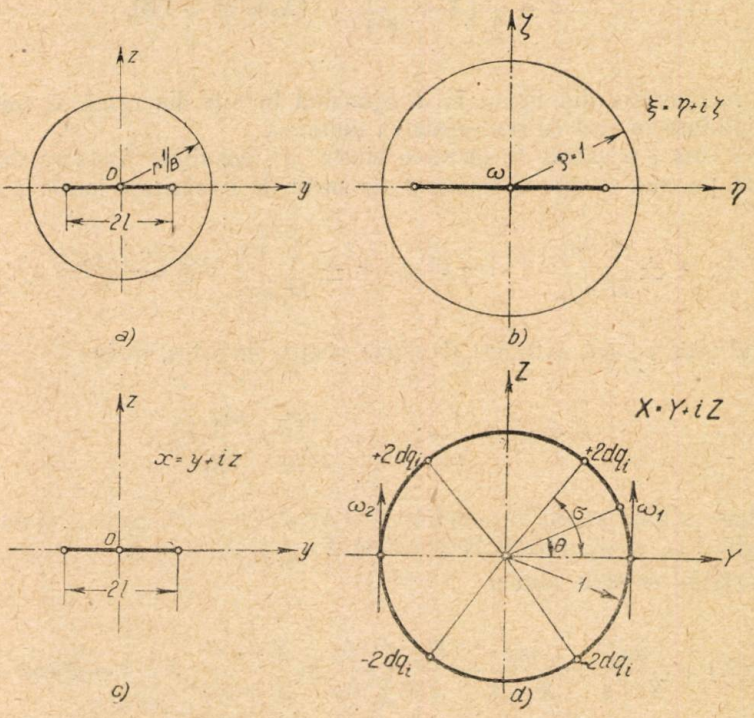


Fig. 5

atunci un cerc cu raza $1/B$. ($B=\sqrt{M^2-1}$). Prin transformarea lui Busemann [4]

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{11}$$

vitezele de perturbație u, v, w ale curentului inițial U_∞ devin funcții armonice în planul $\omega\eta\zeta$ și le putem asocia niște funcții u', v', w', astfel încît să obținem următoarele funcții analitice de variabila complexă $\xi = \eta + i\zeta$ (fig. 5, *b*):

$$f(\xi) = u + iu' \quad , \quad g(\xi) = v + iv' \quad , \quad h(\xi) = w + iw', \tag{12}$$

între care există relațiile

$$v + iv' = -\frac{B}{2}\int\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)df \quad , \quad w + iw' = \frac{iB}{2}\int\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)df. \tag{13}$$

Pentru a simplifica determinarea *potenţialului fictiv*, se fac succesiv transformările

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \qquad (x = y + iz), \tag{14}$$

care dă configuraţia din figura 5, *c*, şi

$$x = \frac{l}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right), \qquad (X = Y + iZ), \tag{15}$$

care dă configuraţia din figura 5, *d*, ajungînd în cele din urmă să transformăm urma aripii într-un cerc de rază egală cu unitatea.

După cum s-a arătat în lucrarea citată [3], condiţiile necesare sînt îndeplinite, dacă pe cerc se aşează un strat de surse de intensitate locală $2\,dq_i$, unde

$$dq_i = \pm\frac{1}{B^2}\frac{dw_i}{dy_i}\,d\left(\sqrt{1-B^2y_i^2}\right) = \pm\frac{1}{B^2}\frac{dw_i}{dy_i}\,d\left(\sqrt{1-k^2\cos\sigma}\right), \tag{16}$$

cu semnul plus pentru extrados şi minus pentru intrados, unde

$$k = Bl = \frac{1}{n} < 1, \qquad \frac{dw_i}{dy_i} = \frac{d\alpha}{dy_i}U_\infty, \tag{17}$$

fiecare element fiind aşezat în punctele $X = e^{i\sigma}$ şi $X = e^{-i\sigma}$, precum şi doi dubleţi, de intensităţi ω_1 şi ω_2, plasaţi în punctele $X = 1$ şi $X = -1$.

Potenţialul se scrie atunci

$$f(X) = \frac{i\omega_1}{X-1} + \frac{i\omega_2}{X+1} - \frac{U_\infty}{\pi B^2}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{dy}\ln\frac{X-e^{i\sigma}}{X-e^{-i\sigma}}\,d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right). \tag{18}$$

Din motive de simetrie, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Integrala din termenul al treilea din (18), aplicată în cazul de care ne ocupăm, poate fi transformată într-o expresie mai simplă, observînd că

$$\frac{d\alpha}{dy} = \pm\alpha' = \pm\frac{m-1}{l}\alpha_0 = \text{const.}, \tag{19}$$

unde semnul plus corespunde aripii din dreapta ($y > 0$), iar semnul minus aripii din stînga, astfel încît potenţialul total se poate scrie

$$f(X) = \frac{2i\omega X}{X^2-1} - \frac{m-1}{l}\frac{\alpha_0 U_\infty}{\pi B^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{(X-e^{i\sigma})(X+e^{-i\sigma})}{(X-e^{-i\sigma})(X+e^{i\sigma})}\,d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right). \tag{20}$$

Sub această formă, sau trecînd în planul x, efectuarea acestei integrale, deși laborioasă, este totuși simplă. Astfel, după operații elementare, vom putea scrie

$$f(x) = \frac{i\omega l}{\sqrt{x^2 - l^2}} + \frac{2(m-1)\alpha_0 U_\infty}{l\pi B^2}\left[\text{Ar th}\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2} + k\sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}\,\text{Ar th}\,k - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1-k^2\left(\frac{x}{l}\right)^2}\,\text{Ar th}\sqrt{\frac{1-k^2\left(\frac{x}{l}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}}\right]. \qquad (20')$$

2. Calculul portanței

Avînd în vedere că pe extradosul aripii, viteza axială de perturbație u ia valori opuse celor de pe intrados, expresia portanței unitare, dată de relația (7), se poate scrie

$$S \cdot C_z = -\frac{1}{U_\infty}\oint u\,dy, \qquad (21)$$

unde înconjurarea aripii se face în sens trigonometric.

Să considerăm funcția analitică $f(x) = u + iu'$; observăm că pe aripă ($z=0$) se poate pune $dy = dx$; de asemenea, se poate înlocui u prin $u + iu'$. Într-adevăr, să considerăm pentru simplificare, un singur salt de incidență pe aripă, reprezentat printr-o pereche de surse $+2\,dq_i$ și $-2\,dq_i$, plasate pe extradosul și intradosul aripii (fig. 5, *d*). Cînd se parcurge aripa în sensul trigonometric, la traversarea sursei de pe extrados, u' crește cu dq_i, rămînînd apoi constant pînă în punctul corespunzător de pe intrados, unde scade cu aceeași cantitate. Din acest motiv, vom avea

$$\oint u'\,dx = \oint u'\frac{dx}{dX}\,dX = 0, \qquad (22)$$

căci valoarea integralei pe extrados este egală și de semn contrar cu cea de pe intrados. Rezultă deci

$$\oint u\,dx = \oint (u + iu')\,dx \qquad (23)$$

și relația (21) capătă forma

$$S \cdot C_z = -\frac{1}{U_\infty}\oint f(x)\,dx. \qquad (24)$$

Pentru comoditatea calculelor, vom efectua integrarea în planul $X = Y + iZ$. Din relația (15) se deduce

$$dx = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{1}{X^2}\right)dX \qquad (25)$$

și relația (24) devine, observînd că $S = l$;

$$-C_z = \frac{1}{2U_\infty}\oint f(X)\frac{X^2-1}{X^2}\,dX. \qquad (26)$$

Ţinînd seama de (20), vom avea

$$-C_z = \frac{i\omega}{U_\infty} \oint \frac{X}{X^2-1} \frac{X^2-1}{X^2} dX -$$

$$-\frac{m-1}{2\pi B^2 l}\alpha_0 \oint \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right) \ln \frac{(X-e^{i\sigma})(X+e^{-i\sigma})}{(X-e^{-i\sigma})(X+e^{i\sigma})} \cdot \frac{X^2-1}{X^2} dX = \tag{27}$$

$$= -\frac{2\pi\omega}{U_\infty} - \frac{(m-1)\alpha_0}{2\pi B^2 l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right) \oint \ln \frac{(X-e^{i\sigma})(X+e^{-i\sigma})}{(X-e^{-i\sigma})(X+e^{i\sigma})} \cdot \frac{X^2-1}{X^2} dX.$$

Integrala din membrul al doilea al relaţiei precedente poate fi evaluată cu formula reziduurilor, întrucît funcţia $u+iu'$, care figurează sub semnul integral, este uniformă în tot planul, în exteriorul conturului circular, care reprezintă aripa în planul $X=Y+iZ$. Considerînd deci un contur foarte mare, care înconjoară cercul, vom scrie mai întîi

$$\ln \frac{(X-e^{i\sigma})(X+e^{-i\sigma})}{(X-e^{-i\sigma})(X+e^{i\sigma})} = -2\frac{e^{i\sigma}-e^{-i\sigma}}{X} = -\frac{4i\sin\sigma}{X}, \quad (X\to\infty) \tag{28}$$

de unde rezultă, aplicînd formula reziduului

$$-\frac{(m-1)\alpha_0}{2\pi B^2 l}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right) \oint \ln \frac{(X-e^{i\sigma})(X+e^{-i\sigma})}{(X-e^{-i\sigma})(X+e^{i\sigma})}\left(1-\frac{1}{X^2}\right)dX =$$

$$= \frac{4(m-1)\alpha_0}{B^2 l}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sigma\, d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right) = \frac{(m-1)\alpha_0}{B^2 l}\left(2-\frac{1-k^2}{k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right). \tag{29}$$

În cele din urmă se obţine

$$C_z = \frac{2\pi\omega}{U_\infty} + \frac{(m-1)\alpha_0}{B^2 l}\left(2-\frac{1-k^2}{k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right). \tag{30}$$

3. Determinarea constantei ω

Folosind a doua relaţie (13), putem scrie că viteza verticală are valoarea $w=\alpha_0 U_\infty$ pe aripă, şi $w=0$ pe conul Mach. În planul X, aceasta revine la a scrie

$$-U_\infty\alpha_0 = R_e\frac{iB}{2}\int_{X=i}^{X=i\infty}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)\frac{df}{dX}dX, \tag{31}$$

sau, făcînd calculele necesare

$$-U_\infty\alpha_0 = R_e\frac{iB}{2}\left[\frac{4i\omega}{k}\int_{X=i}^{i\infty}\frac{\sqrt{4X^2-k^2(X^2+1)^2}}{(X^2-1)^2}dX + \right.$$

$$\left. + \frac{8iU_\infty(m-1)\alpha_0}{\pi B^2 lk}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\sigma\, d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right)\int_{X=i}^{i\infty}\frac{\sqrt{4X^2-k^2(X^2+1)^2}}{(X^2-1)^2+4X^2\sin^2\sigma}dX\right]. \tag{32}$$

Avînd în vedere că integrarea se face de-a lungul axei imaginare, avem $X = iZ$. Utilizînd transformarea

$$Z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \tag{33}$$

se obține

$$\int_{X=i}^{i\infty} \frac{\sqrt{4X^2 - k^2(X^2+1)^2}}{(X^2-1)^2}\, dX = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\alpha}\, d\alpha = -\frac{1}{2}E' \tag{34}$$

și

$$\int_{X=i}^{i\infty} \frac{\sqrt{4X^2 - k^2(X^2+1)^2}}{(X^2-1)^2 + 4X^2\sin^2\sigma}\, dX = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\alpha}}{1-\sin^2\sigma\cos^2\alpha}\, d\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}k^2K' - \frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}}{2\sin\sigma\cos\sigma}\left[\frac{\pi}{2} - K'E(\gamma, k) + (K'-E')F(\gamma, k)\right]. \tag{35}$$

Aici $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \sigma$ și toate integralele eliptice complete prevăzute cu accent au modulul

$$k' = \sqrt{1-k^2}. \tag{36}$$

Introducînd aceste rezultate în relația (32), se constată că trebuie evaluate următoarele integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\sigma\, d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1-k^2}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}}{\cos\sigma}\, d\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\sigma}\right) = k^2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos\sigma) \int_0^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k} - K, \left(\gamma = \frac{\pi}{2} - \sigma\right) \tag{37}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\cos\sigma) \int_0^{\gamma} \sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}\, d\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-k^2}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right) - E.$$

Aici, integralele eliptice K și E au modulul $k = B\,l$.

Folosind aceste relaţii, se obţine, din (32), valoarea constantei căutate ω:

$$\omega = -\frac{k\alpha_0}{BE'}\frac{U_\infty}{}\left\{1+\frac{2}{\pi}(m-1)\left[\frac{\pi}{2}+K'(1-E)+(K'-E')\left(K-\frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)\right]\right\}. \quad (38)$$

Acum se poate scrie, din (30), expresia definitivă a coeficientului de portanţă C, care capătă următoarea formă:

$$-\frac{C_z B}{\alpha_0} = \frac{2\pi k}{E'} + \frac{2(m-1)}{kE'}\left\{2k^2\left[\frac{\pi}{2}+K'(1-E)\right]+\right.$$
$$\left.+\ 2k^2(K'-E')\left(K-\frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)-E'\left(1-\frac{1-k^2}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)\right\}. \quad (39)$$

Examinînd formula (39), se constată, după cum era de aşteptat, că portanţa are sensul invers incidenţei, α_0, şi că, pentru $m=1$ (aripa unghiulară formată din feţe plane), se regăseşte un rezultat clasic [4].

Pentru calculele ulterioare, vom introduce următoarele notaţii:

$$\frac{2\pi k}{E'} = f_1(k) \quad (40)$$

(care reprezintă portanţa aripii formată din feţe plane) şi

$$\frac{2}{kE'}\left\{2k^2\left[\frac{\pi}{2}+K'(1-E)\right]+2k^2(K'-E')\left(K-\frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)-\right.$$
$$\left.-E'\left(1-\frac{1-k^2}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}\right)\right\} = f_2(k) \quad (41)$$

(care reprezintă efectul variaţiei continue a incidenţei).

De aici rezultă scrierea abreviată a coeficientului de portanţă:

$$-\frac{C_z B}{\alpha_0} = f_1(k) + (m-1) f_2(k), \quad (42)$$

sau, introducînd notaţia uzuală $n = \frac{1}{Bl} = \frac{1}{k}$ în relaţiile (40) şi (41),

$$-\frac{C_z B}{\alpha_0} = f_1(n) + (m-1) f_2(n). \quad (43)$$

C. ARIPA UNGHIULARĂ CU BORDURI DE ATAC SUPERSONICE

Potenţialul de mişcare este identic cu cel al aripii groase simetrice, întrucît prin faptul că aripa traversează conul Mach, mişcarea de pe extrados este independentă de cea de pe intrados.

La aripa groasă, viteza axială de perturbaţie este $+u$ pe ambele feţe (determinată prin calculul potenţialului pe semicercul superior); la aripa subţire, viteza pe intrados are aceeaşi expresie, dar cu semn schimbat.

În lucrările citate [2] și [3], s-a arătat cum se poate determina potențialul. Pentru satisfacerea condițiilor la limită, trebuie plasate în punctele y_i de pe aripă, în interiorul conului Mach, surse cu intensitatea $2\,dq_i$, unde

$$dq_i = \frac{U_\infty}{B^2}\frac{d\alpha}{dy_i}\,d\left(\sqrt{1-B^2 y_i^2}\right). \tag{44}$$

Pentru a se ține seama de variația incidenței în punctele y_e de pe porțiunea aripii ce depășește conul Mach, trebuie plasate în punctele $e^{i\sigma_e}$, vîrtejuri de valoare $2\,du_e$, unde

$$du_e = -\frac{U_\infty}{B^2}\frac{d\alpha}{dy_e}\,d\left(\sqrt{B^2 y_e^2-1}\right). \tag{45}$$

Unghiul σ_e este definit de relația

$$\cos\sigma_e = \frac{1}{B\,y_e}. \tag{46}$$

Trebuie considerate, de asemenea, și imaginile acestor singularități față de axa absciselor, pentru ca aceasta să fie o linie de curent, iar cercul $|\xi| = 1$ (care reprezintă urma conului Mach), să fie o linie de egal potențial.

Mai trebuie în plus să se țină seamă de faptul că la bordul de atac al aripii, incidența variază brusc de la zero la α_1 ($\alpha_1 = m\,\alpha_0$).

Pentru a ușura scrierea potențialului, se transformă planul lui Busemann ($\xi = \eta + i\zeta$) într-un plan $X = Y + iZ$:

$$X = \frac{1+\xi}{1-\xi}. \tag{47}$$

Urma aripii rămîne tot pe axa absciselor în noul plan, iar cercul $|\xi| = 1$ se așterne pe axa imaginară. După cum s-a arătat în lucrarea citată [2], potențialul aripii groase simetrice cu borduri subsonice este dat de expresia

$$f(X) = \frac{\alpha_1 U_\infty B\,l}{\pi B\,|\,1-B^2 l^2}\left[\ln\frac{X-L}{X+L} + \ln\frac{X-\dfrac{1}{L}}{X+\dfrac{1}{L}}\right] +$$

$$+\frac{U_\infty}{\pi B^2}\int_{y_i=0}^{l}\alpha_d'\ln\frac{X-Y_i}{X+Y_i}\,d\left(\sqrt{1-B^2 y_i^2}\right) + \frac{U_\infty}{\pi B^2}\int_{y_i=l}^{0}\alpha_s'\ln\frac{X-\dfrac{1}{Y_i}}{X+\dfrac{1}{Y_i}}\,d\left(\sqrt{1-B^2 y_i^2}\right). \tag{48}$$

În expresia precedentă, Y_i și L sînt imaginile punctelor y_i și $y = l$ prin transformarea (47):

$$Y_i^2 = \frac{1+By_i}{1-By_i},\quad L^2 = \frac{1+Bl}{1-Bl}, \tag{49}$$

iar α_d' şi α_s' sînt date de

$$\alpha_d' = \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{y>0} = -\alpha_s' = -\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{y<0}. \tag{50}$$

Într-un punct oarecare pe aripă, viteza axială de perturbaţie are expresia

$$u = R_e\left[\frac{-2\alpha_1 U_\infty}{\pi B\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{Ar\ ch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}} - \right.$$

$$\left. -\frac{2U_\infty}{\pi B}\int_{\lambda_i=0}^{1}\alpha_d'\,\mathrm{Ar\ ch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda_i^2}}\,d\left(\sqrt{n^2-\lambda_i^2}\right)\right], \tag{51}$$

care este valabilă şi pentru cazul cînd bordurile aripii sînt supersonice [2].

Aici s-au introdus notaţiile uzuale $n = \dfrac{1}{Bl}$ şi $\lambda = \dfrac{y}{l}$. Luînd pentru α_d' valoarea constantă dată de (19) şi efectuînd integrala de mai sus, rezultă pînă la urmă

$$u = -\frac{2m\alpha_0 U_\infty}{\pi B} R_e\left[u_1 + \frac{m-1}{m}u_2\right], \tag{52}$$

unde

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\,\mathrm{Ar\ ch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}}, \tag{53}$$

$$u_2 = \sqrt{n^2-1}\,\mathrm{Ar\ ch}\sqrt{\frac{n^2-\lambda^2}{1-\lambda^2}} + \sqrt{n^2-\lambda^2}\,\ln\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}} -$$

$$-n\,\mathrm{Ar\ ch}\frac{n}{\lambda} - \frac{i\pi}{2}\sqrt{n^2-\lambda^2}. \tag{54}$$

Portanţa, după (8), este

$$S\cdot C_z = \frac{2}{U_\infty}\int_0^l u\,dy = \frac{2l}{U_\infty}\int_0^1 u\,d\lambda. \tag{55}$$

Se poate vedea că, pentru $n<1$ (borduri de atac supersonice),

$$R_e\int_0^1 u_1\,d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

$$R_e\int_0^1 u_2\,d\lambda = -\frac{\pi}{4} \tag{56}$$

astfel încît se obține un rezultat foarte simplu

$$C_z = -\frac{2\alpha_0}{B}(1+m) = -\frac{\alpha_0}{B}[4+2(m-1)]. \tag{57}$$

Se constată că portanța este constantă (nu depinde de n) și că, pentru $m=1$, se regăsește rezultatul cunoscut pentru aripa formată din fețe plane.

D. ARIPA UNGHIULARĂ CU BORDURI DE ATAC SUBSONICE, CONTINUATE CU UN PLAN DE INCIDENȚĂ NULĂ

Acest caz este reprezentat de aripa din spate, cînd bordurile ei de atac sînt subsonice.

Conform ipotezei liniarizării, pentru calculul vitezelor de perturbație, produse de mișcarea conică în jurul aripii din spate, se neglijează perturbațiile curentului U_∞, produse de aripa din față (prin aceasta se neglijează perturbațiile de ordinul doi) și se presupune că aripa din spate este plasată într-un curent uniform U_∞ [1]. Aceasta revine la a considera că aripa din față se găsește în planul curentului U_∞, fără a avea incidență. Prezența ei însă — sub formă de placă — împiedică scurgerea aerului de pe extradosul aripii din spate, pe intradosul acesteia, și separă astfel cele două mișcări. Rezultă deci că aripa din spate, chiar cînd are bordurile de atac subsonice, trebuie asimilată, pentru calculul vitezei axiale de perturbație, unei aripi groase simetrice cu aceleași borduri de atac, căci pentru aceasta din urmă, avem pe axa $0y$, $u=0$ și condiția fizică impusă de prezența aripii din față este automat satisfăcută.

După cum am semnalat anterior, potențialul stabilit mai sus, (48), rămîne valabil și pentru cazul bordurilor de atac subsonice; de asemenea și expresia vitezei pe aripă (51), însă partea reală în expresia (51) se schimbă, astfel încît calculul poeficientului de portanță duce la următoarele rezultate [2]:

$$C_z = \frac{4}{U_\infty}\int_0^1 u\,d\lambda = -\frac{8m\alpha_0}{\pi B}\left(I_{11} + \frac{m-1}{m}I_{13}\right), \tag{58}$$

cu următoarele semnificații:

$$I_{11} = R_e\int_0^1 u_1\,d\lambda = \arcsin\frac{1}{n} + \frac{\ln n}{\sqrt{n^2-1}},$$

$$I_{13} = R_e\int_0^1 u_2\,d\lambda = \sqrt{n^2-1}\ln n - n\,\mathrm{Ar\,ch}\,n - \tag{59}$$

$$-\arcsin\frac{1}{n} + \int_0^1 \sqrt{n^2-\lambda^2}\ln\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}}\,d\lambda,$$

pentru $n > 1$.

Observație. Schema fizică descrisă mai sus nu reprezintă complet fenomenul. Într-adevăr, examinarea figurii 6 arată că, dacă secțiunea $A'A''$ prin aripă duce într-adevăr la schema adoptată, într-o secțiune $B'B''$, aripa din față însăși se găsește în interiorul conului Mach ce pleacă din A. Consecința acestui fapt este

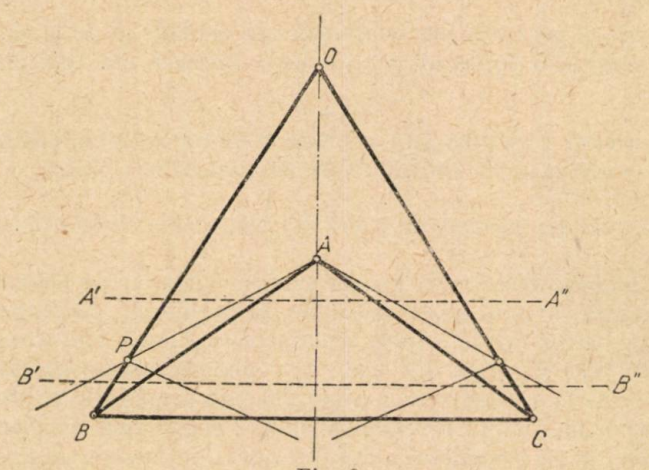


Fig. 6

că linia Mach ce pleacă din punctul A, se reflectă la ieșirea de pe aripă în punctul P, dînd naștere unui nou con Mach; iar în această lucrare s-au neglijat efectele unor astfel de reflexii.

E. CALCULUL COEFICIENTULUI DE PORTANȚĂ GLOBAL PENTRU ARIPA TRIUNGHIULARĂ COMPLETĂ

Coeficientul de portanță pentru întreaga aripă se scrie, în cazul general,

$$\frac{C_{z_t} B}{\alpha_0} = \frac{C_z B}{\alpha_0} - \frac{S'}{S}\frac{C'_z B}{\alpha_0} - \frac{S_i}{S}\frac{C_{z_i} B}{\alpha_0}. \tag{60}$$

Primul termen se referă la aripa conică triunghiulară cu vîrful în O (fig. 4), al doilea la aripa din spate, cu vîrful în A, iar al treilea reprezintă interferența celor două mișcări — cînd este cazul — în zona R.

Pentru aripa din față (respectiv în formula (60), coeficientul C_z), se aplică direct formulele (43) și (57).

Pentru calculul coeficientului de portanță C'_z, al aripii din spate, vom observa că, avînd în vedere (6), viteza axială de perturbație u', într-un punct de abscisă λ pe aceasta din urmă, este:

$$u'(n, \lambda) = \frac{1}{h} u(nh, \lambda). \tag{61}$$

Aici $u(nh, \lambda)$ are expresia dată de (52), în care se înlocuiește n prin nh.

Pe de altă parte, este ușor de văzut că aria S' a aripii din spate are valoarea

$$S' = h S, \tag{62}$$

astfel încît rezultă, pentru cazul bordurilor de atac subsonice la aripa din spate

$$-\frac{S'}{S}\frac{C_z' B}{\alpha_0} = \frac{8}{\pi}\left[I_{11}' + (m-1)\,(I_{11}' + I_{13}')\right], \tag{63}$$

unde I_{11}' și I_{13}' se calculează din formulele (59), înlocuind n prin nh.

Dacă aripa din spate are bordurile de atac supersonice, se găsește din (57),

$$-\frac{S'}{S}\frac{C_z' B}{\alpha_0} = 4 + 2\,(m-1). \tag{64}$$

În sfîrșit, acțiunea de interferență a mișcării produse de conul cu vîrful în A asupra aripii din față (C_{z_i}) se calculează astfel (vezi fig. 4), [2]:

$$\frac{S_i}{S} C_{z_i} = \frac{8}{l\,U_\infty} \iint_{APC} u'\, d\sigma. \tag{65}$$

Exprimînd în mod convenabil elementul de arie $d\sigma$,

$$d\sigma = \frac{X}{h}\, dy\, dX, \tag{66}$$

se obține, după înlocuirea lui u' din (61)

$$\frac{S_i}{S} C_{z_i} = \frac{8}{h^2 U_\infty} \int_{\lambda=1}^{nh} u\,(nh, \lambda)\, d\lambda \int_{1-h}^{X_1} [X - (1-h)]\, dX =$$

$$= \frac{4}{U_\infty} \int_{1}^{nh} u\,(nh,\ \lambda) \left(\frac{1-h}{\lambda - h}\right)^2 d\lambda. \tag{67}$$

În această relație, limita X_1 are expresia

$$X_1 = \frac{1-h}{\lambda - h} \cdot \lambda. \tag{68}$$

Efectuînd calculele, se obține

$$-\frac{S_i}{S}\frac{C_{z_i} B}{\alpha_0} = \frac{8}{\pi}\left[I_{i_1} + (m-1)\,(I_{i_1} + I_{i_3})\right], \tag{69}$$

cu următoarele semnificații:

$$I_{i_1} = \frac{1-h}{1+h}\left[\frac{\ln nh}{\sqrt{n^2h^2-1}} + \frac{2}{\sqrt{n^2-1}} \operatorname{Ar\,th} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}\frac{nh-1}{nh+1}}\right], \tag{70}$$

$$I_{i_3} = \int_{\lambda=1}^{nh} u_2\,(nh, \lambda) \left(\frac{1-h}{\lambda - h}\right)^2 d\lambda. \tag{71}$$

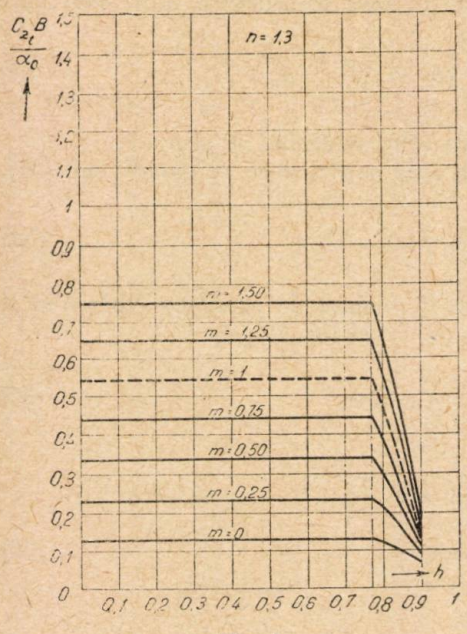


Fig. 7

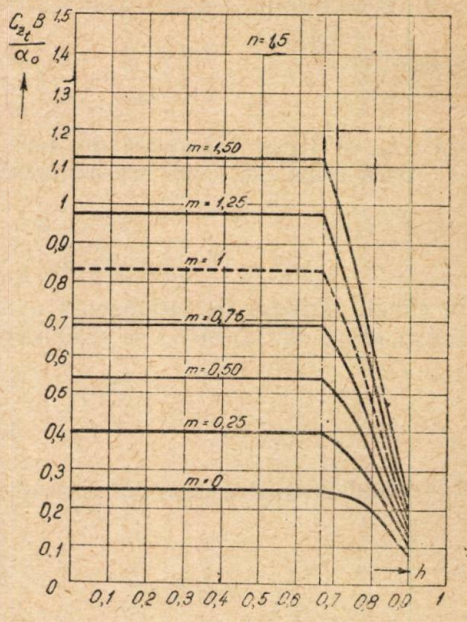


Fig. 8

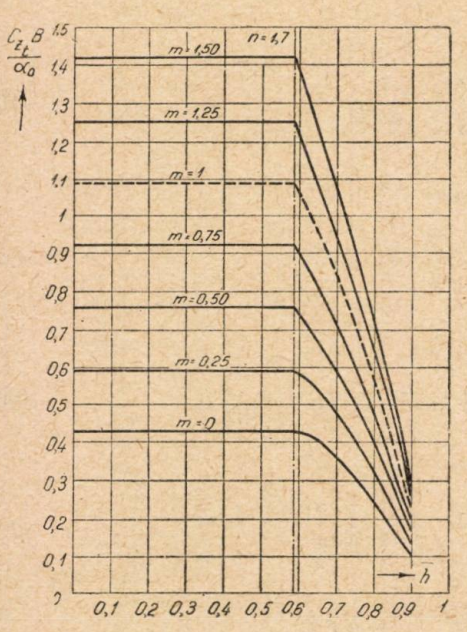


Fig. 9

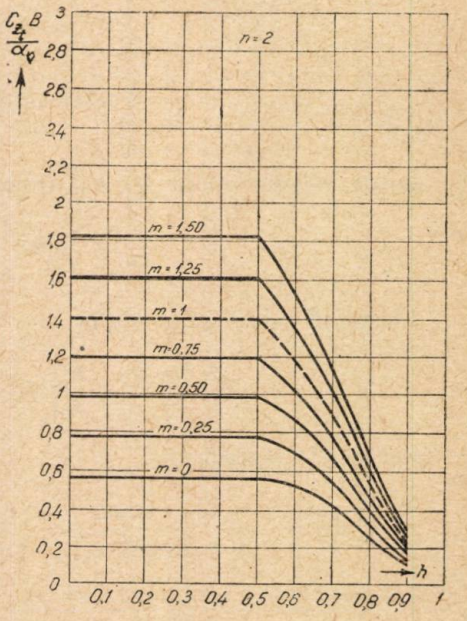


Fig. 10

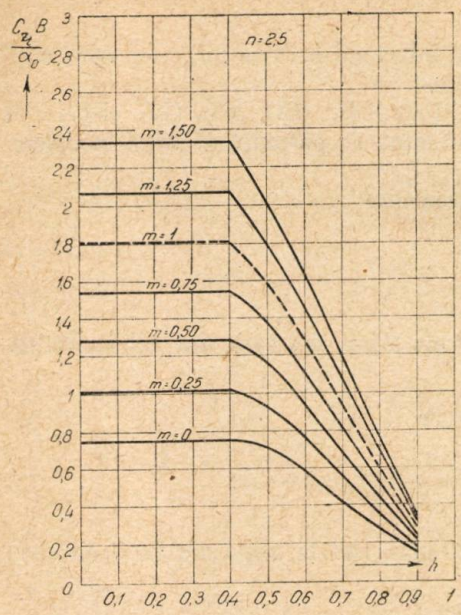


Fig. 11

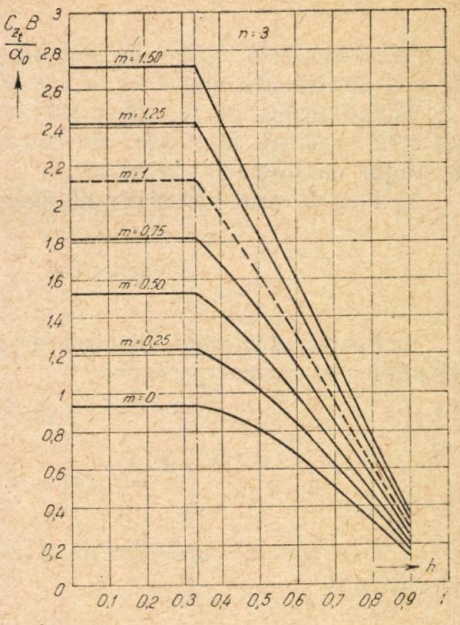


Fig. 12

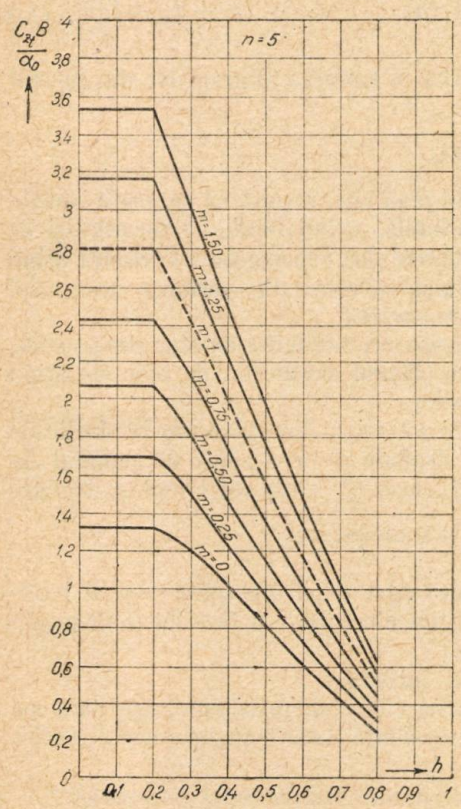


Fig. 13

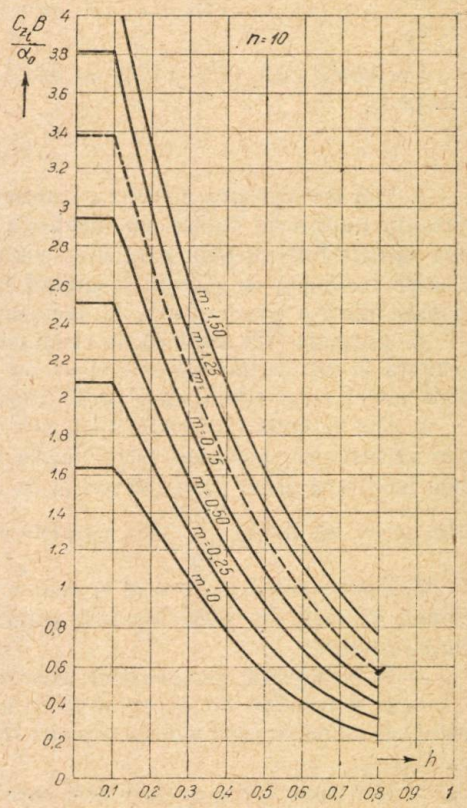


Fig. 14

În ultima integrală, u_2 trebuie luat din (54), înlocuind n cu nh; I_{i_3} se calculează în mod aproximativ după regula lui Simpson.

Ţinînd seama de formulele (43), (57), (59), (63), (64), (69), (70) şi (71), se pot scrie în sfîrşit, formulele care dau coeficientul de portanţă al aripii complete. Se obţin următoarele rezultate:

1) Pentru cazul bordurilor de atac supersonice

$$n < 1,$$

$$C_{z_t} = 0; \tag{72}$$

2) Pentru cazul cînd bordurile de atac ale aripii din faţă sînt subsonice, iar ale aripii din spate supersonice

$$nh < 1 < n$$

$$-\frac{C_{z_t} B}{\alpha_0} = f_1(n) - 4 + (m-1)[f_2(n) - 2]; \tag{73}$$

3) Pentru cazul bordurilor de atac subsonice, atît la aripa din faţă, cît şi la cea din spate

$$1 < nh < n$$

$$-\frac{C_{z_t} B}{\alpha_0} = f_1(n) - \frac{8}{\pi}(I'_{11} + I_{i_1}) + (m-1)\left[f_2(n) - \frac{8}{\pi}(I'_{11} + I'_{13} + I_{i_1} + I_{i_3})\right]. \tag{74}$$

Formulele (72), (73) şi (74) au fost folosite la trasarea diagramelor din figurile 7 — 14 *).

CONCLUZII

1. Din desfăşurarea calculelor prezentate pînă aici, rezultă că se poate calcula portanţa unei aripi subţiri cu incidenţa variabilă, avînd bordurile de atac şi de fugă aşezate într-un plan paralel cu viteza curentului neperturbat. Portanţa aripii la orice incidenţă se găseşte însumînd la valoarea calculată, portanţa unei aripi formate dintr-o placă plană, la incidenţa respectivă.

2. Formula (72) arată că, în cazul cînd aripa are bordurile de atac supersonice, portanţa la incidenţa nulă este egală cu zero. Planul bordurilor de atac ale aripii joacă astfel rolul corzii unui profil supersonic.

3. Din formula (73) rezultă că, atît timp cît aripa din spate are bordurile de atac supersonice, portanţa aripii totale nu depinde de h — adică de punctul de unde înălţimea aripii începe să scadă. În diagramele (7...14) acest fapt se traduce prin aceea că liniile $\frac{C_{z_t} B}{\alpha_0}$ sînt paralele cu axa absciselor.

4. Pentru cazul $nh < n < 1$, calculul portanţei aripii din spate — şi al interferenţei mişcării din jurul acesteia asupra aripii din faţă — a fost făcut în următoarele ipoteze:

— se neglijează perturbaţiile curentului iniţial;

— se determină un *potenţial fictiv simetric* (fizic, se presupune, aşa cum s-a arătat, că aripa se continuă cu o placă fără incidenţă, care depăşeşte conul Mach).

*) În figurile 7, 8 şi 9, scara ordonatelor este dilatată faţă de restul diagramelor.

Ambele ipoteze își pierd însă valabilitatea, atunci cînd h tinde către valoarea 1. Într-adevăr, în acest caz, bordurile de atac ale aripii din spate se apropie de cele ale aripii din față. Or, este știut că viteza axială de perturbație în apropierea bordului de atac subsonic al unei aripi, tinde către infinit; de aceea, neglijarea perturbațiilor curentului inițial nu se mai poate face.

Pe de altă parte, cînd h tinde către 1, portanța totală trebuie să se anuleze. În felul în care s-a calculat însă mai sus, acest fapt nu se întîmplă, căci potențialele celor două aripi au fost presupuse diferite (simetric pentru aripa din spate și antisimetric pentru cea din față) și ele nu sînt egale pentru $h=1$. În realitate, cînd h se apropie de valoarea 1, placa plană materializată de aripa din față dispare, iar potențialul aripii din spate devine din simetric, antisimetric.

Vom aminti din nou că s-a neglijat reflexia undelor Mach, așa cum s-a arătat mai sus.

În urma observațiilor precedente, nu s-au reprezentat curbele coeficientului de portanță, decît pentru valori ale lui h, mergînd pînă la circa 0,9, întrucît am considerat că pînă la aceste valori, eroarea nu este prea mare.

О ДВУКОНИЧЕСКИХ ТОНКИХ КРЫЛЬЯХ ДЕЛЬТА С ПЕРЕМЕННЫМ УГЛОМ АТАКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе рассматривается поддерживающая сила двуконических крыльев дельта, выполненных по методу, изложенному в [1], с линейным изменением угла атаки (рис. 2). Движение вокруг крыла разлагается на два конических движения: первое с вершиной в O (рис. 4), распространяющееся на все крыло, и второе с вершиной в A, оказывающее влияние на заднее крыло.

Для расчета поддерживающей силы крыла, принимаются в расчет следующие случаи:

1. Передние сверхзвуковые кромки атаки крыла.
2. Дозвуковые кромки атаки переднего крыла и сверхзвуковые заднего крыла.
3. Дозвуковые кромки атаки у обоих крыльев.

В этом последнем случае, необходимо принять во внимание и действие динамических сил конического движения с вершиной в A, на районе R переднего крыла (рис. 4).

Конические движения вокруг обоих крыльев отвечают следующим случаям:

а) Угловое коническое крыло с дозвуковыми кромками атаки (применяется к переднему крылу, в вышеуказанных 2 и 3-м случаях).

б) Коническое крыло с верхзвуковыми кромками атаки (применяется к переднему крылу в 1-м случае и на заднее крыло в 1 и 2-м случаях).

в) Коническое крыло с дозвуковыми кромками атаки, продолженными по плоскости нулевого угла атаки (применяется к заднему крылу в 3-м случае).

Следуя по пути, указанному в [3], определяем *фиктивный потенциал* для случаев *а)*, *б)*, *в)* и получаем формулы (20) и (48) (последняя действительна для случаев *б)* и *в)* [2]).

Из выражения потенциала выводятся осевые скорости возмущения, а затем путем интегрирования формулы унитарного коэффициента поддерживающей силы, а именно (39) в случае *а)*, (57) в случае *б)* и (58) в случае *в)*. Для всего крыла унитарный коэффициент поддерживающей силы в вышеуказанных случаях 1, 2, 3 выражен формулами (72), (73) и (74), представленных в диаграммах 7—14.

Следует заметить следующее:

— В случае, когда кромки атаки крыла являются сверхзвуковыми, поддерживающая сила при нулевом угле атаки равна нулю (72).

— Поскольку кромки атаки заднего крыла являются сверхзвуковыми, поддерживающая сила всего крыла не зависит от h.

При расчетах не были учтены отражения волн MACH на кромках крыла.

SUR LES AILES DELTA MINCES, DOUBLEMENT-CONIQUES, À INCIDENCE VARIABLE, EN COURANT SUPERSONIQUE

(RÉSUMÉ)

On étudie dans cet ouvrage la portance des ailes delta doublement-coniques, générées selon la méthode décrite dans [1], ayant une variation linéaire de l'incidence (1) (fig. 2). Le mouvement autour de l'aile se décompose en deux mouvements coniques: l'un, ayant le sommet en O (fig. 4) qui s'étend sur toute l'étendue de l'aile, et un autre, dont le sommet est en A, qui s'exerce sur l'aile postérieure (de fermeture).

Pour le calcul de la portance de l'aile, on distingue les situations suivantes:

1. Bords d'attaque supersoniques des ailes.
2. Bords d'attaque subsoniques, pour l'aile avant et supersoniques, pour l'aile arrière.
3. Bords d'attaque subsoniques pour les deux ailes.

Dans ce dernier cas, l'interférence du mouvement conique au sommet en A, sur la région R de l'aile avant (fig. 4), doit également être prise en considération.

Les mouvements coniques autour des deux ailes se rangent parmi les cas suivants:

a) aile angulaire conique aux bords d'attaque subsoniques (ce cas s'applique à l'aile avant, dans les cas 2 et 3, indiqués ci-dessus);

b) aile conique aux bords d'attaque supersoniques (ce cas s'applique à l'aile avant, dans le cas 1, et à l'aile arrière, dans les cas 1 et 2);

c) aile conique aux bords d'attaque subsoniques, prolongés par un plan d'incidence nulle (ce cas s'applique à l'aile arrière, dans le cas 3).

En suivant la voie de [3], on détermine le *potentiel fictif* dans les cas *a)*, *b)*, *c)*, et l'on obtient les formules (20) et (48) (cette dernière est valable pour les cas *b)* et *c)* [2]).

On déduit les vitesses axiales de perturbation de l'expression du potentiel et ensuite, par intégration, les formules du coefficient unitaire de portance, soit (39) pour le cas *a)*, (57) pour le cas *b)* et (58) pour le cas *c)*. Pour l'aile toute

entière, le coefficient unitaire de portance, dans les cas 1, 2, et 3 ci-dessus, est donné par les formules (72), (73), et (74), représentées dans les diagrammes 7—14.

On remarque que:

— dans le cas où les bords d'attaque de l'aile sont supersoniques, la portance à l'incidence nulle est égale à zéro (72);

— tant que les bords d'attaque des ailes arrières sont supersoniques, la portance de l'aile tout entière ne dépend pas de h.

On a négligé dans les calculs les réflexions des ondes MACH sur les bords des ailes.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Asupra portanței și rezistenței aripii triunghiulare la viteze supersonice.* Comunicările Academiei R.P.R., t. IV, nr. 5—6, mai—iunie 1954, p. 261.
2. E. Carafoli și M. Ionescu, *Rezistența aripilor triunghiulare dublu-conice cu pantă variabilă.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, iulie—decembrie 1954, p. 285.
3. E. Carafoli, *Extinderea analogiei hidrodinamice din mișcările conice la aripile groase și cu incidență variabilă.* Comunicările Academiei R.P.R., t. III, nr. 3—4, martie—aprilie 1953, p. 141.
4. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice, aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Academiei R.P.R., t. II, nr. 9—10, septembrie—octombrie 1952, p. 629.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

AEROMECANICĂ

TEORIA MIŞCĂRILOR SUBSONICE CU DÎRĂ APROAPE RECTILINIE

DE

N. PATRAULEA şi C. STĂNESCU

În scopul unei extinderi a teoriei mişcărilor cu dîră aproape rectilinie, în cazul unui curent subsonic, vom folosi metoda de liniarizare a lui Glauert-Prandtl [1], metodă compatibilă cu ipoteza perturbaţiilor mici provocate de prezenţa unui obstacol suficient de permeabil.

Teoria este aplicabilă la elicele în regim subsonic de translaţie, la frîne aerodinamice permeabile etc.

1. Consideraţii generale

Să considerăm fluidul nelimitat şi animat la infinit de o viteză u_∞; luînd axa $o\,x_1$ în sens contrar vitezei de la infinit, putem scrie pentru viteza fluidului într-un punct oarecare

$$\bar{v} = \bar{u}_\infty + \bar{u}, \tag{1.1}$$

$\bar{u}$ (u_i) fiind viteza de perturbare; componentele u_i sînt considerate mici faţă de u_∞, în aşa fel încît patratele şi produsele lor să poată fi neglijate.

În aceste condiţii, ecuaţia de continuitate devine [2]:

$$\beta^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \tag{1.2}$$

unde s-a notat

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty} \text{ şi } \beta^2 = 1 - M_\infty^2 > 0.$$

Să efectuăm acum următoarele schimbări de variabile şi funcţii:

$$\left.\begin{aligned} &a) && x_1 = \beta X_1 \;;\; x_2 = X_2 \;;\; x_3 = X_3 \\ &b) && u_1 = \frac{U_1}{\beta} \;;\; u_2 = U_2 \;;\; u_3 = U_3 \\ &c) && u_\infty = \beta U_\infty \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Ecuaţia (1.2) devine

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0. \tag{1.4}$$

Funcţiile U_i pot fi interpretate ca vitezele de perturbaţie ale unui fluid incompresibil, avînd o viteză asimptotică U_∞.

Dacă notăm cu ω_i rotorul în mişcarea reală şi cu Ω_i rotorul în mişcarea asociată, avem relaţiile

$$\omega_1 = \Omega_1 \; ; \quad \omega_2 = \frac{1}{\beta}\,\Omega_2 \; ; \quad \omega_3 = \frac{1}{\beta}\,\Omega_3. \tag{1.5}$$

În particular, relaţiile (1.5) arată că dacă într-un domeniu g din spaţiul fizic x_i, rotorul este nul, în domeniul imagine G din spaţiul asociat X_i mişcarea este de asemenea irotaţională. Aşadar, pe baza ecuaţiei (1.4), potenţialul vitezei de perturbaţie al mişcării asociate Φ, va fi o funcţie armonică.

Între valorile potenţialelor φ şi Φ, existente în punctele x şi X ce se corespund prin (1.3) *a*), avem, abstracţie făcînd de o constantă arbitrară,

$$\Phi(X) = \int_{X(0)}^{X} U_i\, d\, X_i = \int_{x(0)}^{x} u_i\, d\, x_i = \varphi(x). \tag{1.6}$$

De asemenea liniile de curent ale celor două mişcări se corespund.

2. Condiţiile la limită pentru funcţiile φ şi Φ

Datorită transformărilor de coordonate (1.3), *a*), imaginea corpului permeabil (S) (fig. 1) va avea o formă diferită prin aceea că dimensiunile transversale rămîn invariabile, iar dimensiunile longitudinale sînt mărite cu coeficientul $\frac{1}{\beta}$. Să notăm

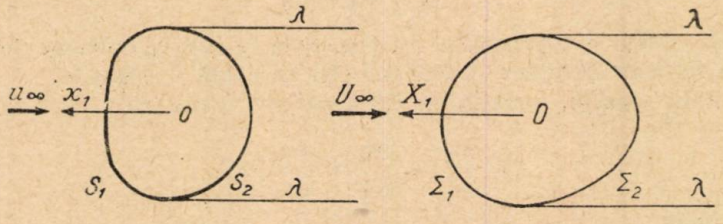


Fig. 1

Fig. 2

cu Σ_1 şi Σ_2 (fig. 2) cele două feţe, respectiv amonte şi aval, ale corpului (S), obţinute în urma transformării (1.3).

Mişcarea fiind presupusă cu perturbaţii mici se poate considera că rotorul este constant pe linii drepte, paralele cu viteza de la infinit. În baza relaţiilor (1.5) această afirmaţie este valabilă în aceeaşi măsură atît în spaţiul x_i, cît şi în spaţiul asociat X_i.

Să admitem acum că în mișcarea reală la infinit aval, viteza normală este nulă pe suprafața laterală λ a dîrei:

$$\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{x_1=-\infty} = 0. \tag{2.1}$$

Cu ajutorul relațiilor (1.3) se deduce că și pe suprafața laterală Λ, a cilindrului turbionar imagine, avem de asemenea

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_{X_1=-\infty} = 0. \tag{2.2}$$

Atunci, aplicînd rezultatele teoriei mișcărilor incompresibile cu dîră aproape rectilinie, în mișcarea asociată, potențialul Φ este prelungibil analitic în tot domeniul exterior lui Σ, [3]. Φ reprezintă potențialul vitezelor de perturbare U_i în domeniul mișcării potențiale asociate.

Rezultă, prin urmare, că potențialul φ, al mișcării subsonice, care satisface ecuația

$$\beta^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 0,$$

este prelungibil analitic în tot domeniul exterior lui (S) (fig. 1), dacă este satisfăcută condiția (2.1).

Pentru calculul vitezelor totale v_i în mișcarea reală vom folosi formulele simple

$$\begin{aligned} v_1 &= -u_\infty + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \varepsilon u_1'(x_2, x_3), \\ v_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \varepsilon u_2'(x_2, x_3), \\ v_3 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \varepsilon u_3'(x_2, x_3), \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde $\varepsilon = 1$ în dîră și $\varepsilon = 0$ în domeniul irotațional.

Condițiile la limită pentru potențialul φ se stabilesc ușor.

Dacă se dă viteza normală $u_n^{(1)}(x_2, x_3)$ pe suprafața amonte (S_1) a corpului permeabil și componentele $u_i^{(2)}(x_2, x_3)$ pe suprafața aval, (S_2), vom avea pe suprafața (S_1), condiția

$$\frac{d\varphi}{dn} = u_n^{(1)}, \tag{2.4}$$

iar pe (S_2)

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) n_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) n_2^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) n_3^{(2)} = \\ = -\left[\frac{\partial u_2^{(2)}(x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^{(2)}(x_2, x_3)}{\partial x_3}\right] n_1^{(2)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

care este o condiție Hilbert pentru funcția $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ [4]. În expresia (2.5), prin $n_i^{(2)}$ am

notat cosinuşii directori ai normalei la suprafaţa (S_2). Dacă ne referim însă la determinarea funcţiei Φ, atunci pe Σ_1 vom avea următoarea condiţie Hilbert:

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}n_1^{(1)}(X_2, X_3)+\frac{\partial\Phi}{\partial X_2}n_2^{(1)}(X_2, X_3)+\frac{\partial\Phi}{\partial X_3}n_3^{(1)}(X_2, X_3)=u_n^{(1)}(X_2, X_3), \tag{2.6}$$

iar pe Σ_2

$$\frac{d}{dN}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X_1}\right)=-\left[\frac{\partial u_2^{(2)}(X_2, X_3)}{\partial X_2}+\frac{\partial u_3^{(2)}(X_2, X_3)}{\partial X_3}\right]N_1^{(2)}. \tag{2.7}$$

Dacă din condiţiile (2.6) şi (2.7) se poate determina funcţia armonică Φ, respectiv φ, vitezele suplimentare se determină uşor prin relaţiile (2.3).

Vitezele în mişcarea reală se deduc cu ajutorul relaţiilor (2.3), iar liniile de curent sînt omoloage liniilor de curent din mişcarea asociată.

3. Calculul presiunii

Notînd cu p_0 şi ρ_0 presiunea şi densitatea la infinit amonte, în domeniul mişcării potenţiale putem aplica ecuaţia lui Bernoulli liniarizată, adică

$$p-p_0=\rho_0\,u_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \tag{3.1}$$

În dîră putem admite că la infinit aval domneşte tot presiunea p_0. Făcînd aceleaşi ipoteze cu privire la densitate, ecuaţia lui Bernoulli aplicată pe o linie de curent între un punct din dîră şi punctul de la infinit aval, este

$$p-p_0\cong-\frac{\rho_0}{2}\int_{V_0^2}^{V^2}dv^2.$$

unde prin V_0 am notat viteza la infinit aval. Remarcînd că

$$(\operatorname{grad}\varphi)_\infty=0$$

avem

$$V_0^2\cong u_\infty^2-2\,u_\infty u_1'+u_1'^2.$$

Se obţine

$$p-p_0\cong\rho_0(u_\infty-u_1')\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}. \tag{3.2}$$

4. Cazul unei suprafeţe permeabile

Să considerăm cazul particular, cînd corpul permeabil se reduce la o suprafaţă permeabilă şi să notăm cu S_1 şi S_2 cele două feţe ale suprafeţei (fig. 3).

Admitem acum, în spaţiul $o\,x_i$, viteza într-un punct al suprafeţei descompusă după direcţia normalei şi a tangentei, conţinută în planul determinat de viteză şi vectorul normalei.

Notînd cu v_{ni} — componenta vitezei după normală ($i=1$ pe S_1 şi $i=2$ pe S_2) şi cu $v_{\tau i}$ componenta vitezei după tangentă ($i=1$ pe S_1 şi $i=2$ pe S_2) şi negli-

jînd variația densității la trecerea fluidului prin structura permeabilă, vom avea în baza ecuației continuității

$$v_{n_1} = v_{n_2}$$

dar, în general,

$$v_{\tau 1} \neq v_{\tau 2}\,.$$

Aplicînd transformarea (1.3) acestor componente, transformatele lui v_{n_1} și v_{n_2} vor fi identice și vor avea aceleași proiecții pe normală la noua suprafață permeabilă, ceea ce înseamnă că ele respectă continuitatea și în mișcarea asociată. Această constatare nu mai rămîne valabilă cu privire la componentele v_{τ_1} și v_{τ_2}. Într-adevăr, fie

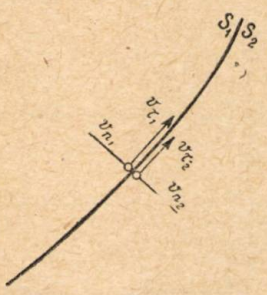


Fig. 3

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ecuația suprafeței permeabile în spațiul $o\,x_i$ și

$$f(X_1, X_2, X_3) = F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

ecuația transformatei ei (suprafața imagine). Să notăm cu u_i componentele vectorului v_{τ_1}. Avem, evident

$$u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Să efectuăm acum transformarea (1.3). Relația precedentă devine

$$\frac{U_1}{\beta^2} \frac{\partial F}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} + U_3 \frac{\partial F}{\partial X_3} = 0.$$

Se vede acum că transformata vitezei tangențiale, de componente U_i, nu mai este tangentă suprafeței imagine $F(X_i) = 0$. Ea are o componentă după normală a cărei valoare rezultă imediat

$$V_{n_1} = -\frac{M_\infty^2 U_1 \dfrac{\partial F}{\partial X_1}}{\beta^2 \mid \operatorname{grad} F \mid}. \tag{4.1}$$

Dacă se ține seama acum și de componenta după noua normală, dată de $v_{\tau 2}$, rezultă că la trecerea prin structura permeabilă imagine, avem variația

$$\delta V_n = V_{n_2} - V_{n_1} = -\frac{M_\infty^2 \delta U_1 \dfrac{\partial F}{\partial X_1}}{\beta^2 \mid \operatorname{grad} F \mid}, \tag{4.2}$$

ceea ce arată că după efectuarea transformării (1.3), în mișcarea asociată, nu mai este respectată continuitatea la trecerea prin suprafața imagine.

Noua mișcare are loc cu creare sau dispariție de fluid. Această variație în genere este mică și se poate neglija cazul unei plăci cu incidență mică; ea este riguros nulă cînd $\dfrac{\partial F}{\partial X_1} = 0$ sau $u_1 = 0$ (viteza tangențială nu are componentă după $o\,x_1$, de exemplu, în cazul plan, o placă permeabilă normală pe curentul de la infinit).

5. Placă permeabilă cu o incidenţă mică

Fie o placă permeabilă de lungime $2\,l$, aşezată într-un curent, avînd la infinit o viteză u_∞ şi o incidenţă α mică (fig. 4).

Efectuînd transformările (1.3) vom avea o placă de aceeaşi lungime (fig. 5), situată într-un curent U_∞ a unui curent incompresibil, noua incidenţă fiind

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg}\,(\beta\,\operatorname{tg}\,\alpha) \doteq \beta\alpha.$$

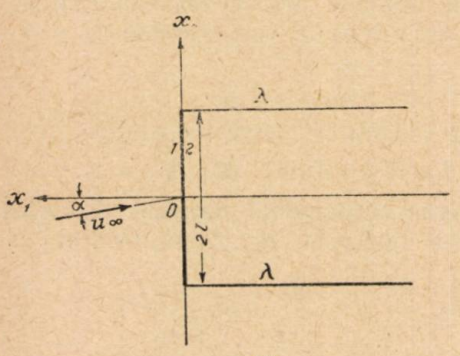


Fig. 4

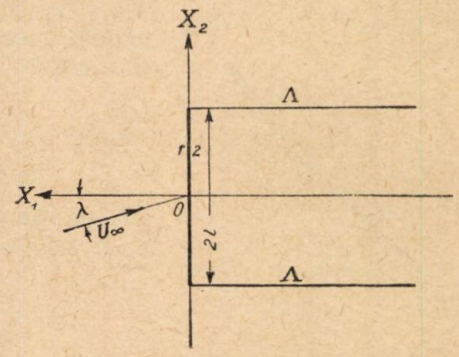


Fig. 5

Ca urmare a ipotezelor făcute, variaţia δV_n dată de (4.2) se poate neglija; de asemenea presupunem că refracţia liniilor de curent este foarte mică.

Viteza complexă în mişcarea asociată este dată de

$$V = V_1 - iV_2 = (-U_\infty + \varepsilon U')\,e^{i\lambda} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-il}^{+il} \frac{\omega(\zeta_0)\,d\zeta_0}{\zeta_0 - Z}, \tag{5.1}$$

$\omega(\zeta_0)$ fiind densitatea singularităţilor care determină funcţia Φ.

Să notăm cu 1 respectiv 2 cele două feţe ale plăcii: amonte şi aval; cu $V^{(1)}$ şi $V^{(2)}$ viteza pe aceste feţe şi cu ζ un punct al plăcii. Vom avea, în baza formulelor lui Plemelj,

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= -U_\infty e^{i\lambda} - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{-il}^{+il}{}' \frac{\omega(\zeta_0)\,d\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta}, \\ V^{(2)} &= -U_\infty e^{i\lambda} + U' e^{i\lambda} + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_{-il}^{+il}{}' \frac{\omega(\zeta_0)\,d\zeta_0}{\zeta_0 - \zeta}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

integralele fiind luate valoare principală. Ca urmare a ipotezelor făcute, $V^{(1)} = V^{(2)}$. ceea ce determină distribuţia singularităţilor:

$$\omega = -U'\,e^{i\lambda}.$$

Expresia (5.1) devine

$$V = V_1 - i\,V_2 = (-U_\infty + \varepsilon U')\,e^{i\lambda} - \frac{e^{i\lambda}}{2\pi i}\int_{-il}^{+il} \frac{U'd\zeta_0}{\zeta_0 - Z}. \tag{5.3}$$

Singura necunoscută este acum viteza suplimentară U' din domeniul zonei turbionare. Determinarea sa se face pe baza relației

$$\delta p = \frac{\rho_0}{2} v_n^2 \frac{1}{K}, \tag{5.4}$$

care caracterizează structura permeabilă a plăcii, unde δp este variația presiunii între fața amonte și fața aval, v_n viteza normală de trecere, iar K este coeficientul de permeabilitate al plăcii, pentru care putem presupune o expresie de forma

$$\frac{1}{K} = a + b\frac{u_\infty}{v_n},$$

coeficienții a și b fiind determinați experimental.

Calculul lui δp este foarte simplu și se obține

$$\delta p = p_1 - p_2 = \rho_0 u'\left(u_\infty - \frac{u'}{2}\right), \tag{5.5}$$

încît relația (5.4) ne conduce la următoarea ecuație pentru u', implicit U':

$$u'\left(u_\infty - \frac{u'}{2}\right) = \frac{v_n^2}{2K}.$$

Efectuînd transformarea (1.3) se obține

$$\frac{U'}{\beta}\left(\beta U_\infty - \frac{U'}{2\beta}\right) = \frac{1}{2}\frac{V_1^2}{\beta^2}\left(a + b\,\beta^2\frac{U_\infty}{V_1}\right). \tag{5.6}$$

Dar

$$V_1 = \operatorname{Re} V^{(1)} = -U_\infty \cos\lambda\left(1 - \frac{1}{2}\frac{U'}{U_\infty}\right) - \frac{\sin\lambda}{2\pi}\int_{-l}^{+l}{}' \frac{U'd\,X_{20}}{X_{20} - X_2}.$$

Notînd $U' = U_\infty V$ și neglijînd termenii de ordinul U'^2 se obține următoarea ecuație integrală singulară:

$$\left(-a\cos^2\lambda + b\,\beta^2\frac{\cos\lambda}{2} - 2\,\beta^2\right)V +$$

$$+\frac{1}{2\pi}(a\sin 2\lambda - b\,\beta^2\sin\lambda)\int_{-l}^{+l}{}' \frac{V d\,X_{20}}{X_{20} - X_2} = b\,\beta^2\cos\lambda - a\cos^2\lambda. \tag{5.7}$$

Dacă introducem notaţiile

$$A = -a\cos^2\lambda + b\,\beta^2\frac{\cos\lambda}{2} - 2\beta^2 \approx -a + \frac{b\,\beta^2}{2} - 2\beta^2,$$

$$B = \frac{1}{2}a\sin 2\lambda - b\,\beta^2\sin\frac{\lambda}{2} \approx \frac{\lambda}{2}(2a - b\,\beta^2), \tag{5.8}$$

$$C = b\,\beta^2\cos\lambda - a\cos^2\lambda \approx b\,\beta^2 - a$$

avem

$$A\,V(X_2) + \frac{B}{\pi}B\int_{-l}^{+l}\frac{V d X_{20}}{X_{20} - X_2} = C\,.$$

Să admitem acum că a şi b sînt constante. În acest caz soluţia ecuaţiei este [5]

$$V(X_2) = \frac{A\,C}{A^2 + B^2} -$$

$$- \frac{B\,C}{\pi\,(A^2 + B^2)\,(l + X_2)^{1-m}\,(l - X_2)^m}\int_{-l}^{+l}\frac{(X_{20} + l)^{1-m}\,(l - X_{20})^m\,dX_{20}}{X_{20} - X_2} +$$

$$+ \frac{c}{(l + X_2)^{1-m}\,(l - X_2)^m}$$

unde m este o constantă, dată de

$$m = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{A + i\,B}{A - i\,B}\,.$$

Se constată că în cazul de faţă, m este real; determinarea logaritmului trebuie aleasă în aşa fel încît [5] *)

$$0 \leqslant m < 1.$$

Calculul integralei

$$I = \int_{-l}^{+l}\frac{(X_{20} + l)^{1-m}\,(l - X_{20})^m\,dX_{20}}{X_{20} - X_2}$$

se face foarte uşor, efectuînd substituţia

$$\tau = \frac{X_{20} + l}{2\,l}\,.$$

Integrala se reduce la

$$I = 2l\int_0^1 \tau\left(\frac{1 - \tau}{\tau}\right)^m\frac{d\tau}{\tau - t}$$

X_2 fiind dat de $2\,l\,t = X_2 + l$.

*) p. 150.

Se ştie că [6]

$$\int_0^1 \tau \left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)^m \frac{d\tau}{\tau-t} = -\frac{\pi t}{\sin m\pi} \sum_{j=0}^{j=1}{}' (-1)^j C_m^j t^{-j} + \frac{\pi t}{\operatorname{tg} m\pi}\left(\frac{1-t}{t}\right)^m.$$

Prin urmare

$$I = 2l\left[-\frac{\pi(X_2+l)}{2l\sin m\pi}\sum_{j=0}^{j=1}{}'(-1)^j C_m^j\left(\frac{X_2+l}{2l}\right)^{-j} + \frac{\pi(X_2+l)}{2l\operatorname{tg} m\pi}\left(\frac{l-X_2}{l+X_2}\right)^m\right]. \quad (5.9)$$

Se obţine în sfîrşit următoarea expresie pentru viteza suplimentară U' în dîră pentru mişcarea asociată

$$\frac{U'}{U_\infty} = \frac{AC}{A^2+B^2} - \frac{1}{(X_2+l)^{1-m}(l-X_2)^m}\left[\frac{B\cdot C\cdot I}{\pi(A^2+B^2)} + c\right] \quad (5.10)$$

constantele A, B, C fiind determinate de relaţiile (5.8).

Pe baza transformărilor (1.3) se poate determina u'; rezultanta presiunilor pe placă se determină din (5.5), care se poate simplifica neglijînd u'^2. Să remarcăm, în încheiere, că expresia (5.10) conduce la incompatibilităţi de natură fizică, viteza u devenind infinită la extremităţile plăcii.

Pentru ca rezultanta forţelor să fie mărginită, vom determina constanta c astfel ca la bordul de fugă viteza să fie finită.

ТЕОРИЯ ДОЗВУКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ С ПОЧТИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ СЛЕДОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы дают широкое распространение теории движений с почти прямолинейным следом вокруг препятствий любой формы, но достаточно проницаемых в случае дозвуковых скоростей поступательного движения.

С этой целью применяется метод линейности Глауерт-Прандтля и после произведения преобразования (1.3) к действительному движению присоединяется фиктивное движение несжимаемой жидкости в вспомогательном пространстве.

Трудность задачи переносится таким образом к определению гармонической функции φ, правильной во всем наружном изображении тела, причем запишутся предельные условия (2.6) и (2.7). Скорости указаны в формулах (2.3).

Рассматривается подробно случай проницаемой поверхности, а в последней части — как применение — плоскостное движение вокруг проницаемой пластины под малым углом встречи.

THÉORIE DES MOUVEMENTS SUBSONIQUES AU SILLAGE PRESQUE RECTILIGNE

(RÉSUMÉ)

Les Auteurs donnent une extension à la théorie des mouvements à sillage presque rectiligne, autour des obstacles de forme quelconque, mais suffisamment perméables, dans le cas des vitesses de translation subsonique.

Dans ce but, on applique la méthode de linéarisation de Glauert-Prandtl et, en opérant les transformations (1.3), on associe au mouvement réel un mouvement fictif d'un fluide incompressible dans l'espace auxiliaire.

La difficulté du problème se trouve ainsi résider en la détermination d'une fonction harmonique φ, régulière partout à l'extérieur de l'image du corps, en écrivant les conditions à la limite (2.6) et (2.7). Les vitesses sont données par les formules (2.3).

Le cas d'une surface perméable est étudié en détail et comme application, dans la dernière partie du travail, on étudie le mouvement plan, autour d'une plaque perméable, sous un angle d'incidence faible.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
2. L. Simonovi S. Hristianovia, *Vlianie s jimaemosti na indiktivnîe s korasti krîla i iinta*. Prikladnîi mat. meh., 1944, nr. 2, p. 51.
3. N. Patraulea, *O soluţie de tip Oseen pentru scurgerile în jurul suprafeţelor permeabile*. Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 11—12, noiembrie—decembrie 1952, p. 737.
4. C. Iacob, *Sur la problème de la dérivée oblique de Poincaré et sa connexion avec le problème de Hilbert*. Bull. Mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences, Bucureşti, 1941, t. XLII.
5. S. G. Mihlin, *Integralniie uravnenia*. Moscova, 1949.
6. N. Patraulea şi E. Larisch, *Mişcarea cu dîră în jurul unei plăci portante permeabile*. Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 7, iulie 1955, p. 1109.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

AEROMECANICĂ

CONTRIBUŢII LA STUDIUL STABILITĂŢII LONGITUDINALE A AVIONULUI ÎN EVOLUŢIILE CELE MAI DEFAVORABILE

DE

TIBERIU HACKER

NOTAŢII

$Oxyz$ = Sistemul de axe intrinseci de coordonate (origina în centrul de greutate al avionului; Ox — tangentă la traiectorie, îndreptată în sensul zborului; Oy — normală, îndreptată în sus; Oz — binormală îndreptată astfel încît să formeze cu primele un triedru drept

m = masa avionului

$\overline{m} = \dfrac{m}{\frac{\rho}{2} S r_z}$ = coeficientul densităţii relative a avionului

r_z = raza de inerţie a avionului faţă de axa Oz

J_z = momentul de inerţie al avionului faţă de aceeaşi axă

y_p = distanţa de la centrul de greutate al avionului la axa tracţiunii

G = greutatea avionului

P = forţa de tracţiune (axa ei este presupusă paralelă cu axa de portanţă nulă a avionului)

Q = rezistenţa la înaintare a avionului

Y = portanţa avionului

M_z = momentul forţelor aerodinamice faţă de axa Oz

V = viteza tangenţială a centrului de greutate al avionului

α = unghiul de incidenţă

θ = unghiul format de tangenta la traiectoria centrului de greutate cu planul orizontal

ϑ = unghiul de tangaj

$\omega_z = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ = viteza unghiulară de tangaj

$\left.\begin{matrix} \Delta V \\ \Delta\alpha \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\omega_z \end{matrix}\right\}$ = perturbaţiile parametrilor mişcării V, α, ϑ şi ω_z

$$P^V = \frac{\partial P}{\partial V},$$

$$Q^V = \frac{\partial Q}{\partial V}, \quad Q^\alpha = \frac{\partial Q}{\partial \alpha},$$

$$Y^V = \frac{\partial Y}{\partial V}, \quad Y^\alpha = \frac{\partial Y}{\partial \alpha},$$

$$M_z^V = \frac{\partial M_z}{\partial V}, \quad M_z^\alpha = \frac{\partial M_t}{\partial \alpha},$$

$$M_z^\omega = \frac{\partial M_t}{\partial \omega_z}, \quad M_z^{\dot\alpha} = \frac{\partial M_t}{\partial \dot\alpha}$$

$c_p = \dfrac{P}{\frac{\rho}{2} V^2 S}$ = coeficientul adimensional al forţei de tracţiune

$$c_{pV} = -\frac{P^V}{\frac{\rho}{2} VS} = -\frac{\frac{\partial P}{\partial V}}{\frac{\rho}{2} VS}$$

$c_x = \dfrac{Q}{\frac{\rho}{2} V^2 S}$

$c_y = \dfrac{Y}{\frac{\rho}{2} V^2 S}$ = coeficienţi aerodinamici

$m_z = \dfrac{M_z}{\frac{\rho}{2} V^2 S r_z}$

$$c_x^M = \frac{\partial c_x}{\partial M}, \quad c_x^\alpha = \frac{\partial c_x}{\partial \alpha},$$

$$c_y^M = \frac{\partial c_y}{\partial M}, \quad c_y^\alpha = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha}$$

$$m_z^M = \frac{\partial m_z}{\partial M}, \quad m_z^\alpha = \frac{\partial m_z}{\partial \alpha},$$

$$m_z^\omega = \frac{\partial m_z}{\partial \left(\frac{r_z}{V_{\max}} \omega_z \right)},$$

$$m_z^{\dot\alpha} = \frac{\partial m_z}{\partial \left(\frac{r_z}{V_{\max}} \frac{d\alpha}{dt} \right)}$$

$c_{ya.o.}$ = coeficientul de portanţă al ampenajului orizontal

$\bar V = \dfrac{V}{V_{\max}}$,

$\Delta \bar V = \dfrac{\Delta V}{V_{\max}}$ = mărimi adimensionale, proporţionale cu V, respectiv ΔV

$\Delta \bar\omega_z = \dfrac{m}{\frac{\rho}{2} S V_{\max}} \Delta\omega_z$ = mărime adimensională, proporţională cu $\Delta\omega_z$

$j = \dfrac{dV}{dt}$ = acceleraţia tangenţială a centrului de greutate (t = timp)

$\bar j = \dfrac{d\bar V}{d\bar t} = \dfrac{m}{\frac{\rho}{2} V_{\max}^2 S} j$ = coeficientul adimensional al acceleraţiei j

t, sau $\bar t$ = variabila independentă în ecuaţiile de mişcare, reprezentînd timpul sau o mărime variabilă adimensională, proporţională cu timpul, de forma $\dfrac{\rho}{2} \dfrac{S}{m} V_{\max} t_{\dim}$ ($t_{\dim}$ = timpul, de exemplu, în secunde)

$V_{\max}$ = viteza maximă de zbor a avionului

ρ = densitatea aerului

$\left.\begin{matrix} \Delta \bar V \\ \Delta\alpha \ (=x_2) \\ \Delta\vartheta \\ \Delta\bar\omega_z (=x_4) \end{matrix}\right\}$ = perturbaţiile parametrilor adimensionali ai mişcării; funcţiile necunoscute în ecuaţiile mişcării perturbate

$p_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ = coeficienţii ecuaţiilor mişcării perturbate adimensionale în forma normală, în general funcţii de timp

$\bar p_{42} = -p_{42}$

$q = \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{d\bar t} \ln \bar p_{42}$

$[t_1, t_2]$ = intervalul de timp necesar îndeplinirii evoluţiei, sau a unei părţi din evoluţie, prescrisă de program

$[t_0, t_f]$ = intervalul de timp, începînd din momentul producerii perturbaţiei, sau din momentul luat drept iniţial în mod arbitrar ulterior producerii perturbaţiei, în care se studiază mişcarea perturbată ($t_1 \leqslant t_0 < t_f \leqslant t_2$).

I. CHESTIUNI GENERALE

Calculele ce se fac de obicei la proiectarea, respectiv la verificarea proiectării unui avion nu-i asigură stabilitatea în orice evoluție, care-i este proprie, acoperind doar o foarte mică parte a acestora. Practica existentă a calculului la stabilitate longitudinală se mulțumește cu asigurarea stabilității pentru un anumit sau pentru anumite regimuri permanente, trăgînd de aici concluzii asupra stabilității avionului în general (deci pentru orice evoluție). Asemenea concluzii s-ar putea trage dacă toate mișcările perturbate posibile ale avionului ar fi dinamic asemenea. Or, după cum se știe, nu există similitudine dinamică între diferitele mișcări perturbate, nici cînd mișcările de bază (neperturbate) sînt permanente.

Un avion nu este la fel de stabil în cazul diferitelor regimuri permanente și cu atît mai mult, din existența stabilității dinamice în cazul mișcărilor de bază permanente, nu se pot trage concluzii asupra stabilității în regimuri nepermanente.

Este necesar:

1° a se găsi evoluțiile cele mai defavorabile din punctul de vedere al stabilității și

2° a se rezolva problema stabilității pentru aceste evoluții.

În lucrarea de față se consideră evoluțiile, permanente și nepermanente, avînd oc pe o traiectorie rectilinie și orizontală.

§ 1. Ecuațiile mișcării perturbate longitudinale a avionului în formă adimensională, cînd traiectoria mișcării de bază este rectilinie orizontală

Se va studia numai stabilitatea longitudinală a avionului, cu alte cuvinte se consideră că atît mișcarea de bază, cît și cea perturbată au loc într-un plan vertical, coincizînd cu planul de simetrie al avionului.

Traiectoria mișcării de bază fiind orizontală se consideră densitatea aerului ρ constantă și egală cu cea corespunzătoare altitudinii mișcării de bază.

Variația în timp a masei avionului fiind destul de înceată, greutatea, masa și momentul de inerție ale avionului se consideră de asemenea constante.

Admițînd cele de mai sus, neglijînd variația portanței și rezistenței la înaintare cu vitezele unghiulare *) și considerînd în dezvoltarea în serie Taylor, în raport cu puterile perturbațiilor parametrilor, numai termenii liniari, sistemul de ecuații ale mișcării perturbate, cînd traiectoria mișcării de bază este rectilinie și orizontală, se poate scrie sub următoarea formă, [1]:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d\Delta V}{dt} &= -(Q^V - P^V\cos\alpha)\,\Delta V - (Q^\alpha - Y)\,\Delta\alpha - (Y + P\sin\alpha)\,\Delta\vartheta \\
mV\frac{d\Delta\alpha}{dt} &= -(Y^V + P^V\sin\alpha)\,\Delta V - (Y^\alpha + P\cos\alpha)\,\Delta\alpha + mV\,\Delta\omega_z \\
\frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z \\
J_z\frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= (M_z^V - y_p P^V)\,\Delta V + M_z^\alpha\,\Delta\alpha + M_z^\omega\,\Delta\omega_z + M_z^{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

*) Pentru ipotezele adoptate vezi [1].

Pentru aducerea sistemului (1.1) la o formă adimensională, vom recurge la o transformare de tipul celei inițiate de H. Glauert [2], dar puțin diferită de cele uzuale.

Anume, de obicei se ia ca unitate (scară) pentru viteze (respectiv pentru perturbația vitezei) viteza de zbor a avionului, V. În expresiile unităților de timp și viteză unghiulară intră de asemenea mărimea V. Propunîndu-se a compara, din punctul de vedere al stabilității, diferite mișcări permanente și nepermanente efectuate de același avion, vom alege ca unitate pentru viteze, viteza maximă a avionului, iar pentru timp și viteze unghiulare funcții de viteză maximă. Viteza de zbor a avionului la un moment dat, V, rămîne doar în expresiile unităților de forțe $\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S\right)$ și momente $\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S r_z\right)$. În felul acesta rezultatele vor fi comparabile între ele.

Mai departe, aducerea la forma adimensională decurge în mod obișnuit. Reamintim succesiunea operațiilor. Pentru exprimarea argumentelor dimensionale, (masă, caracteristici geometrice, parametri cinematici etc.), de care depinde mișcarea perturbată studiată, se alege un sistem de unități fundamentale, compatibil cu unitățile îndeobște adoptate pentru forțe $\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S\right)$ și momente $\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S r_z\right)$ *) Aceste unități fundamentale sînt $\rho/2$, S, r_z *) și $V_{\max}$. Cu ajutorul lor se construiesc unitățile derivate pentru restul argumentelor, sub formă de monoame de puteri ale unităților fundamentale. (Așa de pildă, scara, sau unitatea masei va fi $\frac{1}{2}\rho S r_z$, a momentului de inerție $\frac{1}{2}\rho S r_z^3$ etc.).

Înlocuind acum forțele Y, Q, P **) și momentul M_z prin expresiile lor cunoscute în funcție de: presiunea dinamică, suprafața portantă și raza de girație a avionului, apoi derivatele parțiale Y^α, Y^V, Q^α etc., cu derivatele parțiale respective ale acestor expresii ***) și făcînd schimbarea de variabile

$$t = m\left(\frac{\rho}{2} S V_{\max}\right)^{-1} \bar{t} \qquad \Delta\vartheta = \Delta\bar{\vartheta}$$

$$\Delta V = V_{\max}\,\Delta\bar{V} \qquad \Delta\omega_z = m^{-1}\frac{\rho}{2} S V_{\max}\,\Delta\bar{\omega}_z \qquad (1.2)$$

$$\Delta\alpha = \Delta\bar{\alpha}$$

---

*) În locul razei de inerție, în cazul mișcării longitudinale, se ia de multe ori lungimea corzii aerodinamice medii.

**) Prin analogie cu expresiile forțelor aerodinamice, tracțiunea se înlocuiește prin $P = \frac{\rho}{2} V^2 S c_p$.

***) Coeficienții adimensionali se derivează în raport cu argumentele fără dimensiuni: în loc de V, cu M, în loc de ω_z cu $\bar{\omega}_z = \frac{r_z}{V_{\max}}\omega_z$. În mod excepțional derivatei parțiale P^V i se substituie expresia $P^V = -\frac{1}{2}\rho V S c_{pV}$.

sistemul (1.1) devine *)

$$\frac{d\Delta\overline{V}}{d\overline{t}} = -\overline{V}(2c_x + Mc_x^M + c_{pV}\cos\alpha)\Delta\overline{V} - \overline{V}^2(c_x^\alpha - c_y)\Delta\alpha - \overline{V}^2(c_y + c_p\sin\alpha)\Delta\vartheta$$

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\overline{t}} = -(2c_y + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\Delta\overline{V} - \overline{V}(c_y^\alpha + c_p\cos\alpha)\Delta\alpha + \Delta\overline{\omega}_z$$

$$\frac{d\Delta\vartheta}{d\overline{t}} = \Delta\overline{\omega}_z \tag{1.3}$$

$$\frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{d\overline{t}} = \overline{V}\overline{m}(2m_z + Mm_z^M + \overline{y}_p c_{pV})\Delta\overline{V} + \overline{V}^2\overline{m}\,m_z^\alpha\Delta\alpha + \overline{V}^2 m_z^\omega\Delta\overline{\omega}_z + \overline{V}^2 m_z^{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{d\overline{t}}.$$

În acest sistem parametrul adimensional $\overline{V}$ apare în mod explicit, deci în general soluțiile sistemului, reprezentînd mișcările perturbate, vor depinde explicit de acest parametru. În felul acesta, după cum se va vedea, este ușurată analiza influenței vitezei de zbor (a regimului) asupra caracteristicilor de stabilitate.

Se știe că perturbațiile diferiților parametri ai mișcării nu apar și nu se amortizează simultan **).

Sub acțiunea cauzei perturbatoare, parametrii mișcării avionului în jurul centrului său de greutate și, în primul rînd, unghiul de incidență variază repede: apar instantaneu ($\Delta\alpha$) sau aproape instantaneu ($\Delta\omega_z$) și se amortizează în scurt timp ***).

Viteza centrului de greutate, dimpotrivă, variază relativ încet, în caz de stabilitate perturbația ei (împreună cu cea a pantei traiectoriei) amortizîndu-se încet. Practic, pentru valorile curente ale coeficientului de stabilitate statică și în cazul stabilității dinamice, cînd apare perturbația vitezei de zbor, perturbațiile $\Delta\alpha$ și $\Delta\omega_z$ sînt amortizate. Astfel mișcarea perturbată se prezintă ca o succesiune a două etape practic distincte, denumite în literatură « etapa cu perioadă scurtă » și « etapa cu perioadă lungă ». Încercările în zbor au arătat existența fizică a acestor două etape.

Pentru stabilirea ecuațiilor mișcării perturbate în cele două etape se vor adopta ipotezele expuse în lucrarea [4].

Pentru etapa cu perioadă scurtă se consideră $\Delta\overline{V} = 0$.

Atunci, lăsînd la o parte ecuațiile întîia și a treia ale sistemului (1.3) și înlocuind în ultima derivata $\frac{d\Delta\alpha}{d\overline{t}}$ cu expresia ei din ecuația a doua, rezultă următorul sistem:

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\overline{t}} = -\overline{V}(c_y^\alpha + c_p\cos\alpha)\Delta\alpha + \Delta\overline{\omega}_z$$

$$\frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{d\overline{t}} = [\overline{m}\,\overline{V}^2 m_z^\alpha - \overline{V}^3 m_z^{\dot\alpha}(c_y^\alpha + c_x)]\Delta\alpha + \overline{V}^2(m_z^\omega + m_z^{\dot\alpha})\Delta\overline{\omega}_z. \tag{1.4}$$

Pentru etapa cu perioadă lungă, conform recomandației lui M. L. Mil, se neglijează:

*) Barele de deasupra literelor înseamnă că mărimile respective sînt adimensionale.
**) Vezi de exemplu, [3], p. 101–109, [1], p. 245–247 și [4].
***) Instabilitatea față de acești parametri nu este permisă.

1° variația vitezei unghiulare de tangaj, în comparație cu mărimile însești ale perturbațiilor parametrilor $\Delta\overline{V}$, $\Delta\vartheta$, $\Delta\overline{\omega}_z$ și chiar $\Delta\alpha$, punînd în ultima ecuație $\frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{dt} = 0$; și

2° variația perturbației unghiului de incidență în comparație cu $\Delta\overline{\omega}_z$, considerînd $\frac{d\Delta\alpha}{dt} = 0$.

Atunci, eliminînd $\Delta\alpha$ și $\Delta\overline{\omega}_z$ din ultimele trei ecuații ale sistemului (1.3), în care se pusese $\frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{dt}$ și $\frac{d\Delta\alpha}{dt}$ egale cu 0, se obține, pentru descrierea mișcării perturbate în etapa așa-zisă cu perioadă lungă, un sistem de forma

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\overline{V}}{dt} &= p_{11}(t)\,\Delta\overline{V} + p_{13}(t)\,\Delta\vartheta \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= p_{31}(t)\,\Delta\overline{V} + p_{33}(t)\,\Delta\vartheta, \end{aligned} \tag{1.5}$$

unde coeficienții p_{ij} sînt funcții cunoscute de valorile luate pentru mișcarea neperturbată ale parametrilor cinematici ($\overline{V}$ sau M, α), de constanta $\overline{m}$, precum și coeficienții adimensionali ai forțelor și momentului longitudinal și derivatelor parțiale ale acestora.

Se știe că cele două etape ale mișcării perturbate nu au aceeași importanță nici în ceea ce privește stabilitatea și nici maniabilitatea avionului *). Încercările în zbor, precum și unele cercetări teoretice au arătat că în ambele privințe, rolul primei etape, zise *cu perioadă scurtă*, este mai mare. De aceea și în lucrarea de față se va acorda o mai mare atenție problemelor legate de această etapă.

II. CAZUL MIȘCĂRII DE BAZĂ PERMANENTE

§ 2. Stabilitatea în etapa cu perioada scurtă a mișcării perturbate

Transcriem sistemul (1.4) în următoarea formă prescurtată:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\alpha}{dt} &= p_{22}\,\Delta\alpha + \Delta\overline{\omega}_z \\ \frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{dt} &= p_{42}\,\Delta\alpha + p_{44}\,\Delta\overline{\omega}_z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

unde coeficienții p_{ij} au, pentru un regim dat, valori constante cunoscute.

Astfel, stabilitatea mișcării neperturbate date, în prima etapă a mișcării perturbate, se traduce prin stabilitatea soluției banale ($\Delta\alpha = 0$, $\Delta\overline{\omega}_z = 0$) a sistemului (2.1).

Se știe că această soluție este stabilă atunci și numai atunci cînd rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului sînt ambele negative, dacă sînt reale, sau au

*) Vezi [5] și [1], p. 247–249.

părțile reale negative, în caz contrar. Se știe de asemenea că rădăcinile reale ale ecuației caracteristice corespund unei variații neoscilatorii a perturbațiilor, iar cele complexe unei variații oscilatorii.

Rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului (2.1)

$$\begin{vmatrix} p_{22}-\lambda & 1 \\ p_{42} & p_{44}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

sînt

$$\lambda_{2,4} = \frac{p_{22}+p_{44}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_{22}+p_{44})^2 - 4\,p_{22}\,p_{44} + p_{42}}.$$

Se vede dintr-o dată că, dacă λ_2 și λ_4 sînt complexe, soluția banală a sistemului (2.1) este întotdeauna stabilă, deoarece inegalitatea

$$p_{22} + p_{44} = -\overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_x) + \overline{V}^2\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) < 0$$

are loc întotdeauna. Cu alte cuvinte, dacă variația perturbațiilor este oscilatorie, avionul zburînd în regim permanent pe o traiectorie rectilinie orizontală, este întotdeauna stabil în prima etapă a mișcării perturbate. Or, cazul variației oscilatorii (periodice) a perturbațiilor este cel mai frecvent la avioane, ele avînd o stabilitate statică suficientă.

Într-adevăr, din inegalitatea

$$(p_{22}+p_{44})^2 - 4\,p_{22}\,p_{44} - p_{42} < 0,$$

înlocuind coeficienții p_{ij} cu expresiile lor, rezultă condiția necesară și suficientă pentru ca variația perturbațiilor să fie oscilatorie sub forma

$$m_z^{\alpha} < -\overline{V}\,\frac{m_z^{\omega}}{\overline{m}}\,(c_y^{\alpha} + c_x) - \frac{1}{4\overline{m}}\,[\overline{V}\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) - c_y^{\alpha} - c_x]^2. \tag{2.3}$$

Primul termen al membrului al doilea al inegalității (2.3) este întotdeauna pozitiv ($m_z^{\omega} < 0$, $c_y^{\alpha} > 0$, $c_x > 0$), iar cel de al doilea, evident, negativ, ambii fiind mici în valoare absolută. De obicei membrul al doilea este ușor negativ și deci pentru ca variația perturbațiilor să fie oscilatorie se cere un anumit grad, de altfel destul de mic, de stabilitate statică.

Să presupunem acum că rădăcinile ecuației (2.2) sînt reale. În acest caz, condiția necesară și suficientă de stabilitate va fi exprimată de inegalitatea

$$-\,p_{22}\,p_{44} + p_{42} < 0,$$

pentru care ambele rădăcini, λ_2 și λ_4 sînt negative.

Făcînd înlocuirile în ultima inegalitate se obține următoarea condiție impusă stabilității statice:

$$m_z^{\alpha} < -\overline{V}\,\frac{m_z^{\omega}}{\overline{m}}\,(c_y^{\alpha} + c_x). \tag{2.4}$$

Întrucît condiția (2.3) satisface inegalitatea (2.4), aceasta din urmă reprezintă condiția necesară și suficientă de stabilitate în prima etapă a mișcării pertur-

bate, în cazul cînd mișcarea de bază este permanentă, orizontală și rectilinie (deci în cazul studiat în teoria clasică a stabilității avionului). Or, întrucît membrul al doilea al inegalității (2.4) este pozitiv (și de altfel, mic ca valoare) rezultă faptul cunoscut că pentru ca un avion să fie stabil dinamic, în etapa cu perioada scurtă a mișcării perturbate, este suficientă stabilitatea statică a lui în regimul studiat (nu însă și necesară).

Faptul că avioanele static stabile sînt stabile și dinamic în orice regim de mișcare permanentă, nu înseamnă nicidecum că mișcările perturbate decurg la fel în toate regimurile. Mișcările perturbate, în cazul diferitelor regimuri de bază, nefiind dinamic asemenea, rezultă evident că atît decrementul de amortizare a perturbațiilor, cît și perioada lor de oscilație variază, în general, cu regimul de zbor *). De exemplu, decrementul de amortizare a amplitudinii perturbațiilor, variația lor fiind oscilatorie, este egal cu partea reală a rădăcinilor ecuației caracteristice (2.2) adică cu

$$\mu = \frac{1}{2}\left[-\overline{V}\left(c_y^{\alpha} + c_x\right) + \overline{V}^2\left(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}\right)\right].$$

Se vede ușor că μ este o funcție crescătoare de $\overline{V}$. Într-adevăr, din expresia

$$\mu = \frac{1}{2}\left[-\overline{V}\left(c_y^{\alpha} + c_x\right) + \overline{V}^2\left(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}\right)\right]$$

se vede că μ depinde, neglijînd c_x în comparație cu c_y^{α}, de V, c_y^{α} și $c_{y\,a.\,o.}^{\alpha\,a.\,o.}$ și anume: în valoare absolută crește în același sens cu aceste mărimi (derivatele de rotație m_z^{ω} și $m_z^{\dot{\alpha}}$, în modul, cresc cu $c_{y\,a.\,o.}^{\alpha\,a.\,o.}$). Or, toate trei mărimile $\overline{V}$, c_y^{α} și $c_{y\,a.\,o.}^{\alpha\,a.\,o.}$ sînt funcții monoton descrescătoare de α, respectiv monoton crescătoare de V, ceea ce dovedește afirmația de mai sus.

De aici rezultă că, în cazul cînd se consideră ca mișcare neperturbată zborul orizontal cu toți parametrii mișcării constanți, regimul cel mai interesant din punctul de vedere al stabilității longitudinale este cel corespunzător vitezei minime de zbor. Pe de altă parte, din considerente de maniabilitate se recomandă cercetarea mișcării perturbate (aflarea perioadei de oscilație, a decrementului de amortizare, evaluarea mărimii amplitudinilor perturbațiilor) în cazul regimului cel mai mult solicitat și anume al regimului de croazieră. Incontestabil, că deficiențele de stabilitate, cum ar fi de pildă o amortizare prea înceată a perturbațiilor sau o cît de ușoară instabilitate, îngreunează cel mai mult munca pilotului, obosindu-l excesiv, tocmai în acest regim.

După cum se va vedea însă în capitolul următor, cercetarea stabilității zborului în regim permanent, fie și în cazul cel mai defavorabil, devine inutilă prin considerarea unor cazuri de regimuri nepermanente, acoperitoare din punctul de vedere al stabilității. În ceea ce privește cercetarea mișcării perturbate în cazul regimului de croazieră, interesul pentru aceasta este de asemenea limitat de urmă-

*) V. S. Vedrov în lucrarea [3] analizează influența vitezei de zbor asupra decrementului de amortizare și asupra perioadei de oscilație (p. 76). Pornind de la expresii cu totul aproximative, rezultatele pe care le obține, nu pot da decît o idee calitativă asupra acestei influențe (decrementul de amortizare într-adevăr crește, iar perioada scade cu viteza de zbor, dar nu numaidecît proporțional, respectiv invers proporțional. De altfel o dată cu variația vitezei de zbor variază și coeficientul de stabilitate statică, pe care autorul îl ia constant).

toarea împrejurare. La cele mai multe dintre avioanele moderne, pentru acest regim, este mai util a se studia mișcarea perturbată (și stabilitatea) în cazul zborului, cînd comenzile sînt acționate automat în vederea menținerii regimului (pilotul automat în funcțiune).

§ 3. Etapa a doua a mișcării perturbate

După cum au arătat încercările în zbor [5], [1] instabilitatea în etapa cu perioadă lungă a mișcării perturbate devine neplăcută pentru pilotaj abia în cazul variației neoscilatorii (aperiodice) a perturbațiilor *).

De altfel, o bună parte a avioanelor, chiar de construcții recente, sînt *periodic instabile* în această etapă a mișcării perturbate.

În zbor orizontal p_{33} fiind egal cu 0, rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului (1.5) sînt

$$\lambda_{1,3} = \frac{p_{11}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p_{11}^2 + 4p_{13}\,p_{31}}\,.$$

Dacă produsul $p_{13}\,p_{31}$ este negativ (cum se întîmplă întotdeauna la vitezele de zbor mai mici decît viteza critică, $M < M_{crit}$) stabilitatea este asigurată prin satisfacerea inegalității

$$p_{11} < 0. \tag{3.1}$$

Neglijînd mărimile c_{pV}, m_z și $c_p \sin\alpha$ și admițînd că $c_p \cos\alpha = c_x$, coeficienții sistemului (1.5) pentru zborul orizontal vor fi:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= -\overline{V}\left[2c_x + Mc_x^M + (c_x^\alpha - c_y)\frac{Mm_z^M + \overline{V}m_z^\omega(2c_y + Mc_y^M)}{-m_z^\alpha - \frac{m_z^\omega}{\overline{m}}\overline{V}(c_y^\alpha + c_x)}\right]\\
p_{13} &= -\overline{V}^2\left[c_y + \overline{V}(c_x^\alpha - c_y)\frac{\frac{m_z^\omega}{\overline{m}}(c_y^\alpha + c_x)}{-m_z^\alpha - \frac{m_z^\omega}{\overline{m}}\overline{V}(c_y^\alpha + c_x)}\right]\\
p_{31} &= \overline{V}\,\frac{-m_z^\alpha\overline{V}(2c_y + Mc_y^M) + Mm_z^M(c_y^\alpha + c_x)}{-m_z^\alpha - \frac{m_z^\omega}{\overline{m}}\overline{V}(c_y^\alpha + c_x)}\\
p_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Cum satisfacerea inegalității (3.1) nu poate fi în general asigurată pentru toată gama de regimuri proprii avionului respectiv, atunci pentru intervalele unde coeficientul p_{11} este pozitiv se cercetează îndeplinirea condiției de variație oscilatorie a perturbațiilor, exprimată prin următoarea inegalitate:

$$p_{13}\,p_{31} < -p_{11}^2. \tag{3.3}$$

Într-o primă aproximație în expresia coeficientului p_{13} (3.2) se poate neglija cel de al doilea termen din paranteza dreaptă, considerînd $p_{13} \cong -V^2 c_y$.

*) În literatură se întîlnește curent termenul de *instabilitate periodică* și *instabilitate aperiodică* în loc de oscilatorie și neoscilatorie.

De aici se vede imediat că valoarea coeficientului p_{13} variază foarte puțin $\left(V^2 c_y \simeq \frac{2G}{\rho S} \simeq \text{const.}\right)$, mărimea produsului $p_{13}\ p_{31}$ depinzînd în special de mărimea coeficientului p_{31}. Din expresia lui p_{31} se vede că cel puțin pentru vitezele subcritice, mărimea acestui coeficient variază în sens invers cu valoarea absolută a coeficientului de stabilitate statică m_z^α. Trasîndu-se curba m_z^α în funcție de p_{31}, se poate găsi gradul de stabilitate statică, necesar pentru îndeplinirea condiției (3.3.)

Cele de mai sus, după cum s-a remarcat, sînt valabile numai în cazul $M < M_{crit.}$ Într-adevăr, în acest caz, precum se vede în (3.2), coeficientul p_{31} este întotdeauna pozitiv și deci produsul $p_{13}\ p_{31}$ negativ.

Pentru valori ale numărului M mai mari decît cea critică, c_y^M și m_z^M devin negative și valoarea lui c_y la vitezele respective fiind mică coeficientul p_{31}, la un moment dat, devine mai mic decît 0. Produsul $p_{13}\ p_{31}$ devenind astfel pozitiv, rădăcinile ecuației caracteristice vor fi obligator reale și pentru $p_{11} > 0$ cel puțin una dintre ele (și anume λ_1) este pozitivă. Se ajunge astfel la un caz de instabilitate aperiodică.

§ 4. Concluzii

Mișcările avionului în diferitele regimuri permanente nefiind dinamic asemenea, pentru fiecare regim, mișcarea perturbată decurge diferit. Se constată că perturbațiile se amortizează cu atît mai repede, cu cît viteza de zbor este mai mare. De aici rezultă că din punctul de vedere al stabilității dintre toate regimurile permanente, cele mai interesante sînt acelea care corespund vitezelor celor mai mici de zbor, ca fiind cele mai defavorabile. Totodată prezintă un interes incontestabil cercetarea stabilității în regim de croazieră cu sau fără auto-pilot, în vederea obținerii unei maniabilități cît mai comode pentru pilot, tocmai în regimul în care se găsește avionul în zbor timpul cel mai îndelungat.

În capitolul care urmează se va cerceta cazul general al zborului rectiliniu orizontal, căutîndu-se regimurile cele mai interesante din punctul de vedere al stabilității. După cum va reieși dintr-o comparație cu cazul mișcărilor de bază permanente, studiul comportării perturbațiilor, în cazul zborului în regim permanent, este util numai în ceea ce privește anumite probleme de maniabilitate nu și din punctul de vedere al stabilității în sine a avionului. Prin urmare, studiind cazul cel mai defavorabil (și deci și cel mai interesant) sub raportul stabilității în cadrul mișcărilor nepermanente, pentru zborul în regim permanent se recomandă studierea comportării perturbațiilor numai în cazul regimului de croazieră.

III. CAZUL MIȘCĂRII DE BAZĂ NEPERMANENTE, RECTILINII ȘI ORIZONTALE (ZBOR ACCELERAT ȘI FRÎNAT). CRITERII DE STABILITATE LONGITUDINALĂ

Necesitatea studierii stabilității avionului în mișcare nepermanentă s-a făcut simțită în ultima vreme, în urma utilizării în practica pilotajului modern a unor accelerații, în special negative, mari.

După cum se știe studiul stabilității mișcării nepermanente duce la cercetarea unui sistem de ecuații diferențiale ordinare și omogene cu coeficienți variabili (în cazul stabilității longitudinale a avionului, de exemplu, de forma (1.1) a căror integrare în formă închisă, în general, nu este cunoscută. De aceea, pentru rezolvarea problemelor legate de stabilitatea avionului în mișcare nepermanentă, se

recurge de obicei la integrarea aproximativă a ecuațiilor mișcării perturbate. În această categorie de metode aproximative intră și procedeul întîlnit în unele lucrări sub denumirea de, «procedeul coeficienților înghețați» care consideră coeficienții ecuațiilor mișcării perturbate constanți pe anumite intervale.

Toate aceste procedee însă, în afară de anumite avantaje incontestabile, au unele inconveniente organice. Astfel, pentru fiecare tip de ecuații sau cîteodată chiar pentru fiecare ecuație în parte, trebuie să se găsească un mod specific de integrare aproximativă.

Cel mai grav inconvenient însă al acestor procedee, aplicate la studiul stabilității, constă în nesiguranța valabilității rezultatelor. Într-adevăr, recurgînd la integrarea aproximativă, problema propusă este înlocuită prin alta; or, valabilitatea unei astfel de înlocuiri este condiționată de însăși existența stabilității față de niște parametri depinzînd de procedeul aproximativ ales.

Aceste inconveniente se evită, întrebuințînd în rezolvarea problemei stabilității mișcărilor nepermanente procedee calitative, dînd condiții suficiente riguros valabile. La baza acestor procedee calitative, în studiul stabilității, stă așa-numita metodă a doua a lui Leapunov [6]. Lucrările [7], [8], [9], din domeniul stabilității longitudinale a avionului au la bază asemenea procedee calitative. În cele ce urmează vom expune ceva mai pe larg rezultatele enunțate în lucrările [8], [9] *).

§ 5. Un criteriu de stabilitate longitudinală în etapa cu perioadă scurtă

Deoarece pentru zborul orizontal rectiliniu $c_p \cos\alpha = c_x + \frac{\bar{j}}{V^2}$, sistemul (1.4) se mai poate scrie

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\bar{t}} = -\bar{V}\left(c_y^\alpha + c_x + \frac{\bar{j}}{V^2}\right)\Delta\alpha + \Delta\bar{\omega}_z$$

$$\frac{d\Delta\bar{\omega}_z}{d\bar{t}} = \left[\bar{m}\,\bar{V}^2 m_z^\alpha - \bar{V}^3 m_z^{\dot{\alpha}}\left(c_y^\alpha + c_x + \frac{\bar{j}}{V^2}\right)\right]\Delta\alpha + \bar{V}^2\left(m_z^\omega + m_z^{\dot{\alpha}}\right)\Delta\bar{\omega}_z . \tag{5.1}$$

Transcriem prescurtat sistemul (5.1) în felul următor

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= p_{22}(t)\,x_2 + x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} &= p_{42}(t)\,x_2 + p_{44}(t)\,x_4 , \end{aligned} \tag{5.2}$$

unde $x_2 = \Delta\alpha$, $x_4 = \Delta\bar{\omega}_z$, $p_{ij}(t)$ sînt coeficienții sistemului funcții de t, iar cu t fără bară am notat variabila independentă, funcție adimensională de timp (în loc de $\bar{t}$).

Vom studia cazul cînd avionul are o stabilitate statică suficientă în toate regimurile considerate pentru ca p_{42} să fie tot timpul negativ și mare în valoare absolută în comparație cu ceilalți coeficienți ai sistemului. Acest caz corespunde imensei majorități (dacă nu exclusivității) a soluțiilor constructive curente **).

*) Paragrafele 7, 8 și 9 ale lucrării de față sînt extrase din aceste lucrări.

**) De altfel însăși ipoteza existențe celor două etape ale mișcării perturbate este valabilă numai în cazul avioanelor static stabile.

Atît criteriile de stabilitate deduse mai jos, cît și evaluările cantitative ale perturbațiilor date în capitolul IV decurg din studierea comportării perturbațiilor într-un interval dat de timp față de un anumit domeniu variabil din planul perturbațiilor. Conturul care delimitează acest domeniu va avea ecuația de forma $W(t, x_2, x_4) = \text{const.}$, W fiind o funcție Leapunov pozitiv definitivă [6].

Fie un domeniu în planul variabilelor x_2, x_4 delimitat de o elipsă variabilă (mobilă) $W(t\ x_2, x_4) = C^2$, W fiind, se înțelege, o formă patratică, pe care o alegem pentru fixarea ideilor, pozitiv definită. Studiem comportarea perturbațiilor x_2, x_4 față de acest domeniu pe segmentul $[t_0, t_f]$, aparținînd intervalului de timp $[t_1, t_2]$ necesar executării de către avion a evoluției (mișcării de bază) prescrise de program (accelerare sau frînare).

Presupunem că în momentul inițial t_0 perturbațiile se găsesc în domeniul închis (deci în interiorul, sau pe conturul domeniului) definit mai sus. Dacă în tot intervalul $[t_0, t_f]$ derivata funcției W în raport cu timpul, scrisă în virtutea ecuațiilor mișcării perturbate (5.2), va fi negativ definită, atunci perturbațiile vor fi cuprinse în domeniul considerat pe tot intervalul.

Prin alegerea convenabilă a legii de variație a domeniului, problema astfel pusă devine o problemă de stabilitate, iar criteriile ce rezultă din condiția $\frac{dW}{dt} < 0$, pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$, pot fi criterii de stabilitate. Într-adevăr, dacă domeniul rămîne constant sau se îngustează, faptul că perturbațiile rămîn în interiorul lui echivalează cu o mărginire, respectiv o amortizare a lor.

Se consideră, pentru simplitate, drept contur al domeniului o elipsă variabilă (mobilă) ale cărei axe de simetrie se găsesc pe axele de coordonate Ox_2 respectiv Ox_4

$$W(t, x_2, x_4) = a(t)\, x_2^2 + c(t)\, x_4^2 = C^2, \tag{5.3}$$

unde a și c sînt funcții pozitive, deocamdată nedeterminate, de timp, iar C o constantă suficient de mică, ce se determină din condițiile inițiale: $C^2 = a(t_0)\, x_{20}^2 + c(t_0)\, x_{40}^2$. Elipsa variind cu timpul, mărimea constantei C nu determină dimensiunile elipsei.

Atît dimensiunile (lungimile axelor), cît și forma elipsei (raportul dintre aceste lungimi) depind de alegerea funcțiilor $a(t)$ și $c(t)$. Funcțiile a și c le vom alege ținînd seama de problema pusă și de coeficienții sistemului (5.2). În orice caz, pentru ca lungimile axelor elipsei să fie constante sau monoton descrescătoare, evident funcțiile a și c trebuie să fie constante sau monoton crescătoare.

Derivata funcției W în raport cu t în virtutea ecuațiilor (5.2) este următoarea formă patratică

$$\frac{dW}{dt} = (\dot{a} + 2\, a\, p_{22})\, x_2^2 + 2\,(a + c\, p_{42})\, x_2\, x_4 + (\dot{c} + 2\, c\, p_{44})\, x_4^2. \tag{5.4}$$

Pentru ca $\frac{dW}{dt}$ să fie negativ definită este necesar și suficient ca ambele rădăcini ale ecuației caracteristice a formei patratice (5.4)

$$\begin{vmatrix} \dot{a} + 2\, a\, p_{22} - \rho & a + c\, p_{42} \\ a + c\, p_{42} & c + 2\, c\, p_{44} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

să fie negative

$$\rho = a\,p_{22} + c\,p_{44} + \frac{\dot{a}+\dot{c}}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(a\,p_{22} + c\,p_{44} + \frac{\dot{a}+\dot{c}}{2}\right)^2 - \dot{a}\dot{c} - 2\,a\dot{c}p_{44} + 4\,ac\,p_{22}\,p_{44} + (a + c\,p_{42})^2} < 0. \quad (5.5)$$

Funcțiile $a(t)$ și $c(t)$ fiind alese monoton crescătoare, $\dot{a} \geqslant 0$ și $\dot{c} \geqslant 0$. Coeficientul p_{44} este întotdeauna, iar p_{22} de cele mai multe ori negativ. Evident, dacă $a\,p_{22} + c\,p_{44} > 0$, condiția $\rho < 0$ nu poate fi îndeplinită. Dacă însă, cum se întîmplă în majoritatea cazurilor, $a\,p_{22} + c\,p_{44} < 0$, a și c fiind pozitive, atunci condiția (5.5) se mai poate scrie

$$|\,ap_{22} + cp_{44}\,| > \frac{\dot{a}+\dot{c}}{2} +$$

$$+ \sqrt{\left(ap_{22} + cp_{44} + \frac{\dot{a}+\dot{c}}{2}\right)^2 - \dot{a}\dot{c} + 2\,\dot{a}\,cp_{44} - 2a\dot{c}p_{22} + 4\,acp_{22}\,p_{44} + (a + c\,p_{42})^2}.$$

Pentru a obține un criteriu cît mai convenabil este bine ca membrul al doilea al inegalității precedente să fie cît mai mic și să nu crească repede. Or, coeficientul p_4 în valoare absolută este mare și crește repede în comparație cu valorile absolute ale coeficienților p_{22} și p_{44}. Pentru a scăpa de influența termenului $(a + c\,p_{42})^2$ de sub radical, care pentru motivul arătat, este supărătoare, se aleg funcțiile $a(t)$ și $c(t)$ în așa fel încît

$$a + c\,p_{42} = 0. \quad (5.6)$$

Atunci expresia de sub radical devine un patrat perfect și rădăcina cea mai mare a ecuației caracteristice va fi

$$\rho_M = a\,p_{22} + c\,p_{44} + \frac{1}{2}(\dot{a} + \dot{c}) + |\,a\,p_{22} - c\,p_{44} + \frac{1}{2}(\dot{a} - \dot{c})\,|. \quad (5.7)$$

Se vede imediat că sînt posibile două cazuri:

a) Primul, cînd

$$a\,p_{22} - cp_{44} + \frac{1}{2}(\dot{a} - \dot{c}) > 0 \quad (5.8)$$

și atunci, avînd $\rho_M = 2\,a\,p_{22} + \dot{a}$, condiția $\rho_M < 0$ se poate scrie

$$p_{22} + \frac{1}{2}\frac{d \ln a}{dt} < 0. \quad (5.9)$$

b) Și al doilea *)

$$a\,p_{22} - c\,p_{44} + \frac{1}{2}(\dot{a} - \dot{c}) < 0 \quad (5.10)$$

---

*) Cazul $ap_{22} - cp_{44} + \frac{1}{2}(\dot{a} - \dot{c}) = 0$ pentru a și c alese ca în cele ce urmează poate deveni interesant doar pentru accelerații negative suficient de mari în valoare absolută (vezi mai jos).

pentru care $\rho_M = 2cp_{44} + \dot{c}$, condiția $\rho_M < 0$ scriindu-se

$$p_{44} + \frac{1}{2}\frac{d\ln c}{dt} < 0. \tag{5.11}$$

Se poate arăta ușor că în cazul *b)* condiția (5.9) este îndeplinită.

Într-adevăr, împărțind inegalitatea (5.10) cu funcția pozitivă a se obține

$$p_{22} + \frac{1}{2}\frac{d\ln a}{dt} < \frac{c}{a}\left(p_{44} + \frac{1}{2}\frac{d\ln c}{dt}\right).$$

De aici se vede imediat, raportul $\frac{c}{a}$ fiind pozitiv, că în cazul *b)* îndeplinirea condiției (5.11) atrage după sine în mod necesar satisfacerea inegalității (5.9).

Deci, fără a mai fi necesară cercetarea semnului funcției $a\,p_{22} - c\,p_{44} + \frac{\dot{a}-\dot{c}}{2}$, criteriul de stabilitate în raport cu domeniul delimitat de elipsa (5.3) constă în satisfacerea simultană a inegalităților (5.9) și (5.11).

Observație. De la început s-a făcut rezerva asupra semnului funcției $a\,p_{22} + c\,p_{44}$, perturbațiile putînd rămîne în interiorul domeniului considerat numai dacă $a\,p_{22} + c\,p_{44} < 0$. Pentru calculul stabilității însă este inutilă cercetarea semnului acestei funcții. Funcțiile $a(t)$ și $c(t)$ fiind monoton crescătoare, derivatele or logaritmice vor fi pozitive sau nule și deci, dacă inegalitățile (5.9) și (5.11) sînt atisfăcute, atît p_{22} cît și p_{44} *) sînt negative și deci și $a\,p_{22} + c\,p_{44} < 0$.

Funcțiile $a(t)$ și $c(t)$ fiind legate (vezi (5.6)) prin relația

$$\frac{a}{c} = \bar{p}_{42}, \tag{5.12}$$

unde prin $\bar{p}_{42}$ am notat funcția pozitivă de timp $-p_{42}$, numai una dintre ele este arbitrară. La alegerea acesteia vom ține seama se semnul derivatei $\frac{d\bar{p}_{42}}{dt}$ în vederea obținerii unei elipse cu lungimile axelor constante sau monoton descrescătoare cînd t crește. Întrucît semnul lui $\frac{d\bar{p}_{42}}{dt}$ depinde de semnul accelerației centrului de greutate al avionului, se disting trei cazuri.

1°. Zbor accelerat (accelerația centrului de greutate $j > 0$). În acest caz $\bar{p}_{42}$ este o funcție crescătoare de timp **). Funcțiile a și c le alegem de forma

$$a = \bar{p}_{42} \tag{5.13}$$
$$c = 1$$

notînd $q = \frac{1}{2}\frac{d\ln\bar{p}_{42}}{dt}$ și ținînd seama de (5.12) inegalitățile (5.9) și (5.11) devin

$$p_{22} + q < 0$$
$$p_{44} < 0. \tag{5.14}$$

*) Coeficientul p_{44} este în orice caz negativ, independent de inegalitatea (5.11).

**) Derivata $d\bar{p}_{42}/dt$ are același semn cu accelerația j (vezi paragraful 6, de exemplu formula (6.1)).

Îndeplinirea simultană, în orice moment t din intervalul considerat, a acestor două inegalități asigură existența stabilității dinamice pe acest interval în etapa cu perioadă scurtă pentru cazul $\bar{j} > 0$.

2°. Zbor frînat ($\bar{j} < 0$). Funcția $\bar{p}_{42}(t)$ fiind descrescătoare, alegem $a(t)$ și $c(t)$ de forma

$$a = 1,$$

$$c = \frac{1}{\bar{p}_{42}}. \tag{5.15}$$

Atunci inegalitățile (5.9) și (5.11) se scriu

$$p_{22} < 0$$

$$p_{44} - q < 0 \tag{5.16}$$

pentru orice moment t aparținînd intervalului $[t_0, t_f]$.

Inegalitățile (5.16) reprezintă o condiție suficientă de stabilitate pentru cazul zborului frînat.

3°. Zbor cu viteză constantă ($\bar{j} = 0$). Coeficientul $\bar{p}_{42}$ nu depinde de timp și prin urmare formulele (5.14) și (5.16) sînt perfect echivalente. Fie de exemplu a și c ca în formulele (5.15). Derivata logaritmică q fiind egală cu zero. Condițiile de stabilitate față de domeniul delimitat de elipsa (5.3) vor fi

$$p_{22} < 0,$$

$$p_{44} < 0. \tag{5.17}$$

Observație. Precum se știe, condiția necesară și suficientă de stabilitate în regim permanent este mai puțin rigidă decît inegalitățile (5.17) ($p_{22} + p_{44} < 0$). Inegalitățile (5.17) dau doar o condiție suficientă de stabilitate, dar permit o comparație cu criteriile deduse pentru cazurile cînd $\bar{j} \neq 0$, stabilitatea fiind luată în raport cu domenii analoge.

§ 6. Unele concluzii

Dăm expresia aproximativă a funcției q.

Oricît ar fi de mare valoarea absolută a accelerației, în expresia $\bar{p}_{42} = -\bar{m}\bar{V}^2 m_z^\alpha + \bar{V}^3 m_z^{\dot{\alpha}}\left(c_y^\alpha + c_x + \frac{\bar{j}}{\bar{V}^2}\right)$ termenul al doilea se poate neglija în comparație cu primul și considera într-o primă aproximație $\bar{p}_{42} \cong -\bar{m}\bar{V}^2 m_z^\alpha$. De asemenea în expresia aproximativă a derivatei $\frac{d\bar{p}_{42}}{dt} \cong -2\bar{m}\bar{V} m_z^\alpha \bar{j} + 3\bar{V}^2 m_z^{\dot{\alpha}}(c_y^\alpha + c_x)\bar{j} + m_z^{\dot{\alpha}}(3\bar{V} - 2)\bar{j}^2$ ne putem rezuma la primul termen. Atunci

$$q \cong \frac{\bar{j}}{\bar{V}}. \tag{6.1}$$

De aici rezultă că suma $p_{22} + q \cong -\bar{V}(c_y^\alpha + c_x)$, independentă într-o primă aproximație de accelerație, este negativă în orice regim și pentru orice accelerație. Coeficientul p_{44} fiind de asemenea negativ, condițiile (5.17) sînt îndeplinite totdea-

una și se poate conchide că un avion static stabil este stabil și dinamic în prima etapă a mișcării perturbate, dacă mișcarea de bază rectilinie și orizontală este accelerată. Cum această constatare este valabilă și pentru mișcarea de bază permanentă, rezultă că în cazul unei traiectorii rectilinii orizontale calculul la stabilitate este necesar numai pentru zborul frînat (pentru care, cum se vede ușor, nu se poate trage o asemenea concluzie).

Să cercetăm mai de aproape criteriile (5.16) deduse pentru zborul frînat. Ținînd seama de expresiile coeficienților p_{22} și p_{44} și de expresia aproximativă (6.1) a funcției q, condițiile (5.16) se pot scrie

$$c_y^{\alpha} + c_x + \frac{\bar{j}}{\bar{V}^2} > 0$$

$$\bar{V}^2\left(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}} - \frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right) < 0, \tag{6.2}$$

pentru orice moment t aparținînd segmentului $[t_0, t_1]$. În aceste formule $\bar{j} < 0$.

Criteriile (6.2) pun în evidență dependența stabilității de accelerația și viteza centrului de greutate al avionului.

Ambele inegalități indică o ameliorare a stabilității (o îndepărtare de limită a stabilității) prin creșterea vitezei de zbor și o înrăutățire a ei, putînd merge pînă la nesatisfacerea acestor inegalități, prin creșterea valorii absolute a accelerației *).

Din condițiile (6.2) se pot determina aproximativ și limitele admisibile ale mărimii absolute a accelerației la diferitele viteze de zbor (pentru care stabilitatea este asigurată).

Din (6.2) rezultă imediat

$$\begin{aligned} |\bar{j}| &< \bar{V}^2 (c_y^{\alpha} + c_x), \\ |\bar{j}| &< -\bar{V}^3 (m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}). \end{aligned} \tag{6.3}$$

De aici, ținînd seama că $j = \frac{\rho}{2}\frac{S}{G} V_{\max}^2 \bar{j}\, g$, se află limita admisibilă a modulului accelerației

$$|j| < n\, g, \tag{6.4}$$

unde $n = \frac{\rho}{2}\frac{S}{G} V_{\max}^2 \bar{J}$, iar $\bar{J}$ este cea mai mică dintre mărimile $\bar{V}^2 (c_y^{\alpha} + c_x)$ și $-\bar{V}^3 (m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}})$.

Astfel se poate construi grafic limita admisibilă a modulului accelerației în funcție de viteza de zbor $(n = f(\bar{V}))$

Observație. Neîndeplinirea vreuneia dintre inegalitățile (5.16) înseamnă că cel puțin una dintre perturbațiile x_2 sau x_4 nu se amortizează și deci cînd perturbația vitezei devine sensibilă ea continuă încă să aibă o valoare apreciabilă. Pentru aceasta, în apropierea limitei admisibile pentru accelerație dată de formula (6.4)

*) Aceste aprecieri calitative vor căpăta un conținut mai concret, cînd se va analiza influența vitezei de zbor și a accelerației asupra vitezei de amortizare a perturbațiilor.

s-ar impune considerarea sistemului complet de patru ecuații de ordinul întîi. Totuși asemenea cazuri nu prezintă interes practic, instabilitatea dinamică față de unghiul de incidență și viteza unghiulară de tangaj nefiind admise. În practică deci valoarea accelerației trebuie să fie în orice caz inferioară valorii date de formula (6.4).

IV. CAZUL MIȘCĂRII DE BAZĂ NEPERMANENTE, RECTILINII, ȘI ORIZONTALE (ZBOR ACCELERAT ȘI FRÎNAT). EVALUAREA VITEZEI DE AMORTIZARE A PERTURBAȚIILOR LONGITUDINALE

§ 7. Un procedeu de evaluare a vitezei de amortizare a perturbațiilor

În cazul cînd mișcarea de bază este permanentă, viteza de amortizare se obține ușor prin integrarea ecuațiilor mișcării perturbate. Dacă perturbațiile sînt oscilatorii, cum se întîmplă practic întotdeauna în prima etapă a mișcării perturbate la avioanele static stabile, decrementul de amortizare este chiar partea reală a rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării perturbate.

Dacă mișcarea de bază este însă nepermanentă, ecuațiile mișcării perturbate nu se mai integrează în forma închisă și aflarea vitezei de amortizare prezintă cel puțin aceleași dificultăți ca și însăși problema găsirii soluțiilor unor ecuații cu coeficienți variabili.

Totuși prin metode calitative se poate evalua viteza de amortizare găsindu-se anumite funcții de timp, care să mărginească superior valorile absolute ale perturbațiilor în fiecare moment. Evident că perturbațiile se vor amortiza mai repede decît niște funcții astfel definite.

Drept asemenea funcții majorante pentru perturbații vom alege semiaxele elipsei variabile

$$a(t)\, x_2^2 + c(t)\, x_4^2 = C^2 \tag{7.1}$$

coeficienții $a(t)$ și $c(t)$ fiind funcții, deocamdată arbitrare, pozitive și monoton crescătoare de t în intervalul considerat $[t_0, t_f]$.

Cum s-a arătat în capitolul precedent, dacă funcțiile $a(t)$ și $c(t)$ sînt legate prin relația $\frac{a}{c} = \overline{p}_{42}$, atunci condiția necesară și suficientă, pentru ca perturbațiile să rămînă în tot intervalul, $[t_0, t_f]$ în interiorul domeniului delimitat de elipsa (7.1), este ca pe tot acest interval să fie îndeplinite simultan inegalitățile

$$\begin{aligned} p_{22}(t) + \frac{1}{2}\frac{d \ln a(t)}{dt} &< 0, \\ p_{44}(t) + \frac{1}{2}\frac{d \ln c(t)}{dt} &< 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Prin urmare, dacă inegalitățile (7.2) sînt satisfăcute în fiecare moment, semiaxele elipsei îndeplinesc rolul de majorante pentru perturbații, reprezentînd margini superioare ale modulilor acestora.

Fie satisfăcută relația $\frac{a}{c} = \overline{p}_{42}$.

Pentru evaluarea vitezei de amortizare a perturbațiilor căutăm, printr-o alegere convenabilă a funcțiilor a și c, în fiecare moment cea mai mică elipsă, pentru care condițiile (7.2) să fie satisfăcute simultan.

Funcția $\bar{p}_{42}$ variind în sensuri diferite, după cum mișcarea de bază este accelerată sau frînată (crește pentru $j > 0$ și scade pentru $j < 0$), funcțiile $a(t)$ și $c(t)$ trebuie să fie alese și ele diferit, conform semnului accelerației.

Pentru zborul accelerat alegem

$$a = \bar{p}_{42} \exp \int_{t_0}^{t} 2\gamma(t)\, dt$$
$$c = \exp \int_{t_0}^{t} 2\gamma(t)\, dt, \tag{7.3}$$

iar pentru cel frînat și uniform

$$a = \exp \int_{t_0}^{t} 2\alpha(t)\, dt$$
$$c = \frac{1}{p_{42}} \exp \int_{t_0}^{t} 2\alpha(t)\, dt, \tag{7.4}$$

unde $\gamma(t)$ și $\alpha(t)$ sînt funcții pozitive sau nule în intervalul $[t_0, t_f]$ și care vor trebui să fie determinate în conformitate cu necesitățile problemei puse mai sus *).

În felul acesta lungimile semiaxelor elipsei (7.1) $r_2 = \frac{C}{\sqrt{a}}$ și $r_4 = \frac{C}{\sqrt{c}}$ scad, pe de o parte, din cauza lui $\bar{p}_{42}$, pe de altă parte, în special, din cauza funcțiilor α sau γ.

Să determinăm valoarea limită în fiecare moment a funcției γ sau α, pentru care inegalitățile (7.2) se mai mențin.

Pentru zbor accelerat, ținînd seama de formulele (7.3), aceste inegalități se pot scrie după cum urmează

$$p_{22}(t) + q(t) < -\gamma(t)$$
$$p_{44}(t) < -\gamma(t), \tag{7.5}$$

pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$; pentru zborul frînat, înlocuind în (7.2) a și c cu expresiile (7.4) se obține

$$p_{22}(t) < -\alpha(t)$$
$$p_{44}(t) - q(t) < -\alpha(t) \tag{7.6}$$

în același interval; iar pentru mișcarea uniformă, făcînd aceleași înlocuiri, dar ținînd seama că p_{22} și p_{44} sînt constante, iar $q(t) = 0$ pe tot intervalul $[t_0, t_f]$, vom avea

$$p_{22} < -\alpha_c$$
$$p_{44} < -\alpha_c, \tag{7.7}$$

α_c fiind tot o constantă.

*) Se vede că luînd funcțiile $\gamma(t)$ și $\alpha(t)$ identic nule, dăm de expresiile date coeficienților a și c în capitolul precedent, pentru deducerea criteriilor de stabilitate.

Inegalitățile (7.5), (7.6), (7.7) sînt echivalente cu altele de forma

$$\begin{aligned} &\gamma(t) < \Gamma(t) \text{ (echivalentă cu (7.5))} \\ &\alpha(t) < A(t) \text{ (echivalentă cu (7.6))} \\ &\alpha_c < -2\,p_{ii} \text{ (echivalentă cu (7.7)),} \end{aligned} \tag{7.8}$$

unde $\Gamma(t)$ este cea mai mică, în fiecare moment, dintre valorile funcțiilor $-(p_{22}+q)$ și $-p_{44}$; $A(t)$ cea mai mică, în fiecare moment, dintre valorile funcțiilor $-p_{22}$ și $-(p_{44}-q)$, iar $-p_{ii}$ este cea mai mică dintre mărimile constante pe intervalul $[t_0, t_f]$ — p_{22} și $-p_{44}$.

Luînd, la limită, în fiecare moment t *),

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \Gamma(t) \\ \alpha(t) &= A(t) \\ \alpha_c &= -p_{ii} \end{aligned} \tag{7.9}$$

rezultă pentru zborul accelerat

$$|x_2| \leqslant r_2 = \frac{C}{\sqrt{\bar{p}_{42}(t)}} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt\right] \tag{7.10}$$

$$|x_4| \leqslant r_4 = C \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt\right],$$

pentru zborul frînat

$$|x_2| \leqslant r_2 = C \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right] \tag{7.11}$$

$$|x_4| \leqslant r_4 = C\sqrt{\bar{p}_{42}(t)} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right],$$

iar pentru zborul cu viteză constantă

$$\begin{aligned} |x_2| &\leqslant r_2 = C \exp\left[-p_{ii}(t-t_0)\right] \\ |x_4| &\leqslant r_4 = C\sqrt{\bar{p}_{420}} \exp\left[-p_{ii}(t-t_0)\right]. \end{aligned} \tag{7.12}$$

*) În formulele (7.5), (7.6), (7.7) deci și în formulele (7.8) figurează semnul $<$ și nu semnul $\leqslant$. De aceea, riguros, în locul formulelor (7.9) de mai jos ar fi trebuit luate altele de forma

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \Gamma(t) - \varepsilon_1 \\ \alpha(t) &= A(t) - \varepsilon_2 \\ \alpha_c &= -p_{ii} - \varepsilon_3 \end{aligned}$$

ε_1, ε_2 și ε_3 fiind cantități mici pozitive, constante sau funcții de t. Simplitatea rezultatului compensează această lipsă de rigurozitate.

De altfel semnul $<$ s-a impus în locul semnului $\leqslant$ doar ca o măsură de siguranță, cerută de faptul că în ecuațiile mișcării perturbate s-au neglijat termenii neliniari.

Constanta C se determină din condițiile inițiale

$$C^2 = a(t_0)\, x_{20}^2 + c(t_0)\, x_{40}^2 . \tag{7.13}$$

Observație. Inegalitățile (7.10), (7.11), (7.12), cu ajutorul cărora se evaluează viteza de amortizare a perturbațiilor, se pot determina pe o cale mai directă pornind de la o teoremă de stabilitate asimptotică dată de A. Halanay [10] *).

Fie într-adevăr $P(t)$ matricea sistemului (5.2), $G(t)$ a formei patratice $W(t, x_2, x_4) = a(t)\, x_2^2 + c(t)\, x_4^2$, iar $Q(t)$ aceea a formei patratice reprezentînd derivata $\frac{dW}{dt}$ în virtutea sistemului (5.2). Dacă $\lambda_M(t)$ este în fiecare moment t al intervalului $[t_0, t_1]$, cea mai mare rădăcină a ecuației în λ $|G^{-1}Q - \lambda E| = 0$ sau, ceea ce este același lucru, a ecuației $|Q - \lambda G| = 0$ atunci avem în fiecare moment t, $\frac{dW}{dt} \leqslant \lambda_M W$ (vezi [10]) sau, W fiind pozitiv definită,

$$W \leqslant C^2 \exp \int_{t_0}^{t} \lambda_M(t)\, dt, \tag{7.14}$$

unde $C^2 = W(t_0, x_{20}, x_{40})$.

Rezolvînd ecuația

$$|Q - \lambda G| = \begin{vmatrix} \dot{a} + 2a\, p_{22} - a\lambda & a + c\, p_{42} \\ a + c\, p_{42} & \dot{c} + 2c\, p_{44} - c\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

și punînd $a + c\, p_{42} = 0$ se poate arăta ușor că, după cum $p_{22} - p_{44} + q \gtrless 0$ $\lambda_M = 2p_{22} + \frac{d \ln a}{dt}$ sau $\lambda_M = 2\, p_{44} + \frac{d \ln c}{dt}$. Dacă, pentru a avea elipse cu axe descrescătoare în timp și ținînd seama de relația $a + c\, p_{42} = 0$, punem: pentru $j > 0$, $a = \overline{p}_{42}$, $c = 1$, iar pentru $j \leqslant 0$, $a = 1$, $c = \frac{1}{\overline{p}_4}$ se observă că $-\frac{1}{2}\lambda_M$ reprezintă tocmai funcțiile de sub semnul integral în formulele (7.10), (7.11) și (7.12). Prin urmare inegalitatea (7.14), care dă viteza de amortizare a formei patratice W, este echivalentă cu aceste formule.

De altfel din condiția $\lambda_M < 0$ se pot deduce și criteriile de stabilitate date în capitolul precedent.

Cauza perturbatoare, fie că e externă (rafală de vînt), fie că este în legătură cu acționarea comenzilor de către pilot, este resimțită, în primul rînd, de către unghiul de incidență, perturbațiile celorlalți parametri ai mișcării apărînd, mai devreme sau mai tîrziu, drept consecințe ale schimbării valorii lui α (vezi de exemplu [1] sau [4]). De aceea în relația (7.13) se poate considera $x_{40} = 0$ și deci

$$C = |x_{20}| \sqrt{a(t_0)}. \tag{7.15}$$

Înlocuind în formulele (7.10), (7.11), (7.12) constanta C cu expresia (7.15), în care pentru $j > 0$, $a(t_0) = \overline{p}_4 \cdot (t_0) = \overline{p}_{420}$, iar pentru $j \leqslant 0$, $a(t_0) = 1$, se găsește că mărimea amplitudinii perturbațiilor este mărginită superior în fiecare moment de următoarele valori:

*) Pentru elaborarea lucrării de față mi-au fost de un prețios ajutor cele cîteva convorbiri pe care le-am avut cu A. Halanay din cadrul Institutului de matematică al Academiei R.P.R.

pentru $j > 0$

$$|x_2| \leqslant |x_{20}| \sqrt{\frac{p_{420}}{\bar{p}_{42}(t)}} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt\right],$$
$$|x_4| \leqslant |x_{20}| \sqrt{\bar{p}_{420}} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt\right]; \tag{7.16}$$

pentru $j<0$

$$|x_2| \leqslant |x_{20}| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right],$$
$$|x_4| \leqslant |x_{20}| \sqrt{\bar{p}_{42}(t)} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right]; \tag{7.17}$$

pentru $j = 0$ *)

$$|x_2| \leqslant |x_{20}| \exp[p_{ii}(t - t_0)],$$
$$|x_4| \leqslant |x_{20}| \sqrt{\bar{p}_{42}} \exp[p_{ii}(t - t_0)], \tag{7.18}$$

unde în fiecare moment t, $(t_0 \leqslant t \leqslant t_f)$,

$$\Gamma(t) = \min\{-(p_{22} + q);\ p_{44}\}$$
$$A(t) = \min\{-p_{22};\ -(p_{44} - 9)\} \tag{7.19}$$
$$p_{ii} = \max\{p_{22};\ p_{44}\} = \text{const.}$$

§ 8. Compararea vitezelor de amortizare, neținînd seama de variația funcției $\sqrt{\bar{p}_{42}}$

Pentru a compara vitezele de amortizare în cele trei cazuri ($j > 0$, $j < 0$, $j = 0$), la început vom face abstracție de variația funcției $\sqrt{\bar{p}_{42}}$, deci, în esență, de variația în timp a raportului dintre lungimile semiaxelor elipsei ce delimitează domeniul perturbațiilor.

În această ipoteză, vom numi decrement instantaneu de amortizare al funcțiilor majorante $r_2(t)$ și $r_4(t)$ valoarea într-un moment t a funcțiilor $-\Gamma(t)$, $-A(t)$, sau p_{ii} avînd expresiile (7.19).

Să scriem mai explicit funcțiile care intră în parantezele din membrul al doilea al formulelor (7.19). Vom avea:

1) pentru $j > 0$ $(q > 0)$

$$-(p_{22} + q) \cong \bar{V}(c_y^{\alpha} + c_x)$$
$$-p_{44} = -\bar{V}^2(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}); \tag{8.1}$$

*) Riguros, în cazul $j=0$, viteza de amortizare este dată nu de exponențiala din formulele (7.18), ci, precum se știe, de $\exp\left[\frac{1}{2}(p_{22} + p_{44})(t-t_0)\right]$. Formulele (7.18) servesc pentru comparație cu cazurile cînd $j \neq 0$.

2) pentru $\bar{j} < 0$ $(q < 0)$

$$-p_{22} = \overline{V}(c_y^{\alpha} + c_x) + \frac{\bar{j}}{\overline{V}} \tag{8.1'}$$

$$-(p_{44} - q) \cong -\overline{V}^2(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) + \frac{\bar{j}}{\overline{V}};$$

3) pentru $\bar{j} = 0$ $(q = 0)$

$$|p_{22}| = \overline{V}(c_y^{\alpha} + c_x)$$

$$|p_{44}| = -\overline{V}^2(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}). \tag{8.1''}$$

De aici se vede imediat că marginea superioară a decrementului instantaneu de amortizare al funcţiilor r_2 şi r_4 creşte cu valoarea funcţiei $\overline{V}$, deci, pentru un avion dat *), cu viteza lui de zbor.

Pentru o valoare dată a lui $\overline{V}$, din confruntarea formulelor (8.1) (8.1') şi (8.1'') rezultă

$$\Gamma(t) \cong -p_{ii} \cong A(t) + \left|\frac{\bar{j}}{\overline{V}}\right| \tag{8.2}$$

sau, exprimat în cuvinte:

1°. Decrementul instantaneu de amortizare în cazul zborului accelerat este, într-o primă aproximaţie, independent de valoarea acceleraţiei şi egal cu cel pentru zborul uniform în regimul corespunzător aceleiaşi valori a funcţiei $\overline{V}$.

2°. Pentru zborul frînat decrementul instantaneu este mai mic decît cel pentru zborul cu viteza constantă sau accelerat cu o cantitate, care, pentru o valoare dată a lui $\overline{V}$, este direct proporţională cu modulul acceleraţiei **). Cu cît $\overline{V}$ este mai mare, efectul acceleraţiei negative $\bar{j}$ asupra decrementului instantaneu este mai puţin simţit.

Egalităţile (8.2) sînt valabile doar pentru aceeaşi valoare instantanee a vitezei de zbor în cazul celor trei evoluţii.

Pentru a putea compara vitezele de amortizare în cazul zborului accelerat şi al celui frînat într-un interval finit de timp considerăm că în cele două cazuri: 1° are loc aceeaşi lege de variaţie în timp a modulului acceleraţiei şi 2° la valori egale ale vitezei corespund valori absolute egale ale acceleraţiilor. Atunci acelaşi interval de viteze va fi parcurs (bineînţeles în sensuri contrarii) în acelaşi interval

*) În cazul unor avioane diferite, cu viteze maxime diferite, aceleiaşi valori a lui $\overline{V}$ îi corespund viteze de zbor diferite. Se poate întîmpla ca unei viteze V mai mari să-i corespundă o valoare mai mică a funcţiei adimensionale $\overline{V}$ şi deci o amortizare mai slabă a perturbaţiilor decît la un alt avion, avînd viteză maximă mai mică.

**) Şi în cazul acesta comparaţia se face între diversele regimuri de zbor ale aceluiaşi avion. În caz contrar nu s-ar putea vorbi de o proporţionalitate cu acceleraţia, ci doar cu funcţia adimensională $\bar{j}$, în expresia căreia intră şi viteza maximă a avionului, încărcarea pe m² de aripă, precum şi densitatea aerului la înălţimea de zbor.

de timp și curbele Γ și $A + \left|\frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right|$, în funcție de timp, vor fi simetrice.

Evident, dacă perturbația inițială are loc în cele trei cazuri ($j>0$, $j=0$, $j<0$) la aceeași valoare a parametrului $\bar{V}$ vom avea *)

$$\int_{t_0'}^{t_0'+\Delta t_0} \Gamma(t)\,dt > -p_{ii}\,\Delta t > \int_{t_0''}^{t_0''+\Delta t} \left[A(t) + \left|\frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right|\right] dt, \tag{8.3}$$

unde momentelor de timp t_0' respectiv t_0'', le corespunde aceeași valoare a parametrului $\bar{V}$, să spunem $\bar{V}_0$, iar $-p_{ii}$ este cea mai mică dintre valorile absolute ale coeficientului p_{22} și ale coeficientului p_{44}, pentru $\bar{V}=\bar{V}_0$ și $j=0$. Într-adevăr curbele Γ și $A + \left|\frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right|$ în funcție de timp fiind simetrice și întrucît curba $\Gamma(t)$ este crescătoare ($\bar{V}$ pentru $j>0$ fiind o funcție monoton crescătoare de timp), curba în funcție de timp a sumei $A + \left|\frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right|$ va fi descrescătoare.

Ținîndu-se seama și de faptul că în momentul inițial au loc egalitățile (8.2), rezultă imediat inegalitățile (8.3).

Deoarece

$$\int_{t_0''}^{t_0''+\Delta t} \left|\frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right| dt = -\int_{t_0''}^{t_0''+\Delta t} \frac{1}{\bar{V}}\frac{d\bar{V}}{dt}\,dt = \ln\frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_0-\Delta\bar{V}} = \ln\frac{V_0}{V_0-\Delta V},$$

*) Egalitatea $\Gamma = A + \left|\frac{\bar{j}}{\bar{V}}\right|$ se menține prin integrare dacă se iau drept limite niște valori t_0 și t_f ale variabilei independente pentru care

$$\bar{V}_0' = \bar{V}_f'' < \bar{V}_f' = \bar{V}_0'',$$

unde $[\bar{V}_0', \bar{V}_f']$ și $[\bar{V}_0'', \bar{V}_f'']$ sînt intervalele de viteză pentru $j>0$ și $j<0$ corespunzătoare intervalului de timp $[t_0, t_f]$ considerat. În acest caz, dacă notăm $\bar{V}_a = \bar{V}_0' = \bar{V}_f''$ și $\bar{V}_b = \bar{V}_f' = \bar{V}_0''$ vom avea

$$\frac{\exp\left[-\int_{t_0}^{t_f}\Gamma(t)\,dt\right]}{\exp\left[-\int_{t_0}^{t_f}A(t)\,dt\right]} = \frac{V_a}{V_b}.$$

Deci după un timp t_2-t_1, dacă facem abstracție de variația lui $\sqrt{p_{42}}$, raportul dintre marginile superioare ale perturbațiilor pentru $j>0$ și $j<0$ este egal cu raportul dintre vitezele neperturbate extreme $\frac{V_a}{V_b}$.

unde $0 < \Delta t \leqslant \min (t_f' - t_0'; t_f'' - t_0'')$ și $\Delta V > 0$, inegalitățile (8.3) se pot transcrie sub următoarea formă:

$$\int_{t_0''}^{t_0'' + \Delta t} A(t)\, dt < \int_{t_0'}^{t_0' + \Delta t} \Gamma(t)\, dt - \ln \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_0 - \Delta \overline{V}}$$

$$\int_{t_0''}^{t_0'' + \Delta t} A(t)\, dt < -p_{ii} \Delta t - \ln \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_0 - \Delta \overline{V}}, \tag{8.4}$$

$\overline{V}_0$ fiind valoarea funcției $\overline{V}$ pentru $t = t_0'$ în cazul zborului accelerat ($j > 0$) sau pentru $t = t_0''$ în cazul zborului frînat ($j < 0$). Se vede imediat că influența termenului $\ln \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_0 - \Delta \overline{V}}$ scade o dată cu creșterea lui $\overline{V}_0$ (a vitezei de zbor).

Efectul accelerației. Valoarea integralei definite

$$\int_{t_0'}^{t_0' + \Delta t} \Gamma(t)\, dt$$

depinde, evident, de accelerație. Într-adevăr fie două mișcări accelerate, care în momentul inițial au aceeași viteză ($V_{\mathrm{I}}(t_0) = V_{\mathrm{II}}(t_0)$). Dacă în momentele următoare între accelerațiile celor două mișcări are loc inegalitatea $\overline{j}_{\mathrm{I}}(t) < \overline{j}_{\mathrm{II}}(t)$ ($t > t_0$), atunci, se vede ușor, avem de asemenea

$$\int_{t_0}^{t} \Gamma_{\mathrm{I}}(t)\, dt < \int_{t_0}^{t} \Gamma_{\mathrm{II}}(t)\, dt. \tag{8.5}$$

Prin urmare, în cazul zborului accelerat, viteza de amortizare a lungimilor r_2 și r_4 (margini superioare ale amplitudinilor perturbațiilor) crește cu mărimea accelerației mișcării neperturbate.

Cu alte cuvinte, viteza de amortizare într-un moment dat t este cu atît mai mare, cu cît valorile accelerației mișcării de bază sînt mai mari în intervalul de timp premergător $[t_0, t]$.

Făcînd un raționament analog pentru cazul zborului frînat, rezultă că în cazul a două mișcări, pentru care este îndeplinită, în fiecare moment t din intervalul considerat $[t_0, t_0 + \Delta t]$, inegalitatea $j_{\mathrm{I}}(t) < \overline{j}_{\mathrm{II}}(t)$ sau $|\overline{j}_{\mathrm{I}}(t)| > |\overline{j}_{\mathrm{II}}(t)|$, avem de asemenea și

$$\int_{t_0}^{t} A_{\mathrm{I}}(t)\, dt + \ln \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_{\mathrm{I}}(t)} < \int_{t_0}^{t} A_{\mathrm{II}}(t)\, dt + \ln \frac{\overline{V}_0}{\overline{V}_{\mathrm{II}}(t)}$$

sau

$$\int_{t_0}^{t} A_{\mathrm{I}}(t)\, dt < \int_{t_0}^{t} A_{\mathrm{II}}(t)\, dt - \ln \frac{\overline{V}_{\mathrm{II}}(t)}{\overline{V}_{\mathrm{I}}(t)}, \tag{8.6}$$

unde, întrucît $\overline{V}_{\mathrm{I}}(t) < \overline{V}_{\mathrm{II}}(t)$, $\ln \frac{\overline{V}_{\mathrm{II}}(t)}{\overline{V}_{\mathrm{I}}(t)}$ este pozitiv.

De aici se vede că pentru zborul frînat viteza de amortizare a mărimilor r_2 r_4 într-un moment dat t este cu atît mai mică, cu cît valorile absolute ale accelerației mișcării neperturbate sînt mai mari în intervalul $[t_0, t]$. Efectul destabilizator al mărimii $|\overline{j}|$ apare pe de o parte la determinarea valorii sumei

$$\int_{t_0}^{t} A(t)dt + \ln \frac{\overline{V}_0}{V(t)},$$

iar, pe de altă parte la aceea a valorii funcției $\ln \dfrac{\overline{V}_{II}(t)}{V_I(t)}$.

În concluzie, atît pentru zborul accelerat, cît și pentru cel frînat viteza de amortizare a mărimilor r_2 și r_4, într-un moment dat t ($t_0 \leqslant t < t_f$) (făcînd abstracție de variația funcției $\sqrt{\overline{p}_{42}}$), crește cu valorile (algebrice) pe care le ia accelerația mișcării neperturbate în intervalul de timp premergător $[t_0, t]$. Se observă că pentru zborul frînat viteza de amortizare crește mai repede cu valorile (algebrice) ale accelerației, decît în cazul zborului accelerat (din cauza termenului logaritmic).

Efectul vitezei de zbor. Se vede ușor că, pentru valori date ale accelerațiilor, viteza de amortizare este cu atît mai mare, cu cît valorile parametrului $\overline{V}$ (ale vitezei centrului de greutate al avionului) în intervalul $[t_0, t]$ sînt mai mari. Într-adevăr s-a văzut că valorile integralelor definite $\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt$ și $\int_{t_0}^{t} \left| A(t) + \left| \dfrac{\overline{j}(t)}{V(t)} \right| \right| dt$ cresc o dată cu creșterea valorii în fiecare moment a parametrului $\overline{V}$ (vitezei de zbor). Deci pentru o lege de variație a accelerației dată, valoarea oricăreia dintre integralele definite de mai sus depinde de viteza inițială de zbor, și anume crește cu valoarea pentru $t = t_0$ a parametrului V. Se vede ușor că pentru valori date ale accelerației j ($j < 0$), valoarea în fiecare moment a funcției $A(t) = \min\left[\overline{V}\left(c_y^{\alpha} + c_x\right); -\overline{V}^2\left(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{z}}\right)\right] + \dfrac{\overline{j}}{V}$ (deci a vitezei de amortizare a mărimilor r_2, r_4, făcîndu-se abstracție de variația lui $\sqrt{\overline{p}_{42}}$) crește de asemenea cu $\overline{V}$, deci și cu V_0. Termenul $\dfrac{\overline{j}}{V}$ fiind negativ, se mai observă că efectul destabilizator (de micșorare a vitezei de amortizare) al accelerației $(\overline{j})$ scade cu creșterea lui $\overline{V}_0$.

§ 9. Influența variației funcției $\sqrt{\overline{p}_{42}}$

Funcția de timp $\overline{p}_{42}$ fiind crescătoare pentru $j > 0$ și descrescătoare pentru $j < 0$, se vede imediat că

$$r_2' = |x_{20}| \sqrt{\frac{\overline{p}_{420}}{\overline{p}_{42}'}} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt\right] \leqslant |x_{20}| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma(t)\,dt\right]$$

$$r_4'' = |x_{20}|\, |\sqrt{\overline{p}_{42}''} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right] \leqslant |x_{20}|\, \sqrt{\overline{p}_{420}} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right], \tag{9.1}$$

unde r_2' și $\overline{p}_{42}'$ se referă la cazul $j > 0$, iar r_4'' și $\overline{p}_{42}''$ la cazul $j < 0$.

Mărimile r_4' și r_2' (vezi (7.17) și (7.18)) fiind independente de $\overline{p}_{42}$, din inegalitățile (9.1) rezultă că viteza de amortizare a funcțiilor r_2 și r_4, ținîndu-se seama și de variația funcției $\sqrt{\overline{p}_{42}}$, este mai mare sau cel puțin egală cu aceea a funcțiilor exponențiale $\exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma\, dt\right]$, respectiv $\exp\left[-\int_{t_0}^{t} A\, dt\right]$ considerate mai sus.

O comparație între vitezele de amortizare, pentru cazurile $j>0$, $j<0$ și $j=0$, se poate face ușor în ceea ce privește funcția r_2 (marginea superioară a amplitudinii perturbației unghiului de incidență).

Într-adevăr, din inegalitățile (8.3) rezultă imediat considerînd $t_0' = t_0'' = t_0$,

$$\exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma\, dt\right] < \exp\left[p_{ii}\,(t-t_0)\right] < \frac{\overline{V}''}{\overline{V}_0} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A\, dt\right]. \qquad (9.2)$$

$\overline{V}''$ fiind valoarea funcției $\overline{V}$ în momentul t, în cazul zborului frînat. Se vede imediat că pentru orice $t > t_0$ avem $\dfrac{\overline{V}''}{\overline{V}_0} < 1$. Or, știind că:

$$r_2' = |x_{20}| \sqrt{\frac{\overline{p}_{420}}{\overline{p}_{42}'}} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma\, dt\right] \leqslant |x_{20}| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \Gamma\, dt\right]$$

$$r_2'' = |x_{20}| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} A\, dt\right]$$

$$r_{20} = |x_{20}| \exp\left[p_{ii}\,(t-t_0)\right]$$

rezultă inegalitățile

$$r_2'(t) < r_{20}(t) < r_2''(t). \qquad (9.3)$$

Inegalitățile (9.3) arată că fiind date trei mișcări de bază, — uniformă, accelerată și frînată, — care în momentul inițial t_0, au aceeași viteză V_0, iar legea de variație în timp a modulului accelerației pentru $j>0$ și $j<0$ este aceeași, dacă în momentul inițial $t=t_0$ apare o perturbație a parametrului α, aceeași în cele trei cazuri, atunci în orice moment $t>t_0$ marginea superioară a amplitudinii perturbației pentru mișcarea de bază accelerată este mai mică, iar pentru cea frînată mai mare decît cea în cazul zborului în regim permanent. Cu alte cuvinte, în condițiile amintite, viteza de amortizare a funcției r_2, în cazul mișcării de bază accelerate, este mai mare, iar în cazul celei frînate este mai mică decît viteza de amortizare a acestei funcții, cînd mișcarea neperturbată este uniformă.

Necunoscînd expresia analitică a coeficientului de stabilitate statică în funcție de viteza de zbor, comparația valorilor lungimii r_4 în cele trei cazuri nu se poate face analitic. Totuși se poate spune apriori că și în cazul funcției r_4, în general, viteza de amortizare pentru $j>0$ este mai mare decît pentru $j<0$.

К ВОПРОСУ О ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЕТА ПРИ САМЫХ НЕВЫГОДНЫХ УСЛОВИЯХ ПОЛЕТА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Составляются уравнения продольного возмущенного движения самолета в безразмерном виде для случая, когда траектория основного (невозмущенного) движения прямолинейна и горизонтальна. Для этого единицей (масштабом) для скоростей принимается максимальная скорость полета.

В начале рассматривается случай равномерного основного полета. Показывается, что в короткопериодическом этапе возмущенного движения самый невыгодный с точки зрения устойчивости случай полета соответствует минимальной скорости полета (при которой скорость затухания возмущений угла атаки и угловой скорости тангажа наименьшая).

Для длиннопериодического этапа возмущенного движения даны условия, исключающие возможность неколебательной (апериодической) неустойчивости и указывается нарушающее устойчивость влияние значений числа M, превосходящих критическое значение.

Далее рассматриваются случаи, когда основное движение самолета неустановившееся (разгон и торможение). Приводятся критерии устойчивости в этих случаях для короткопериодического этапа возмущенного движения, являющиеся достаточными условиями устойчивости. Приводимые критерии для различных случаев основного движения сравнимы между собой. С их помощью сравниваются случаи, когда невозмущенное движение равномерное, ускоренное или происходит с убывающей скоростью. При этом указывается, что при короткопериодическом возмущенном движении статически устойчивый самолет может терять динамическую устойчивость лишь при заторможенном невозмущенном движении. Для последнего случая дан приближенный способ определения верхней границы абсолютной величины тангенциального ускорения центра тяжести самолета, в зависимости от скорости полета, для которой обеспечено наличие динамической устойчивости.

Кроме того для случаев неустановившихся основных движений самолета даны оценки величин возмущений угла атаки и угловой скорости тангажа. Определяется также и скорость затухания некоторых мажорантных функций, ограничивающих сверху в любой момент времени амплитуды рассматриваемых возмущений. Полученные формулы сравнимы между собой. Их анализ показывает, что скорость затухания мажорантных функций, вообще возрастает при увеличении скорости основного полета, а также и алгебраического значения невозмущенного ускорения. Что касается функции, мажорантной для возмущения угла атаки, то далее указывается, что при торможении скорость затухания растет быстрее с алгебраическим значением ускорения, чем при разгоне.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ LONGITUDINALE DE L'AVION DANS LES ÉVOLUTIONS LES PLUS DÉFAVORABLES

(RÉSUMÉ)

On établit les équations du mouvement perturbé longitudinal de l'avion de forme adimensionnelle, pour les trajectoires du mouvement de base rectiligne, horizontal, en prenant comme unité pour les vitesses, le maximum de vitesse de vol de l'avion.

Pour commencer, on considère le cas où le mouvement de base est uniforme. On montre que, à l'étape à période courte du mouvement perturbé, le cas le plus défavorable au point de vue de la stabilité correspond au minimum de vitesse de vol (pour lequel l'amortissement des perturbations de l'angle d'incidence et de la vitesse angulaire de tangage est le plus lent).

Pour l'étape à période longue, on donne les conditions qui excluent la possibilité de l'instabilité non oscillatoire (apériodique) et l'on indique l'effet déstabilisateur des valeurs du nombre M supérieure à la valeur critique.

On considère ensuite les cas où le mouvement de base est varié (vol accéléré et freiné). On donne des critériums de stabilité pour ces cas, à l'étape à période courte du mouvement perturbé (conditions suffisantes de stabilité), critériums comparables entre eux. Partant de ces critériums, on compare les cas où le mouvement non perturbé est uniforme, accéléré et freiné et l'on montre qu'à l'étape à période courte, un avion statiquement stable peut être dynamiquement instable, seulement lorsque le mouvement de base est freiné. Pour ce cas, on donne un procédé approximatif de détermination des limites supérieures de la valeur absolue de l'accélération tangentielle, en fonction de la vitesse de vol, pour laquelle la stabilité est assurée.

On donne pour les mêmes cas (mouvements variés non permanents) des estimations quantitatives de l'amplitude des perturbations de l'angle d'incidence et de la vitesse angulaire de tangage. On détermine également les vitesses d'amortissement de certaines fonctions qui bornent supérieurement à chaque moment, les amplitudes de ces perturbations (fonctions majorantes en ce qui concerne l'amortissement). Les formules respectives sont comparables entre elles. Il résulte de leur analyse qu'en général la vitesse d'amortissement des fonctions majorantes croît avec la vitesse de vol, ainsi qu'avec la valeur algébrique de l'accélération non perturbée. En continuant, on montre que pour la majorante de la perturbation de l'angle d'incidence, l'augmentation de la vitesse d'amortissement avec la valeur algébrique de l'accélération est plus rapide dans le cas du vol freiné que dans celui du vol accéléré.

BIBLIOGRAFIE

1. I. V. Ostoslavski i G. S. Kalacev, *Prodolnaia ustoicivost i upravleaemost samoleta*. Oboronghiz, Moscova, 1951.
2. H. Glauert, *A Non-Dimensional Form of the Stability Equations of an Aeroplane*. A.R.C.R. & M., Londra, 1927, nr. 1093.
3. V. S. Vedrov, *Dinamiceskaia ustoicivost samoleta*. Oboronghiz, Moscova — Leningrad, 1938.
4. M. L. Mil, *Vozmuşcennoie dvijenie samoleta i vîbor stepeni pradolnoi staticescoi ustoicivosti*, TVF, 1945, nr. 7—8.
5. G.S. Kalacev, *O mere pradolnoi dinamicescoi ustoicivosti samoleta*. Tr. ŢAGHI, 1938, nr. 365.

6. A. M. Leapunov, *Obsceaia zadacea ob ustoicivosti dvijenia.* GITTL, Moscova, 1950.
7. T. Hacker, *O pradolnoi ustoicivosti neustanovivșcegosia dvijenia samoleta.* Moscova, 1954.
8. T. Hacker, *Un criteriu de stabilitate longitudinală a avionului în etapa cu perioadă scurtă, a mișcării perturbate pentru mișcările de bază nepermanente, orizontale și rectilinii.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 11, noiembrie 1955, p. 1635.
9. T. Hacker, *Evaluarea vitezei de amortizare a perturbațiilor în zbor rectiliniu orizontal cînd mișcarea de bază este nepermanentă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 12, decembrie 1955
10. A. Halanay, *Cîteva observații asupra stabilității asimptotice.* Rev. Univ. C. I. Parhon și Instit. Polit., București, 1955, nr. 9, p. 281.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

AEROMECANICĂ

PROBLEMA STABILITĂŢII ELICOPTERULUI CU ROTOR ANTRENAT PRIN JET ÎN ZBOR LA PUNCT FIX

DE

AL. MARINESCU

NOTAŢII

$0xyz$ = sistem de axe de coordonate legat de corpul elicopterului

R = raza rotorului

r = raza unui element de pală faţă de axul de rotaţie

l = distanţa rotorului faţă de pământ

h = distanţa centrului de greutate faţă de planul articulaţiilor

d = distanţa punctului neutru faţă de planul articulaţiilor

a = distanţa articulaţiilor faţă de axul de rotaţie

t_0 = profunzimea palei considerată constantă

μ = gradul de înaintare = viteza de înaintare / viteza periferică a palei

λ = grad de permeabilitate = viteza aerului paralelă cu axul rotorului / viteza periferică a palei

$x = \frac{r}{R}$

$\zeta = \frac{h}{R}$

z = numărul de pale

$\sigma = \frac{zt_0}{\pi R}$ = soliditatea rotorului

$B = 1 - \frac{t_0}{2R}$ = factor de scădere a portanţei la capătul palei

w_i = viteza indusă a rotorului

V_x, V_y, V_z = vitezele de translaţie ale elicopterului în direcţia axelor x, y, z

ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z = perturbaţiile vitezelor în direcţia axelor x, y, z

Ω_x, Ω_y, Ω_z = vitezele de rotaţie ale elicopterului în jurul axelor x, y, z

$\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, $\Delta\Omega_z$ = perturbaţiile vitezelor în jurul axelor x, y, z

ω_x, ω_y, ω_z = componentele vectorului vitezei unghiulare de-a lungul axelor x, y, z

ω = viteza unghiulară a rotorului (rotire spre dreapta)

ω_0 = frecvenţa proprie a palei (legată elastic)

$U = \omega R$ = viteza periferică a palei

$\xi\omega R$ = viteza aerului care lovește elementul de pală paralel cu axa rotorului

$\eta\omega R$ = viteza aerului care lovește elementul de pală în planul de rotație

R_l = forța rezultantă a rotorului

R_x, R_y, R_z = forțe aerodinamice în direcția axelor x, y, z

G_x, G_y, G_z = componentele greutății de-a lungul axelor x, y, z

M_x, M_y, M_z = momentele aerodinamice în jurul axelor x, y, z

M_s = momentul forțelor aerodinamice de pe pală în raport cu punctul $r=a$

M_g = momentul greutății palei în raport cu punctul $r=a$

φ_x, φ_y, φ_z = unghiurile de poziție a axelor x, y, z față de direcția verticalei

$\Delta\varphi_x$, $\Delta\varphi_y$, $\Delta\varphi_z$ = perturbații ale unghiurilor de poziție

θ_0 = unghiul de calaj al profilului palei (netorsionată)

i_r = unghiul total de incidență al profilului palei

$\beta = a_0 - a_1 \cos \Psi - b_1 \sin \Psi$ = unghiul de bătaie al palei

Ψ = unghiul azimuntal a palei măsurat dinspre înapoi

Ψ_r = unghiul față de direcția vitezei de înaintare sub care se atinge maximum unghiului de bătaie

C_a' = panta curbei de portanță a profilului palei

C_z = coeficientul de portanță al profilului palei

I_x, I_y, I_z = momente de inerție ale elicopterului față de axele x, y, z

I = momentul de inerție al palei față de un ax trecînd prin $r=a$

I_r = momentul polar de inerție al rotorului în raport cu punctul $r=0$

K = constanta de rigiditate a palei

$\gamma = \frac{\rho C_a' l_0 R^4}{I}$ = constanta masei palei

m_p = masa palei pe unitatea de lungime

ρ = densitatea

t = timpul

C_T = coeficientul de tracțiun al rotorului influențat de apropierea solului

C_{T_∞} = coeficient de tracțiune al rotorului neinfluențat de apropierea solului

I. INTRODUCERE

Problema stabilității elicopterului, care prezintă destule dificultăți, face, în prezent, obiectul a numeroase cercetări atît teoretice, cît și experimentale.

În lucrările publicate în acest domeniu este tratată de obicei problema stabilității longitudinale.

Deoarece separarea în două a problemei stabilității se face la elicoptere, spre deosebire de avioane, cu riscul unor aproximații care denaturează uneori realitatea, ne propunem, în lucrarea de față, a cerceta problema de ansamblu a stabilității elicopterului, bineînțeles cu anumite ipoteze simplificatoare menționate la locul potrivit.

Acest lucru îl facem pentru o clasă destul de largă de elicoptere și anume pentru acelea al căror rotor este antrenat prin jet, într-o evoluție cheie pentru stabilitate, aceea de zbor la punct fix.

Ca particularităţi constructive faţă de elicopterele clasice semnalăm că, obişnuit, palele rotorului pentru asemenea elicoptere se prind elastic de butuc şi cu toate că elasticitatea legăturilor este destul de redusă, ele au o mişcare de bătaie similară celor prinse articulat, bineînţeles mai restrînsă.

De asemenea nu mai este necesară elicea anticuplu, în schimb devine uneori necesară folosirea unui stabilizator vertical de coadă.

II. ECUAŢIILE GENERALE DE MIŞCARE ALE ELICOPTERULUI

a) Ecuaţiile mişcării neperturbate. Considerăm un elicopter (fig. 1) de care, cu originea în centrul său de greutate admitem rigid legat sistemul de axe $x\,0\,y\,z$.

Componentele tuturor mărimilor vectoriale, care intră în joc, vor fi înţelese deci de-a lungul acestor axe, care se mişcă o dată cu aerodina.

Fie $\overline{V}\,(V_x, V_y, V_z)$ viteza centrului de greutate al elicopterului şi $\overline{\Omega}\,(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ rotaţia sa instantanee, de a căror componente, după cum este ştiut, sînt funcţii reacţiunile aerodinamice.

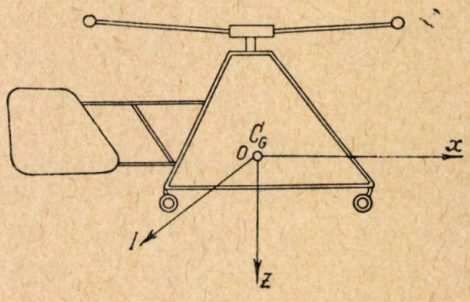


Fig. 1

Notăm cu $\overline{R}\,(R_x, R_y, R_z)$ rezultanta forţelor aerodinamice ce acţionează asupra elicopterului şi cu $\overline{M}\,(M_x, M_y, M_z)$ momentul rezultant.

Greutatea sa o însemnăm cu $\overline{G}\,(G_x, G_y, G_z)$.

Dacă $\overline{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ este acceleraţia unui element de masă dm, al cărui vector de poziţie este $\overline{\rho}'\,(xyz)$, ecuaţia vectorială a mişcării centrului de greutate este

$$\int \overline{a}\,dm = \overline{R} + \overline{G}, \tag{1}$$

iar acea a mişcării în jurul centrului de greutate introducînd şi contribuţia mişcării relative a rotorului prin derivata în raport cu timpul a momentului său cinetic $\overline{K}'$, este

$$\int (\overline{\rho}' \times \overline{a})\,dm + \frac{d\overline{K}'}{dt} = \overline{M}. \tag{2}$$

Cît priveşte mişcarea relativă a rotorului, pe care n-o putem neglija însemnînd prin $\overline{\omega}$ $\omega_x, \omega_y, \omega_z$) vectorul vitezei unghiulare a rotorului şi cu I_r momentul său polar de inerţie (rotorul considerat cu aproximaţie ca rigid) cel de al doilea termen din relaţia (2) îl putem scrie

$$\frac{d\overline{K}'}{dt} = I_r(\overline{\omega} \times \overline{\Omega}) + I_r \frac{d\overline{\omega}}{dt}. \tag{3}$$

Făcînd toate dezvoltările cunoscute din dinamica solidului, şi ţinînd seama că $I_{xy} = I_{yz} = 0$ ecuaţiile (1) şi (2) se scriu scalar

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{G}{g}\left(\frac{dV_x}{dt} + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y\right) = R_x + G_x,\\
&\frac{G}{g}\left(\frac{dV_y}{dt} + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z\right) = R_y + G_y,\\
&\frac{G}{g}\left(\frac{dV_z}{dt} + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x\right) = R_z + G_z,\\
&I_x \frac{d\Omega_x}{dt} + (I_y - I_z)\,\Omega_y\,\Omega_z - I_{zx}\left(\frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_x\,\Omega_y\right) +\\
&\qquad + I_r \frac{d\omega_x}{dt} + I_r\,(\omega_y\,\Omega_z - \omega_z\,\Omega_y) = M_x,\\
&I_y \frac{d\Omega_y}{dt} + (I_z - I_x)\,\Omega_z\,\Omega_x - I_{zx}\,(\Omega_z^2 - \Omega_x^2) +\\
&\qquad + I_r\,(\omega_z\,\Omega_x - \omega_x\,\Omega_z) + I_r \frac{d\omega_y}{dt} = M_y,\\
&I_z \frac{d\Omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\Omega_x\,\Omega_y - I_{zx}\left(\frac{d\Omega_x}{dt} - \Omega_y\,\Omega_z\right) +\\
&\qquad + I_r\,(\omega_x\,\Omega_y - \omega_y\,\Omega_x) + I_r \frac{d\omega_z}{dt} = M_z.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Asociem ecuaţiilor (4) ecuaţiile diferenţiale la care satisfac componentele greutăţii faţă de axele mobile

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dG_x}{dt} + \Omega_x G_z - \Omega_z G_y = 0,\\
&\frac{dG_y}{dt} + \Omega_z G_x - \Omega_x G_z = 0,\\
&\frac{dG_z}{dt} + \Omega_x G_y - \Omega_x G_x = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Facem următoarele ipoteze simplificatoare practic realizabile:

1) Direcția vectorului $\bar{\omega}$ este astfel că $\omega_x \sim 0$, $\omega_y \sim 0$ și $|\omega_z| = \omega$.

2) Viteza unghiulară ω este menținută constantă (regulator de turaj).

3) Printr-o orientare convenabilă a sistemului $xOyz$ momentul de inerție $I_{zx} \sim 0$.

Deoarece prin φ_x, φ_y, φ_z am notat unghiurile axelor x, y, z față de verticală, sistemul complet al ecuațiilor de mișcare ținînd seama de relația fundamentală

$$\cos^2 \varphi_x + \cos^2 \varphi_y + \cos^2 \varphi_z = 1$$

devine în forma normală

$$\begin{aligned}
\frac{dV_x}{dt} &= \frac{g}{G}(R_x + G\cos\varphi_x) + \Omega_z V_y - \Omega_y V_z = F_1(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{dV_y}{dt} &= \frac{g}{G}(R_x + G\cos\varphi_y) + \Omega_x V_z - \Omega_z V_x = F_2(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{dV_z}{dt} &= \frac{g}{G}(R_z + G\cos\varphi_z) + \Omega_y V_x - \Omega_x V_y = F_3(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{d\Omega_x}{dt} &= \frac{M_x}{I_x} + \frac{I_z - I_y}{I_x}\Omega_y\Omega_z + \frac{I_r}{I_x}\omega_z\Omega_y = F_4(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{d\Omega_y}{dt} &= \frac{M_x}{I_y} + \frac{I_x - I_z}{I_y}\Omega_z\Omega_x - \frac{I_r}{I_y}\omega_x\Omega_y = F_5(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{d\Omega_z}{dt} &= \frac{M_z}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z}\Omega_x\Omega_y = F_6(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{d\varphi_x}{dt} &= \frac{\Omega_y\cos\varphi_z - \Omega_z\cos\varphi_y}{\sin\varphi_x} = F_7(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y)\\
\frac{d\varphi_y}{dt} &= \frac{\Omega_z\cos\varphi_x - \Omega_x\cos\varphi_z}{\sin\varphi_y} = F_8(V_x \ldots \Omega_x \ldots \varphi_y).
\end{aligned} \tag{6}$$

Am obținut un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi față de mărimile V_x, V_y, V_z, Ω_x, Ω_y, Ω_z, φ_x, φ_y, pe care, pentru un sistem de condiții inițiale, le obținem ca funcții de t, ca funcții ce descriu una din mișcările posibile ale aerodinei.

b) *Ecuațiile mișcării perturbate.* Deoarece funcțiile $F_1, F_2, \ldots, F_8$ sînt presupuse dezvoltate în serie Taylor în jurul punctului de regim, sîntem conduși la sistemul

de ecuaţii diferenţiale al mişcării perturbate pe care îl reţinem în primă aproximaţie sub forma

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta V_x}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_1}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta V_y}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_2}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta V_z}{dt} &= \frac{\partial F_3}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_3}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_3}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta \Omega_x}{dt} &= \frac{\partial F_4}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_4}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_4}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta \Omega_y}{dt} &= \frac{\partial F_5}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_5}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_5}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta \Omega_z}{dt} &= \frac{\partial F_6}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_6}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_6}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta \varphi_x}{dt} &= \frac{\partial F_7}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_7}{\partial V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_7}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y \\
\frac{d\Delta \varphi_y}{dt} &= \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_x}\Delta V_x + \frac{\partial F_8}{\partial \Delta V_y}\Delta V_y + \ldots + \frac{\partial F_8}{\partial \Delta \varphi_y}\Delta \varphi_y .
\end{aligned} \tag{7}$$

Pentru a calcula derivatele parţiale care intervin în (7) trebuie mai întîi să determinăm funcţiile $F_1, F_2, \ldots, F_8$.

Prima şi cea mai importantă etapă în determinarea acestor funcţii ale căror derivate ne sînt necesare, este aceea a determinării reacţiunilor aerodinamice $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$.

Regimul de zbor de care ne ocupăm este definit de

$$\begin{aligned}
&V_x = 0 \qquad V_y = 0 \qquad V_z = 0 \\
&\Omega_x = 0 \qquad \Omega_y = 0 \qquad \Omega_z = 0 \\
&\varphi_x = \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_y = \frac{\pi}{2} .
\end{aligned} \tag{8}$$

În condiţiile zborului perturbat, elicopterul se deplasează cu vitezele ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z în direcţiile x, y, z, se roteşte cu vitezele unghiulare $\Delta \Omega_x$, $\Delta \Omega_y$, $\Delta \Omega_z$ în jurul axelor x, y, z şi se depărtează cu unghiurile $\Delta \varphi x$, $\Delta \varphi y$, faţă de poziţia unghiulară de regim.

În funcţie de perturbaţiile vitezelor va trebui să determinăm reacţiunile aerodinamice amintite mai sus datorite în speţă rotorului, deoarece cele datorite ampenajului probabil existent se neglijează, întrucît acesta se află de obicei în afara suflului rotorului.

De asemenea, rezistenţele pasive se neglijează, căci intervin în expresiile lor, ca factori, perturbaţiile vitezelor la patrat.

Reacțiunile aerodinamice pe rotor (presupunînd că acesta se adaptează instantaneu la situația de zbor) le vom calcula în funcție de caracteristicile de bătaie ale palei, căci prin fixarea elastică a acesteia de butuc mișcarea de bătaie este restrînsă, dar nu exclusă.

De aceea nu am adoptat metoda de calcul recomandată la elice complet rigide.

Asimilînd legătura elastică a palei cu o articulație și un resort de constantă elastică K (fig. 2), unghiul de bătaie satisface ecuația diferențială [1]

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{K}{I}\beta + \omega^2\beta = \frac{M_s}{I} - \frac{M_g}{I}. \tag{9}$$

Punînd

$$\beta = a_0 - a_1 \cos\psi - b_1 \sin\psi \tag{10}$$

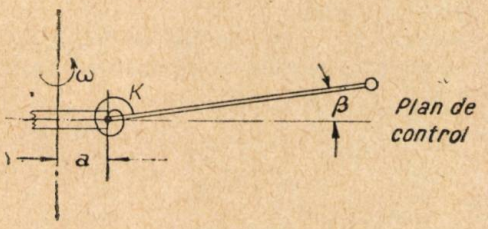


Fig. 2

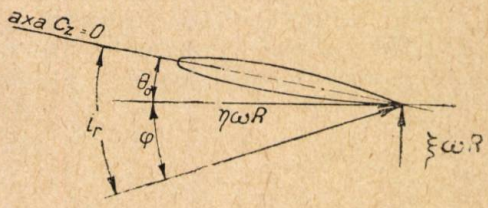


Fig. 3

și observînd figura 3 pentru elementul de pală

$$M_s \simeq \int_0^{BR} \frac{\rho}{2} t_0 \eta^2 \omega^2 R^2 C_z r\, dr = \frac{1}{2}\rho t_0 \omega^2 R^4 C_a' \int_0^B \eta^2 \left(\theta_0 + \frac{\xi}{\eta}\right) x\, dx. \tag{11}$$

Pe de altă parte [1],

$$M_s = \frac{\rho}{2} t_0 \omega^2 R^4 C_a' \left(a_0^* + a_1^* \cos\psi + b_1^* \sin\psi\right). \tag{12}$$

Din (11) și (12) rezultă, neglijînd lovirea dinspre spate a palei de către curentul de aer,

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B (\theta_0\eta^2 + \xi\eta)\, x\, dx\, d\psi, \\ a_1^* &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B (\theta_0\eta^2 + \xi\eta)\cos\psi\, x\, dx\, d\psi, \\ b_1^* &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^B (\theta_0\eta^2 + \xi\eta)\sin\psi\, x\, dx\, d\psi. \end{aligned} \tag{13}$$

Dacă notăm

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I}, \quad \Omega_0^2 = \omega^2 + \omega_0^2 \text{ și } \gamma = \frac{\rho C_a' t_0 R^4}{I},$$

prin identificare scoatem din (9)

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{\gamma}{2\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)} a_0^* - \frac{M_g}{I\Omega_0^2}, \\ a_1 &= -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} a_1^*, \\ b_1 &= -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{\gamma}{2} b_1^*. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Sistemul (14) va trebui rezolvat în două cazuri și anume:

1) Cînd elicopterul se deplasează în direcțiile x și y cu vitezele de translație ΔV_x, ΔV_y, planul de control fiind considerat aproape paralel cu planul xOy, vom avea pentru elementul de pală în expresiile (13)

$$\eta_{x,y} = x + \left(\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right) \sin\psi,$$

$$\xi_{x,y} = \lambda - \frac{x}{\omega}\frac{d\beta}{dt} - \left(\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right)\beta\cos\psi. \tag{15}$$

2) Cînd elicopterul se rotește în jurul centrului de greutate cu vitezele unghiulare $\Delta\Omega_x$, $\Delta\Omega_y$, rotorul se află în rototranslație, astfel că pentru acest caz

$$\eta_{x,y} = x + \zeta\left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right)\sin\psi, \tag{16}$$

$$\xi_{x,y} = \lambda - \frac{x}{\omega}\frac{d\beta}{dt} - \zeta\left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right)\beta\cos\psi - \left(\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right)x\cos\psi,$$

unde $\zeta = \frac{h}{R}$.

Soluțiile sistemului (14) în cazul 1) vor fi respectiv a_{1x}, a_{1y}, b_{1x}, b_{1y}, în cazul 2) a_{1x}', a_{1y}', b_{1x}', b_{1y}', iar conicitatea a_0 va fi aceeași în ambele cazuri. Mai jos dăm aceste expresii calculate gata

$$a_{0x} = a_{0y} = a_{0x}' = a_{0y}' = a_0 = \eta\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right),$$

$$\begin{aligned}
(a_{1x}, a_{1y}) &= \frac{1}{q}\left\{mn\frac{B^3}{3}\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right) + \frac{1}{6}\theta_0 B^7 + \frac{1}{8}\lambda B^6\right\}\cdot\left\{\frac{\Delta V_x}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right\}, \\
(b_{1x}, b_{1y}) &= \frac{1}{q}\left\{-m\left(\frac{2}{3}\theta_0 B^2 + \frac{\lambda}{2}B^2\right) + \frac{1}{12}B^7 n\left(\frac{\lambda}{3}B^3 + \frac{\theta_0}{4}B^4\right)\right\}\cdot\left\{\frac{\Delta V_n}{U}, \frac{\Delta V_y}{U}\right\}, \\
(a_{1x}', a_{1y}') &= \frac{1}{q}\left\{\frac{B^4}{4}\left(\frac{2}{3}B^3\zeta\theta_0 + \frac{B^2}{2}\zeta\lambda\right) + m\left(\frac{B^3}{3}\zeta a_0 + \frac{B^4}{4}\right)\right\}\cdot\left\{\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}, \\
(b_{1x}', b_{1y}') &= \frac{1}{q}\left\{\frac{B^4}{4}\left(\frac{B^3}{3}\zeta a_0 + \frac{B^4}{4}\right) - m\left(\frac{2}{3}B^3\zeta\theta_0 + \frac{B^2}{2}\zeta\lambda\right)\right\}\cdot\left\{\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, \frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

unde

$$\eta = \frac{\gamma}{2\left(1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\,;\; m = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\frac{2}{\gamma}\,;\; q = m^2 + \frac{B^8}{16}\,.$$

Reacțiunile aerodinamice, după cum vom arăta mai jos, pot fi ușor exprimate în funcție de coeficienții a_1, b_1, ele conținînd perturbațiile la puterea întîia ca factori. Astfel avem dintr-odată derivatele parțiale ale funcțiilor F_1, $F_2, \ldots, F_8$, fără a le mai calcula propriu-zis.

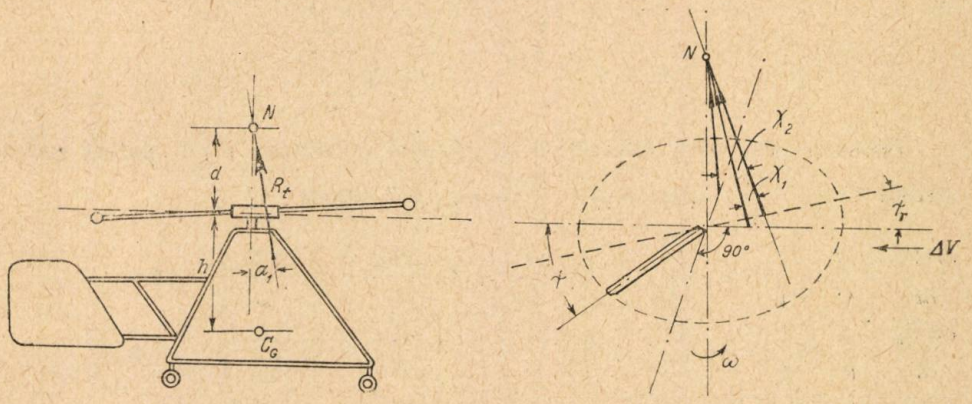
Pentru aceasta, presupunînd că rezultanta tuturor forțelor acționînd pe o pală se găsește aproximativ în lungul ei [2] și considerînd-o aproape egală cu forța centrifugă, proiectînd pe direcția axului de rotație și făcînd o integrală medie, avem forța rezultantă pe rotor.

$$R_t = \frac{z}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \omega^2\beta\, m_p r\, dr\, d\psi = Z\,\omega^2\, M_p\, a_0\,, \tag{18}$$

unde

$$M_p = \int_0^R m_p\, r\, d\, r.$$

Lucrurile stau ca și cum R_t ar fi cuprinsă într-un plan ce face unghiul ψ_r cu direcția vitezei de înaintare și trecînd într-un punct N de pe axa de rotație, la distanța $d \sim \frac{a}{2\,a_0}$ (fig. 4, *a*, *b*), avînd în acest fel și o imagine asupra momentelor ei.



a *b*

Fig. 4

Din figura 4, *b* vedem că rezultanta R_t face unghiurile χ_1 și χ_2, respectiv, cu planele conținînd direcția vitezei și axul de rotație și cel perpendicular pe *ax*.

Coeficienții a_1, b_1, după cum lesne putem constata, nu sînt altceva decît înclinările proiecțiilor rezultantei R_t, pe cele două plane față de axul de rotație *).

*) Mai exact, față de axa de comandă a rotorului, însă unghiul acesteia cu axa de rotație este foarte mic la punct fix.

Făcînd, din cauza unghiurilor mici, χ_1, χ_2, $\cos\chi_1 \sim 1$, $\cos\chi_2 \sim 1$, avem

$$\left.\begin{aligned} R_x &= R_t\{-a_{1x}+a'_{1x}-b_{1y}-b'_{1y}\},\\ R_y &= R_t\{-a_{1y}-a'_{1y}+b_{1x}-b'_{1x}\},\\ M_x &= R_t(h+d)\{-a_{1y}-a'_{1y}+b_{1x}-b'_{1x}\},\\ M_y &= R_t(h+d)\{a_{1x}-a'_{1x}+b_{1y}+b'_{1y}\}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Perturbația $\Delta\Omega_z$ nu introduce forțe pe rotor, deoarece este mult prea mică față de ω.

Cît privește perturbația ΔV_z, ea produce o creștere a unghiului de incidență al palei cu $\frac{\Delta V_z}{U}$ și creșterea corespunzătoare a reacțiunii aerodinamice este (deoarece z este în jos) $-B'\dfrac{\gamma}{2\left(1+\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}\cdot\dfrac{\Delta V_z}{U}$. Ea va fi de forma $\Delta V_z = A\,e^{-\lambda t}$ și avem deci în direcția z o amortizare aperiodică.

De asemenea ampenajul de coadă (în cazul cînd există) fiind de obicei în afara suflului rotorului nu introduce reacțiuni sensibile.

Ținînd seama de expresiile (17) și notînd pentru prescurtare

$$\begin{aligned} a_{1x} &= K_1\frac{\Delta V_x}{U}, & a_{1y} &= K_1\frac{\Delta V_y}{U},\\ b_{1x} &= K_2\frac{\Delta V_x}{U}, & b_{1y} &= K_2\frac{\Delta V_y}{U},\\ a'_{1x} &= K'_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, & a'_{1y} &= K'_1\frac{\Delta\Omega_x}{\omega},\\ b'_{1x} &= K'_2\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}, & b'_{1y} &= K'_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}. \end{aligned} \tag{20}$$

Sistemul de ecuații diferențiale al mișcării perturbate (7) îl putem reduce scriind că $\varphi_x = \frac{\pi}{2}+\Delta\varphi_y$, $\varphi_y = \frac{\pi}{2}-\Delta\varphi_x$ sub forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Delta V_x}{dt} &= \frac{g}{G}R_t\left\{-K_1\frac{\Delta V_x}{U}-K_2\frac{\Delta V_y}{U}+K'_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}-K'_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}-g\Delta\varphi_y,\\ \frac{d\Delta V_y}{dt} &= \frac{g}{G}R_t\left\{-K_1\frac{\Delta V_y}{U}+K_2\frac{\Delta V_x}{U}-K'_1\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}-K'_2\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right\}+g\Delta\varphi_x,\\ \frac{d\Delta\Omega_x}{dt} &= \frac{(h+d)R_t}{I_x}\left\{-K_1\frac{\Delta V_y}{U}+K_2\frac{\Delta V_x}{U}-K'_1\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}-K'_2\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}\right\}+\frac{I_r}{I_x}\omega\Delta\Omega_y,\\ \frac{d\Delta\Omega_y}{dt} &= \frac{(h+d)R_t}{I_y}\left\{K_1\frac{\Delta V_x}{U}+K_2\frac{\Delta V_y}{U}-K'_1\frac{\Delta\Omega_y}{\omega}+K'_2\frac{\Delta\Omega_x}{\omega}\right\}-\frac{I_r}{I_y}\omega\Delta\Omega_x,\\ \frac{d\Delta\varphi_y}{dt} &= \Delta\Omega_y,\\ \frac{d\Delta\varphi_x}{dt} &= \Delta\Omega_x. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Introducem următoarele notații adimensionale

$$\frac{\Delta V_x}{U} = \Delta \overline{V}_x; \quad \frac{\Delta V_y}{U} = \Delta \overline{V}_y; \quad \frac{\Delta \Omega_x}{\omega} = \Delta \overline{\Omega}_x; \quad \frac{\Delta \Omega_y}{\omega} = \Delta \overline{\Omega}_y;$$

$$\overline{t} = \frac{g}{U} t; \quad \overline{I}_x = \frac{gI_x}{GR^2}; \quad \overline{I}_y = \frac{gI_y}{GR^2}; \quad \frac{U\omega}{g} = \sigma.$$

Sistemul (21) devine

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta \overline{V}_x}{d\overline{t}} &= -\alpha_1 \Delta \overline{V}_x - \alpha_2 \Delta \overline{V}_y + \alpha_3 \Delta \overline{\Omega}_y - \alpha_4 \Delta \overline{\Omega}_x - \Delta \overline{\varphi}_y, \\
\frac{d\Delta \overline{V}_y}{d\overline{t}} &= -\alpha_1 \Delta \overline{V}_y + \alpha_2 \Delta \overline{V}_x - \alpha_3 \Delta \overline{\Omega}_x - \alpha_4 \Delta \overline{\Omega}_x + \Delta \overline{\varphi}_x, \\
\frac{d\Delta \overline{\Omega}_x}{d\overline{t}} &= -\beta_1 \Delta \overline{V}_y + \beta_2 \Delta \overline{V}_x - \beta_3 \Delta \overline{\Omega}_x - \beta_4 \Delta \overline{\Omega}_y + \beta_5 \Delta \overline{\Omega}_y, \\
\frac{d\Delta \overline{\Omega}_y}{d\overline{t}} &= \beta_1' \Delta \overline{V}_x + \beta_2' \Delta \overline{V}_y - \beta_3' \Delta \overline{\Omega}_y + \beta_4' \Delta \overline{\Omega}_x - \beta_5' \Delta \overline{\Omega}_x, \\
\frac{d\Delta \overline{\varphi}_x}{d\overline{t}} &= \sigma \Delta \overline{\Omega}_x, \\
\frac{d\Delta \overline{\varphi}_y}{d\overline{t}} &= \sigma \Delta \overline{\Omega}_y,
\end{aligned} \tag{22}$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{R_t}{G} K_1; \quad \alpha_2 = \frac{R_t}{G} K_2; \quad \alpha_3 = \frac{R_t}{G} K_1'; \quad \alpha_4 = \frac{R_t}{G} K_2';$$

$$\begin{aligned}
(\beta_1, \beta_1') &= \frac{U(h+d)R_t}{(\overline{I}_x, \overline{I}_y) GR^2 \omega} K_1; \quad (\beta_2, \beta_2') = \frac{U(h+d)R_t}{(\overline{I}_x, \overline{I}_y) GR^2 \omega} K_2; \\
(\beta_3, \beta_3') &= \frac{U(h+d)R_t}{(\overline{I}_x, \overline{I}_y) GR^2 \omega} K_1'; \quad (\beta_4, \beta_4') = \frac{U(h+d)R_t}{(\overline{I}_x, \overline{I}_y) GR^2 \omega} K_2';
\end{aligned} \tag{23}$$

$$(\beta_5, \beta_5') = \frac{I_r}{(I_x I_y)} \sigma.$$

Spre a evita dificultățile pe care le ridică ecuația caracteristică a sistemului (22) vom presupune, mai ales pentru cazul construcțiilor fără ampenaj de coadă, că $I_x \sim I_y$ prin acesta nefăcînd erori mari.

În acest caz $\beta_1 = \beta_1'$; $\beta_2 = \beta_2'$ etc. și făcînd schimbarea obișnuită de variabilă utilizată la elici de Schiippe și Dietrich [3]

$$\begin{aligned}
u &= \Delta \overline{V}_x + i \Delta \overline{V}_y, \\
v &= \Delta \overline{\Omega}_x + i \Delta \overline{\Omega}_y, \\
w &= \Delta \overline{\varphi}_x + i \Delta \overline{\varphi}_y,
\end{aligned} \tag{24}$$

după ce înmulțim cu i cea de a doua ecuație a sistemului (22) adunînd-o la prima, și procedînd la fel cu a patra și a treia precum și cu a șasea și a cincea ecuație, obținem sistemul

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= (-\alpha_1 + i\alpha_2)u - (i\alpha_3 + \alpha_4)v + iw,\\ \frac{dv}{dt} &= (i\beta_1 + \beta_2)u + (-\beta_3 + i\beta_4 - i\beta_5)v,\\ \frac{dw}{dt} &= \sigma v.\end{aligned} \tag{25}$$

III. ECUAȚIA CARACTERISTICĂ, SOLUȚIILE EI

Cu substituția obișnuită

$$u = u_0 e^{\Lambda t}, \quad v = v_0 e^{\Lambda t}, \quad w = w_0 e^{\Lambda t}$$

obținem sistemul algebric liniar față de u_0, v_0, w_0,

$$\begin{aligned}\{\Lambda + (\alpha_1 - i\alpha_2)\}u_0 + (i\alpha_3 + \alpha_4)v_0 - i w_0 &= 0,\\ -(i\beta_1 + \beta_2)u_0 + \{(\beta_3 - i\beta_4 + i\beta_5) + \Lambda\}v_0 &= 0,\\ -\sigma v_0 + \Lambda w_0 &= 0,\end{aligned} \tag{26}$$

a cărui condiție de compatibilitate ne dă ecuația caracteristică

$$\Lambda^3 + A_1\Lambda^2 + A_2\Lambda + A_3 = 0, \tag{27}$$

unde

$$A_1 = \alpha_1 + \beta_3 - i(\alpha_2 + \beta_4 - \beta_5),$$

$$A_2 = \alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2 + i(\alpha_4\beta_1 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_1\beta_4),$$

$$A_3 = -i\sigma(\beta_2 + i\beta_1).$$

Lăsînd la o parte aspectul calitativ al stabilității pe care ni-l oferă criteriile de stabilitate, o imagine completă asupra stabilității o putem obține prin examinarea rădăcinilor ecuației caracteristice (27).

Urmînd metoda lui Cardan, să facem substituția

$$\Lambda = X - \frac{A_1}{3}, \tag{28}$$

cu care ecuația (27) devine

$$X^3 + pX + q = 0. \tag{29}$$

Considerăm expresiile

$$\delta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{30}$$

$$\delta' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

unde

$$p = \alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2 + i(\alpha_4\beta_1 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_1\beta_4) - \frac{1}{3}[\alpha_1 + \beta_3 - i(\alpha_2 + \beta_4 - \beta_5)]^2$$

$$q = -i\sigma(\beta_2 + i\beta_1) + \frac{2}{27}[\alpha_1 + \beta_2 - i(\alpha_2 + \beta_4 - \beta_5)]^3 - \frac{1}{3}[\alpha_1 + \beta_3 - i(\alpha_2 + \beta_4 - \beta_5)][\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2 + i(\alpha_4\beta_1 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_1\beta_4)].$$

Dacă δ_1 este una dintre cele trei valori ale radicalului alte două valori se obţin prin înmulţirea ei cu rădăcinile cubice ale unităţii

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{31}$$

De asemenea dacă δ_1' este valoarea corespunzătoare lui δ_1, în baza relaţiei [4]

$$\delta_1\,\delta_1' = -\frac{p}{3}, \tag{32}$$

se pot obţine alte două valori la fel ca mai sus prin înmulţirea ei cu rădăcinile cubice ale unităţii.

Se obţin în definitiv cele trei valori ale rădăcinilor ecuaţiei (27)

$$\Lambda_1 = \delta_1 + \delta_1',$$
$$\Lambda_2 = \delta_1\,\varepsilon_1 + \delta_1'\,\varepsilon_2, \tag{33}$$
$$\Lambda_3 = \delta_1\,\varepsilon_2 + \delta_1'\,\varepsilon_1,$$

care ne dau frecvenţele şi amortizările mişcării perturbate.

IV. CONCLUZII

Cele spuse mai sus pentru elicoptere cu rotor avînd pale prinse aproape rigid pe butuc, se poate extinde oarecum şi la cele cu pale articulate.

Reacţiunile aerodinamice (forţe şi momente) se obţin absolut la fel avînd grija de a face în expresiile (17) ale coeficienţilor mişcării de bătaie $\frac{\omega_0}{\omega} = 0$.

În ce priveşte momentele giroscopice, în jurul axelor x şi y, ele se vor înlocui în a treia şi a patra relaţie a sistemului (21) respectiv cu [5]

$$-h\,R_t\frac{8}{\gamma}\cdot\frac{\Delta\,\Omega_x}{\omega}$$
$$-h\,R_t\frac{8}{\gamma}\cdot\frac{\Delta\,\Omega_y}{\omega},$$

valabile pentru rotor cu pale articulate.

După cum, lesne de altfel, se poate constata, gradul de permeabilitate λ rămîne la valori apropiate de cea corespunzătoare regimului de punct fix, pentru care avem $\lambda \sim -\frac{1}{2}\sqrt{C_T}$.

În aceste condiţii punînd

$$C_T = C_{T_\infty} \cdot f\left(\frac{l}{R}\right),$$

unde $f\left(\frac{l}{R}\right) = 1$ pentru $\left(\frac{l}{R}\right) = \infty$ şi care poate fi aproximată analitic din date experimentale, avem posibilitatea de a cerceta şi influenţa solului, care este destul de importantă.

Departe de a fi complet riguroasă, dar totuşi considerîndu-se parametrii cei mai importanţi care intră în joc, metoda descrisă dă unele indicaţii preţioase în cercetarea stabilităţii elicopterului care zboară la punct fix.

ВОПРОС ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРТОЛЕТА С РОТОРОМ, ПРИВОДИМЫМ В ДЕЙСТВИЕ ПОСРЕДСТВОМ СТРУИ В ВИСЯЧЕМ ПОЛЕТЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе рассматривается вопрос об общей динамической устойчивости вертолета с ротором, действующим посредством струи в висячем полете.

Исходят от общих уравнений невозмущенного движения, после чего определяются уравнения возмущенного движения.

На основании упрощенных гипотез, было выведено характеристическое комплексное уравнение третьей степени системы дифференциальных уравнений возмущенного движения, решение которых на основе формул Кардана дают затухание и частоты возмущенного движения.

LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ DE L'HÉLICOPTÈRE À ROTOR ENTRAÎNÉ PAR JET EN VOL EN UN POINT FIXE

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, on étudie la stabilité dynamique globale de l'hélicoptère à rotor, entraîné par jet, pendant le vol en un point fixe.

Le point de départ de cette étude a été celui des équations générales du mouvement non perturbé, après quoi on a établi les équations du mouvement perturbé.

Par suite des hypothèses simplificatrices, on est arrivé à une équation caractéristique complexe du troisième degré du système d'équations différentielles du mouvement perturbé dont les solutions, à l'aide des formules de Cardan, donnent les amortissements et les fréquences du mouvement perturbé.

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Marinescu, *Aerodinamica rotorului cu pale rigide de elicopter*. Revista Transporturilor, nr. 12, București, 1955.
2. W. Just, *Au sujet de la stabilité des hélicoptères*. Interavia, decembrie 1946, p. 12–18.
3. B. Schlippe și R. Dietrich, *Zur Stabilität der Hubschrauber*. Deutsche Academie der Luftfahrtforschunf, 1939, p. 15–16.
4. A. G. Kuroș, *Curs vîșșei alghebrî*. Goestihzdat, Moscova, 1952.
5. K. Hohenenser, *A Type of Lifting Rotor with Inherent Stability*. J.A.S., septembrie 1950, p. 563–564.
6. V. Vîlcovici, *Mecanica rațională*. Curs litografiat la Univ. C. I. Parhon, București, 1951, p. 403–414.
7. M. Roy, *Mecanique de l'aviation*. Paris, 1932–1933, p. 10–50.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

AEROMECANICĂ

CONTRIBUŢII LA STUDIUL COEFICIENTULUI DE UMPLERE AL PULSOREACTOARELOR

DE

GH. RADO

Prezentul studiu se bazează principial pe studiul întreprins de M. M. Maslenikov asupra coeficientului de umplere al motoarelor cu piston pentru aviaţie [1] *).

Se ştie că prin coeficientul de umplere se înţelege raportul dintre greutatea G a aerului, care umple efectiv camera de ardere la sfîrşitul admisiei, şi greutatea G_t a aerului, care, teoretic, poate intra în camera de ardere:

$$\eta_u = \frac{G}{G_t}. \tag{1}$$

Dacă volumul camerei de ardere este V, iar greutatea specifică a aerului la presiunea p_0 şi temperatura T_0 este γ_0 atunci

$$G_t = \gamma_0 V. \tag{2}$$

Pentru determinarea teoretică a coeficientului de umplere, am plecat de la bilanţul energetic scris pentru admisie. În mod analog ca şi la motoarele cu piston şi în cazul pulsoreactorului se poate neglija influenţa combustibilului asupra coeficientului de umplere şi se poate considera că în camera de ardere intră numai aer. De asemenea, am neglijat variaţia energiei cinetice a aerului la examinarea bilanţului energetic la admisie.

Admiţînd aceste ipoteze simplificatoare, bilanţul energetic al pulsoreactorului, în perioada de admisie, se poate scrie

$$U + U_r + AL_t + \Delta Q = U_a + L_{ad}, \tag{3}$$

relaţie în care U este energia internă a aerului admis, la starea lui iniţială; U_r, energia internă a gazelor rămase, la începutul admisiei; U_a, energia internă a amestecului de aer şi gaze rămase, la sfîrşitul admisiei; L_t, lucrul mecanic de trecere (de trasvazare) a aerului în camera de ardere, la starea lui iniţială; L_{ad}, lucrul mecanic

*) vol. I.

cedat maselor de gaze în timpul admisiei; ΔQ, cantitatea de căldură primită de aerul admis de la pereții camerei de ardere; A, echivalentul termic al lucrului mecanic.

Dacă se notează cu:

c_v = căldura specifică, la volum constant, a aerului admis;
G = greutatea aerului admis;
T_0 = temperatura inițială a aerului admis;
C_{vr} = căldura specifică, la volum constant, a gazelor rămase;
G_r = greutatea gazelor rămase în camera de ardere;
T_r = temperatura gazelor rămase, la începutul admisiei;
c_{va} = căldura specifică, la volum constant, a gazelor din camera de ardere, la sfîrșitul admisiei;
$G_a = G + G_r$ = greutatea gazelor din camera de ardere, la sfîrșitul admisiei;
T_a = temperatura gazelor din camera de ardere, la sfîrșitul admisiei;
c_p = căldura specifică, la presiune constantă, a aerului admis,

putem scrie cunoscuta relație din termodinamică

$$\begin{aligned} U &= c_v G T_0, \\ U_r &= c_{vr} G_r T_r, \\ U_a &= c_{va} G_a T_a. \end{aligned} \tag{4}$$

De asemenea se poate scrie

$$L_t = p_0 V \eta_u = \frac{G}{\gamma_0} p_0, \tag{5}$$

iar dacă considerăm că $\frac{G}{G_t} \approx \frac{V_{ef}}{V}$

$$L_{ad} = - V p_{m.ad} \eta_u. \tag{6}$$

În aceste relații s-a notat cu: p_0, presiunea inițială a aerului admis; $p_{m.ad}$, presiunea medie a gazelor în timpul admisiei; V_{ef}, volumul aerului admis.

Cantitatea de căldură primită, de aerul admis, de la pereții camerei de ardere se poate exprima în funcție de creșterea temperaturii aerului:

$$\Delta Q = c_p G \Delta T. \tag{7}$$

Înlocuind în relația (3) valorile corespunzătoare rezultate din relațiile (4), (5), (6) și (7) obținem

$$c_v G T_0 + c_{vr} G_r T_r + A p_0 \frac{G}{\gamma_0} + c_p G \Delta T = c_{va} G_a T_a + A V p_{m.ad} \eta_u. \tag{8}$$

În ipoteza că gazele rămase ocupă la începutul admisiei chiar volumul camerei de ardere, iar la sfîrșitul admisiei amestecul de gaze ocupă de asemenea un volum egal cu volumul camerei de ardere, putem scrie

$$G = V \gamma_0 \eta_u = V \frac{p_0}{R T_0} \eta_u, \tag{9}$$

$$G_r T_r = \frac{p_r V}{R_r}, \tag{10}$$

$$G_a T_a = \frac{p_a V}{R_a}. \tag{11}$$

Înlocuind în relația (8) valorile corespunzătoare obținute din relațiile (9), (10) și (11) și știind că $A = \frac{c_p}{R} - \frac{c_v}{R}$, dacă admitem că $\frac{c_{vr}}{R_r} = \frac{c_{va}}{R_a} = \frac{c_v}{R}$ și dacă vom nota $\frac{c_p}{c_v} = k$, printr-un calcul simplu obținem

$$\eta_u = \frac{p_a - p_r}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + k\frac{\Delta T}{T_0} + (k-1)\left(1 - \frac{p_{m.ad}}{p_0}\right)}. \tag{12}$$

Dintr-o primă analiză a relației (12), care exprimă valoarea coeficientului de umplere, rezultă că ea este influențată de:

1) Raportul dintre presiunea p_a a aerului, la sfîrșitul admisiei și presiunea p_0 a aerului, la starea lui inițială. Cînd acest raport crește se mărește și coeficientul de umplere.

2) Raportul dintre presiunea p_r a gazelor rămase la începutul admisiei și presiunea p_0 a aerului, la starea lui inițială. Dacă acest raport crește, cantitatea de amestec proaspăt care poate intra în camera de ardere scade și, prin urmare, scade și coeficientul de umplere.

3) Creșterea relativă a temperaturii aerului admis $\frac{\Delta T}{T}$, datorită încălzirii lui de la pereții camerei de ardere. Cu cît această creștere este mai mare, cu atît greutatea specifică a aerului admis scade mai mult și cu atît va scade, deci, și coeficientul de umplere.

4) Raportul dintre presiunea medie din timpul admisiei $p_{m.ad}$ și presiunea p_0 a aerului la starea lui inițială. Cu cît acest raport este mai mare, cu atît coeficientul de umplere este mai mare.

Să transformăm relația (12) în așa fel, încît să putem analiza influența asupra coeficientului de umplere și al acelor factori care nu rezultă explicit din această relație.

În ceea ce privește raportul $\frac{p_a}{p_0}$, avînd în vedere că raționamentele făcute de M. M. Maslenikov asupra acestui raport, în cazul motoarelor cu piston pentru aviație, sînt valabile și în cazul pulsoreactorului, vom prelua rezultatele lui M. M. Maslenikov [1], fără a mai reproduce aici felul cum aceste rezultate au fost obținute.

Prin urmare

$$\frac{p_a}{p_0} = 1 - \frac{p_0 - p_a}{p_0} = 1 - \frac{\Delta p_a}{p_0} = 1 - \frac{1}{RT_0}\frac{(1+\xi)\, w_a^2 - w_0^2}{2g}, \tag{13}$$

relație în care: $\Delta p_a = p_0 - p_a$, este căderea de presiune a aerului admis, la sfîrșitul admisiei; ξ, coeficientul de rezistență aerodinamică al circuitului de admisie al aerului; w_a, viteza de intrare a aerului în camera de ardere; w_0, viteza aerului în condițiile inițiale; g, accelerația pămîntească.

Raportul $\frac{p_r}{p_0}$ se poate exprima în funcție de depresiunea din camera de ardere a pulsoreactorului, respectiv în funcție de scăderea de presiune Δp_0 din

camera de ardere, în ipoteza că presiunea gazelor rămase, la începutul admisiei, este egală cu presiunea minimă p_{min} din camera de ardere:

$$p_r = p_{min} = p_0 - \Delta p_0 , \tag{14}$$

deci putem scrie

$$\frac{p_r}{p_0} = \frac{p_0 - \Delta p_0}{p_0} = 1 - \frac{\Delta p_0}{p_0} . \tag{15}$$

Pentru prescurtare, creșterea relativă a temperaturii aerului admis o notăm

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \theta . \tag{16}$$

În ceea ce privește presiunea medie a gazelor în timpul admisiei, putem scrie

$$p_{m.ad} = \frac{\int_a^b f(t)\, dt}{b - a} , \tag{17}$$

în care: $f(t)$, este funcția reprezentînd variația presiunii în funcție de timp, în perioada de admisie; a și b, începutul, respectiv sfîrșitul admisiei și deci $b—a$ este durata admisiei.

În ipoteza că în timpul admisiei presiunea variază triunghiular, scăderea medie de presiune este

$$\Delta p_m = \frac{\Delta p_0}{2} . \tag{17'}$$

În acest caz se vede ușor că:

$$1 - \frac{p_{m.ad}}{p_0} = \frac{\Delta p_0}{2\, p_0} . \tag{18}$$

Înlocuind în relația (12) valorile corespunzătoare scoase din relațiile (13), (15), (16) și (18) obținem, pentru coeficientul de umplere, expresia

$$\eta_u = \left[\frac{\Delta p_0}{p_0} - \frac{1}{RT_0} \frac{(1+\xi)\, w_a^2 - w_0^2}{2\, g} \right] \frac{1}{1 + k\,\theta + (k-1)\dfrac{\Delta p_0}{2\, p_0}} . \tag{19}$$

Analizînd expresia (19) rezultă că valoarea coeficientului de umplere este influențată de:

1°. Raportul dintre scăderea maximă de presiune Δp_0 din camera de ardere și presiunea p_0 a aerului în starea lui inițială.

Într-o primă aproximație scăderea maximă de presiune Δp_0 și deci presiunea minimă din camera de ardere se poate determina în felul următor:

Considerăm că masa de gaze din ajutajul de ejecție se comportă ca un piston de masă

$$m = \rho_{ev}\, S_{ev}\, L_{ev} \tag{20}$$

unde am notat cu: ρ_{ev}, masa specifică a gazelor; S_{ev}, secțiunea ajutajului de ejecție; L_{ev}, lungimea ajutajului de ejecție.

Chiar dacă presiunea din camera de ardere a scăzut pînă la presiunea aerului înconjurător, din cauza inerției, gazele nu încetează să iasă prin orificiul de evacuare. Pentru acest motiv, în primă aproximație, scăderea maximă de presiune în camera de ardere poate fi considerată egală cu forța de inerție a gazelor din ajutajul de ejecție, în momentul cînd viteza lor a devenit nulă și accelerația lor este maximă, împărțită la secțiunea camerei de ardere.

Pentru simplificare, vom lua în considerație scurgerea din momentul în care, în camera de ardere, presiunea a scăzut pînă la presiunea critică și admitem ipoteza că destinderea se face adiabatic.

Dacă în momentul considerat presiunea din camera de ardere, care are volumul V, era p după un scurt timp, din cauza destinderii, această presiune va varia cu Δp. Volumul gazelor variază în același timp cu ΔV. Putem scrie

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V)^k = p\, V^k, \tag{21}$$

relație din care printr-un calcul simplu găsim

$$\Delta p = -k\, p\, \frac{\Delta V}{V}\cdot \tag{22}$$

Dacă pistonul de gaze s-a deplasat cu lungimea x, $\Delta V = S_{ev} \cdot x$ și deci

$$\Delta p = -kp\frac{S_{ev}}{V}\, x. \tag{23}$$

Ecuația mișcării pistonului de gaze se poate scrie

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = \Delta p\, S_{ev}\cdot \tag{24}$$

Înlocuind în (24) valorile corespunzătoare obținute din relațiile (20) și (23) și punînd $K^2 = \dfrac{kp\, S_{ev}}{\rho_{ev}\, L_{ev}\, V}$, vom avea

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + K^2 x = 0. \tag{25}$$

După cum se știe, soluția acestei ecuații diferențiale este

$$x = C_1 \cos Kt + C_2 \sin Kt. \tag{26}$$

Pentru determinarea constantelor C_1 și C_2 vom considera că în momentul inițial $t = t_0 = 0$ și $x = x_0 = 0$.

Rezultă că

$$C_1 = 0. \tag{27}$$

Viteza v_0 a gazelor în momentul inițial este

$$\frac{dx}{dt} = C_2\, K \cos Kt = v_0 = C_2\, K$$

și deci

$$C_2 = \frac{v_0}{K}\cdot \tag{28}$$

Acceleraţia pe care o capătă gazele este

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -v_0 K \sin Kt.$$

În cazul considerat, cînd viteza devine nulă, acceleraţia are valoarea maximă

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos Kt = 0$$

deci

$$Kt = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{K}$$

şi prin urmare acceleraţia va fi

$$b = -v_0 K. \tag{29}$$

Forţa de inerţie a gazelor din ajutajul de ejecţie va fi, în ipotezele de mai sus.

$$F = S_{ev} L_{ev} v_0 \sqrt{\frac{kp S_{ev} \rho_{ev}}{L_{ev} V}}. \tag{30}$$

Dacă exprimăm lungimea şi secţiunea camerei de ardere în funcţie de lungimea, respectiv secţiunea ajutajului de ejecţie, adică

$$L_c = k_1 L_{ev} \quad \text{şi} \quad S_c = k_2 S_{ev}$$

şi introducem aceste expresii în relaţia (30) obţinem

$$F = -S_{ev} v_0 \sqrt{\frac{k \rho p}{k_1 k_2}} \tag{31}$$

şi în cele din urmă

$$\Delta p_0 = \frac{F}{S_{ev}} = -v_0 \sqrt{\frac{k \rho p}{k_1 k_2}}. \tag{32}$$

Din cele de mai sus rezultă că η_u depinde de valorile lui k_1 şi k_2.

2°. Coeficientul ξ de rezistenţă aerodinamică a circuitului de admisie al aerului. Cînd ξ creşte, η_u scade.

3°. w_a, viteza aerului în camera de ardere şi w_0, viteza lui în condiţiile iniţiale, viteze care pot fi considerate proporţionale cu frecvenţa f a pulsoreactorului. Rezultă că dacă f creşte, η_u scade.

4°. Creşterea relativă a temperaturii aerului admis, θ. Cînd θ creşte, η_u scade.

În mod asemănător ca la motoarele cu piston [1], se poate admite, într-o primă aproximaţie, ipoteza că influenţa creşterii relative a temperaturii aerului admis, datorită contactului cu pereţii calzi ai camerei de ardere, poate fi neglijată, considerînd că creşterea volumului amestecului proaspăt, din cauza încălzirii, este aproximativ egală cu micşorarea volumului gazelor rămase datorită răcirii acestora.

În cele din urmă, în acest caz, din relaţia (23) rezultă că η_u nu depinde decît de:
1) rapoartele k_1 şi k_2;
2) coeficientul de rezistenţă aerodinamică ξ;
3) frecvenţa f.

Variind în mod convenabil aceşti parametri, se poate obţine un coeficient de umplere optim şi deci o tracţiune mai mare.

Remarcă. Analizînd relaţia (19) se observă că, pe de o parte, η_u creşte cînd Δp_0 scade ($p_{m.ad}$ creşte), deci cînd k_1 şi k_2 cresc. Pe de altă parte, în cazul pulsoreactorului, η_u creşte cînd Δp_0 creşte ($p_{m.ad}$ scade), deci k_1 şi k_2 scad. Această contradicţie se explică prin faptul că aspiraţia de aer proaspăt se datoreşte tocmai depresiunii create de « pistonul de gaze » din ajutajul de ejecţie. Găsirea condiţiilor optime pentru obţinerea unui $\eta_{u\,max}$ constituie obiectul unei alte lucrări.

К ВОПРОСУ О КОЭФФИЦИЕНТЕ НАПОЛНЕНИЯ ПУЛЬСОРЕАКТОРА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Аналогично методу, используемому М. М. Масленниковым для определения коэффициента наполнения поршневых авиационных двигателей, автор, исходя из энергетического баланса пульсореактора во время питания, находит на основании различных предположений для коэффициента наполнения пульсореактора отношение (12) и в дальнейшем отношение (19). Из последнего отношения следует, что в первом приближении значение коэффициента наполнения зависит от длины и сечения сопла эжектора, от коэффициента аэродинамического сопротивления питательной цепи и от частоты пульсореактора.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU COEFFICIENT DE REMPLISSAGE DES PULSORÉACTEURS

(RÉSUMÉ)

Par analogie avec la méthode employée par M. M. Maslénikov dans le cas du coefficient de remplissage des moteurs à piston pour l'aviation, l'Auteur, en partant du bilan énergétique du pulsoréacteur dans la période d'admission, trouve pour le coefficient de remplissage du pulsoréacteur, dans certaines hypothèses, la relation (12) et, plus loin, la relation (19). De cette dernière, il résulte que, dans une première approximation, la valeur du coefficient de remplissage dépend de la longueur et de la section relative de l'ajutage d'éjection, du coefficient de résistance aérodynamique du circuit d'admission et de la fréquence du pulsoréacteur.

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. Maslenikov şi M. S. Rapaport, *Motoare cu piston pentru aviaţie*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1953, vol. I şi II.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

HIDROMECANICĂ

ASUPRA MIŞCĂRII TURBULENTE A UNUI LICHID GREU ÎNTR-O CONDUCTĂ CIRCULARĂ NETEDĂ

DE

D. DUMITRESCU şi DAN GH. IONESCU

În lucrarea de faţă, ne propunem să studiem mişcarea turbulentă a unui lichid greu în interiorul unei conducte circulare netede pornind de la ecuaţiile lui Reynolds şi utilizînd noţiunea lungimii de amestec. Această problemă a mai fost considerată recent, dintr-un punct de vedere asemănător, de către A. N. Patraşev [1] *) şi W. Szablewski [2], însă făcînd anumite ipoteze simplificatoare, pe care noi le eliminăm. De asemenea, spre deosebire de autorii citaţi, ţinem seamă şi de influenţa forţelor gravitaţionale asupra lichidului, ceea ce constituie un pas în plus în aproximarea fenomenului fizic.

În acest fel, se obţine o soluţie exactă a distribuţiei de viteze în mişcarea turbulentă a unui lichid greu, în interiorul unei conducte circulare. Prin particularizarea acestei soluţii generale, se poate apoi deduce cunoscuta formulă a lui Kármán.

I. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A MIŞCĂRII

Să considerăm mişcarea turbulentă a unui lichid greu, în interiorul unei conducte circulare netede, înclinată cu unghiul α faţă de orizontală. Pentru studiul acestei mişcări, considerăm ecuaţiile lui Reynolds şi ecuaţia de continuitate, scrise în coordonate cilindrice:

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} - \frac{\bar{v}_\theta^2}{r} = R - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial_r} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta}\right) - \tag{1}$$

$$- \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho \overline{v_r'^2}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \overline{v_r' v_\theta'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{v_r' v_z'}) + \rho\frac{\overline{v_r'^2}}{r} + \rho\frac{\overline{v_\theta'^2}}{r}\right],$$

*) p. 583—589.

$$\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z} + \frac{\overline{v_r v_\theta}}{r} = \Theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\theta}{\partial z^2} - \frac{\bar{v}_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \theta}\right) - \tag{2}$$

$$- \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho\overline{v'_r v'_\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\overline{v'^2_\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\overline{v'_\theta v'_z}) + 2\rho\frac{\overline{v'_r v'_\theta}}{r}\right],$$

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} +$$

$$+ \nu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial^2 z}\right) - \tag{3}$$

$$- \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho\overline{v'_r v'_z}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\overline{v'_\theta v'_z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\overline{v'^2_z}) + \rho\frac{\overline{v'_r v'_z}}{r}\right],$$

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r}{r} = 0. \tag{4}$$

În ecuaţiile (1), (2), (3) şi (4), v_r, v_θ şi v_z reprezintă componentele vitezei medii, v'_r, v'_θ, v'_z — pulsaţiile, p—presiunea, ν—coeficientul de viscozitate cinematică, ρ — densitatea, iar R, Θ, Z — componentele forţelor gravitaţionale; supralinierea indică valoarea medie a funcţiei respective, într-un anumit interval de timp t.

Axa conductei coincide cu axa Oz (fig. 1).

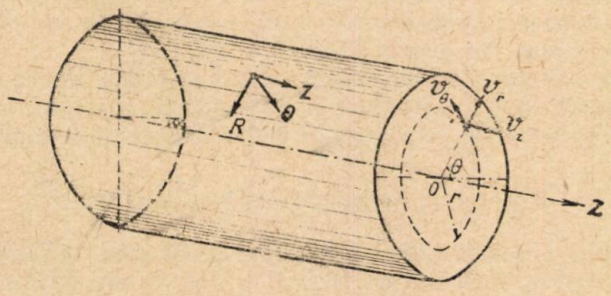


Fig. 1

Într-o mişcare permanentă, îndreptată în sensul axei Oz, vom avea

$$a)\ \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} = 0,$$

$$b)\ \bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0, \quad \bar{v}_z = \bar{v}_z(r), \tag{5}$$

$$c)\ v'_r = v'_r(r), \quad v'_\theta = v'_\theta(r), \quad v'_z = v'_z(r),$$

$$d)\ R = -g\cos\alpha\sin\theta, \quad \Theta = -g\cos\alpha\cos\theta, \quad Z = g\sin\alpha.$$

În acest caz, ecuaţiile (1), (2), (3) ne arată că presiunea e de forma

$$\frac{1}{\rho}\bar{p} = cz + f(r) + g(\theta),$$

c fiind o constantă arbitrară. Vom presupune însă că $\overline{p}$ depinde numai de r, ceea ce corespunde realităţii, cu o mare aproximaţie, [1] *). Conform teoriei lui Kármán, [3] **), vom pune

$$-\frac{d\overline{p}}{dz} = \lambda_m \frac{\rho}{d} \cdot \frac{v_{\max}^2}{2}, \tag{6}$$

unde $d = 2r_0$ este diametrul conductei, $v_{\max}$ — viteza maximă (din centrul conductei), iar λ_m — coeficientul de pierdere de sarcină, raportat la viteza maximă $v_{\max}$. Se ştie, că în mod obişnuit, se defineşte un coeficient de pierdere de sarcină λ, raportat a viteza medie din conductă w; legătura între aceşti coeficienţi este dată de relaţia [2] ***)

$$\lambda w^2 = \lambda_m v_{\max}^2. \tag{7}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (5), (6), ecuaţia (3) devine

$$\lambda_m \frac{v_{\max}^2}{2d} + \nu\left(\frac{d^2\overline{v}_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{v}_z}{dr}\right) - \left[\frac{d}{dr}\left(\overline{v_r' v_z'}\right) + \frac{\overline{v_r' v_z'}}{r}\right] + g\sin\alpha = 0. \tag{8}$$

Pentru a putea efectua integrarea ecuaţiei (8), care conţine trei funcţii necunoscute, vom adopta teoria lungimii de amestec a lui Prandtl, punînd

$$\overline{v_r' v_z'} = l^2\left(\frac{d\overline{v}_z}{dr}\right)^2. \tag{9}$$

Spre deosebire de formula clasică a lui Prandtl, produsul $\overline{v_r' v_z'}$ e o cantitate esenţial pozitivă. Acest fapt provine din felul în care s-au ales axele de coordonate şi poate fi uşor demonstrat, reluînd un raţionament al lui Prandtl [4] ****).

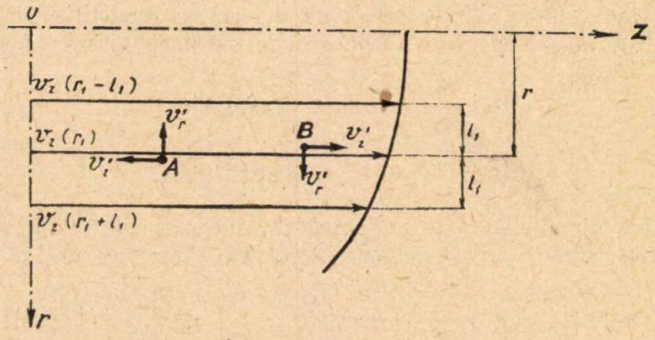


Fig. 2

Să imaginăm, în interiorul conductei, trei suprafeţe fluide, avînd forma unor cilindri coaxiali şi situate respectiv la distanţele r_1, $r_1 - l_1$ şi $r_1 + l_1$ de axa conductei (fig. 2). Dacă o particulă fluidă A trece de pe suprafaţa $(r_1 + l_1)$ pe suprafaţa (r_1), mişcîndu-se radial cu pulsaţia v_r' şi fără a-şi schimba viteza pe parcurs, înseamnă că, ajunsă pe suprafaţa fluidă (r_1), ea va avea o viteză $\overline{v}_z$, mai mică

*) p. 586.
**) p. 91.
***) p. 140.
****) p. 128–130.

decît viteza particulelor de pe suprafaţa (r_1), aceasta rezultînd din alura curbei de repartiţie a vitezelor, care este cea din figura 2. Putem deci considera că asupra particulei A acţionează acum viteza $\bar{v}\,(r_1)$, împreună cu o viteză v_z', îndreptată contrar sensului mişcării şi a cărei valoare este egală cu diferenţa dintre valorile vitezelor $\bar{v}_z\,(r_1)$ şi $\bar{v}\,(r_1+l_1)$. Cum însă şi pulsaţia v_r' este îndreptată în sens contrar axei Or, rezultă că produsul $v_r' v_z'$ este o cantitate pozitivă.

Să considerăm acum o particulă fluidă B, care trece de pe suprafaţa $(r_1—l_1)$ pe suprafaţa (r_1), cu pulsaţia v_r'; această particulă, ajungînd pe suprafaţa (r_1), va avea o viteză $\bar{v}_z$, mai mare ca viteza particulelor de pe această suprafaţă. Diferenţa va fi o pulsaţie v_z', îndreptată de astă dată în sensul mişcării. Deoarece însă şi v_r' este îndreptată în sensul pozitiv al axei Or, urmează că produsul $v_r' v_z'$ este tot o cantitate pozitivă. Prin urmare, produsul $v_r' v_z'$ fiind întotdeauna o cantitate pozitivă, valoarea sa medie va fi un număr esenţial pozitiv.

Introducînd în ecuaţia (8) lungimea de amestec, conform relaţiei (9), obţinem

$$\lambda_m \frac{v_{max}^2}{2d} + \nu\left(\frac{d^2\bar{v}_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{v}_z}{dr}\right) - \left\{\frac{d}{dr}\left[l^2\left(\frac{d\bar{v}_z}{dr}\right)^2\right] + \frac{1}{r}\left[l^2\left(\frac{d\bar{v}_z}{dr}\right)^2\right]\right\} + g\sin\alpha = 0. \quad (10)$$

Dacă facem această ecuaţie fără dimensiuni cu

$$\eta = 1 - \frac{r}{r_0}, \quad v = \frac{\bar{v}_z}{v_{max}}, \quad Re = \frac{v_{max}\cdot d}{\nu}, \quad Fr = \frac{v_{max}^2}{gd},$$

unde Re reprezintă numărul lui Reynolds, iar Fr — numărul lui Froude, obţinem

$$\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{l}{r_0}\right)^2\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2\right] - \frac{1}{1-\eta}\left(\frac{l}{r_0}\right)^2\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \frac{2}{Re}\left(\frac{d^2v}{d\eta^2} - \frac{1}{1-\eta}\frac{dv}{d\eta}\right) + \left(\frac{\lambda_m}{4} + \frac{\sin\alpha}{2Fr}\right) = 0. \quad (11)$$

Aceasta este ecuaţia diferenţială care determină repartiţia vitezelor în conductă. Condiţiile iniţiale pe care trebuie să le satisfacă viteza $v\,(\eta)$ sînt

$$\begin{aligned} &a)\ \frac{dv}{d\eta} = 0, && \text{pentru } \eta = 1 \\ &b)\ v = 1, && \text{pentru } \eta = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Putem efectua imediat o primă integrare a ecuaţiei (11). Pentru aceasta, să înmulţim întreaga ecuaţie cu $(1—\eta)$ şi apoi să integrăm; vom obţine

$$(1-\eta)\left(\frac{l}{r_0}\right)^2\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \frac{2}{Re}(1-\eta)\frac{dv}{d\eta} - \left(\frac{\lambda_m}{8} + \frac{\sin\alpha}{4Fr}\right)(1-\eta)^2 = 0; \quad (13)$$

constanta de integrare este nulă, dacă punem condiţia iniţială *a)* din (12). Observăm că ecuaţia (13) se mai scrie

$$(1-\eta)\left[\left(\frac{l}{r_0}\right)^2\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \frac{2}{Re}\frac{dv}{d\eta} - \left(\frac{\lambda_m}{8} + \frac{\sin\alpha}{4Fr}\right)(1-\eta)\right] = 0$$

şi cum în general $1-\eta \neq 0$, vom avea

$$\left(\frac{l}{r_0}\right)^2\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \frac{2}{Re}\frac{dv}{d\eta} - \left(\frac{\lambda_m}{8} + \frac{\sin\alpha}{4Fr}\right)(1-\eta) = 0. \quad (14)$$

În continuare, vom integra ecuaţia (14), luînd pentru (l/r_0) anumite legi de variaţie, indicate de experienţe.

Menţionăm că ecuaţia (14) a mai fost obţinută de W. Szablewski [2] *) pornind de la teoria stratului limită a lui Prandtl.

II. INTEGRAREA EXACTĂ A ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII

Pornind de la datele experimentale, Prandtl a dat pentru lungimea de amestec expresia [4] **).

$$\frac{l}{r_0} = 0{,}4\,\eta - 0{,}44\,\eta^2 + \ldots \tag{15}$$

Ne propunem să integrăm exact ecuaţia (14), considerînd — într-o primă aproximaţie — lungimea de amestec ca funcţie liniară de distanţa de la peretele conductei, deci luînd

$$\frac{l}{r_0} = \chi\,\eta = 0{,}4\,\eta, \tag{16}$$

χ fiind constanta lui Kármán. Într-o a doua aproximaţie, vom lua lungimea de amestec de forma

$$\frac{l}{r_0} = \chi\eta + \chi\eta^2 = 0{,}4\,\eta - 0{,}44\,\eta^2, \tag{17}$$

ceea ce ne va conduce la rezultate mult mai apropiate de realitate.

Înlocuind relaţia (16) în ecuaţia (14), obţinem

$$\frac{\chi^2}{2} Re\,\eta^2 \left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \frac{dv}{d\eta} - Re\left(\frac{\lambda_m}{16} + \frac{\sin\alpha}{8\,Fr}\right)(1-\eta) = 0,$$

sau, dacă notăm

$$A = \frac{\chi^2}{2} Re \quad , \quad B = Re\left(\frac{\lambda_m}{16} + \frac{\sin\alpha}{8\,Fr}\right) \tag{18}$$

avem

$$A\eta^2 \left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 + \frac{dv}{d\eta} + B\,(\eta - 1) = 0. \tag{19}$$

O ecuaţie analogă cu (19) a fost obţinută de D. Dumitrescu, cu ocazia studiului mişcării turbulente a unui lichid greu cu suprafaţă liberă, de-a lungul unei plăci [5] ***). Vom repeta pe scurt consideraţiile făcute în legătură cu această ecuaţie în lucrarea citată, indicînd totodată unele simplificări care se pot aduce în cursul calculului.

Rezolvînd ecuaţia (19) în raport cu $\frac{dv}{d\eta}$ şi luînd semnul plus în faţa radicalului, pentru a nu obţine viteze negative, vom avea

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{1}{2A}\left(-\frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta^2}\sqrt{1 - 4\,AB\,\eta^3 + 4\,AB\,\eta^2}\right). \tag{20}$$

*) p. 133.
**) p. 141.
***) p. 707.

Dacă facem transformarea

$$\eta = m\,\xi + n \quad , \quad m = -(AB)^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad n = \frac{1}{3}$$

şi notăm

$$g_2 = \frac{4}{3}\,(AB)^{\frac{2}{3}} \quad , \quad g_3 = -\left(1 + \frac{8\,AB}{27}\right),$$

ecuaţia (20) devine

$$\frac{1}{m}\,\frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{2A}\left[-\frac{1}{(m\xi+n)^2} + \frac{1}{(m\xi+n)^2}\sqrt{4\xi^2 - g_2\,\xi - g_3}\right]. \tag{21}$$

Să facem acum transformarea

$$\xi = p\,(u,\ g_2,\ g_3),$$

unde $p\,(u,\ g_2,\ g_3)$ reprezintă funcţia lui Weierstrass, iar g_2 şi g_3 sînt invarianţii ei. Ecuaţia (21) devine

$$\frac{2A}{mp'\,(u)}\,\frac{dv}{du} = -\frac{1}{[mp\,(u)+n]^2} + \frac{1}{[mp\,(u)+n]^2}\sqrt{4\,p^3\,(u) - g_2\,p\,(u) - g_3} \tag{22}$$

sau, ţinînd seamă de relaţia fundamentală verificată de funcţia lui Weierstrass, mai putem scrie

$$\frac{2A}{m}\,\frac{dv}{du} = -\frac{p'\,(u)}{[mp\,(u)+n]^2} + \frac{p'^2\,(u)}{[mp\,(u)+n]^2}\,. \tag{23}$$

Integrînd ecuaţia (23) şi ţinînd seamă că $p\,(u) = -\zeta'\,(u)$, obţinem

$$v\,(u) = \frac{1}{2A[mp\,(u)+n]} - \frac{2}{mA}\,\zeta\,(u) - \frac{4n}{m^2\,A}\,u + \frac{m}{2A}\int\frac{du}{[mp\,(u)+n]^2} + \text{const.} \tag{24}$$

Calculul integralei eliptice din membrul al doilea al formulei (24) este clasic. Anume, dacă introducem o constantă a prin relaţia

$$p\,(a) = -\frac{n}{m}\,,$$

găsim pentru $v\,(u)$ expresia următoare:

$$\begin{aligned} 2\,Am\,v\,(u) = {} & \frac{1}{p\,(u) - p\,(a)} - 4\zeta\,(u) + 8up\,(a) - \frac{p''\,(a)}{p'^2\,(a)}\left[\ln\frac{\sigma\,(u-a)}{\sigma\,(u+a)} + 2u\zeta\,(a)\right] + \\ & + \frac{1}{p'^2\,(a)}\left[-\zeta\,(u-a) - \zeta\,(u+a) + 2u\,\zeta'\,(a)\right] + \text{const.} \end{aligned} \tag{25}$$

Constanta se determină prin condiţia $v = 1$, pentru $\eta = 1$.

Expresia (25) reprezintă soluţia exactă a mişcării turbulente în interiorul unei conducte circulare netede, făcînd ipoteza că lungimea de amestec este o funcţie liniară de distanţa de la peretele conductei.

III. INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A MIȘCĂRII, CONSIDERÎND LUNGIMEA DE AMESTEC DE FORMA $l/r_0 = \chi\eta$

Calculul exact al repartiției de viteze, cu ajutorul formulei (25), împreună cu alte considerații teoretice, va face obiectul unui studiu ulterior. În lucrarea de față, ne propunem să dăm unele soluții aproximative, care se pretează unui calcul numeric imediat.

Pentru aceasta, în imediata apropiere a originii, vom scrie ecuația (19) sub forma

$$\frac{dv}{d\eta} = B, \text{ deci } v = B\eta. \tag{26}$$

În restul domeniului, date fiind valorile mari ale lui A și B, putem neglija pe 1 atît sub radical, cît și în afara radicalului, în ecuația (20), obținînd ecuația

$$\frac{dv}{d\eta} = \sqrt{\frac{B}{A}} \cdot \frac{\sqrt{1-\eta}}{\eta}, \tag{27}$$

care, integrată, ne dă

$$v = \sqrt{\frac{B}{A}} \left[2\sqrt{1-\eta} + \ln \frac{1-\sqrt{1-\eta}}{1+\sqrt{1-\eta}} \right] + 1, \tag{28}$$

dacă punem condiția inițială $v=1$, pentru $\eta=1$.

Din (28) se poate deduce cunoscuta formulă a lui Kármán. Într-adevăr, considerînd conducta orizontală ($\alpha=0$), avem, conform relațiilor (7) și (18),

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{Re\frac{\lambda_m}{16} \cdot \frac{2}{\chi^2 Re}} = \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{\lambda_m}{8}} = \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{\lambda}{8} \cdot \frac{w^2}{v_{max}^2}}, \tag{29}$$

iar dacă facem cunoscutele înlocuiri, [3] *),

$$\frac{\lambda}{8} = \frac{\tau_0}{\rho w^2} \text{ și } \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*, \tag{30}$$

u_* fiind « viteza de frecare » a lui Prandtl, obținem din (28)

$$v = \frac{1}{\chi}\frac{u_*}{v_{\max}}\left[2\sqrt{1-\eta} + \ln \frac{1-\sqrt{1-\eta}}{1+\sqrt{1-\eta}} \right] + 1. \tag{31}$$

Dacă, pe de altă parte, luăm aproximativ

$$\ln(1+\sqrt{1-\eta}) \simeq \sqrt{1-\eta},$$

ecuația (31) devine

$$\frac{v_{\max} - \bar{v}_z}{u_*} = -\frac{1}{\chi}\left[\ln(1-\sqrt{1-\eta}) + \sqrt{1-\eta} \right], \tag{32}$$

deci tocmai formula lui Kármàn (citat după [3] **)).

*) p. 27 și 47.
**) p. 75.

IV. INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII, CONSIDERÎND LUNGIMEA DE AMESTEC DE FORMA $l/r_0 = \chi\eta + \varkappa\eta^2$

Dacă luăm pentru lungimea de amestec expresia (17), ecuaţia (14), rezolvată în raport cu $dv/d\eta$, ne dă

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{1}{2A(\eta + k\eta^2)^2}\left[-1 + \sqrt{1 + 4AB(1-\eta)(\eta + k\eta^2)^2}\right], \tag{33}$$

unde am însemnat $k = \varkappa/\chi$. Deoarece această ecuaţie nu mai poate fi integrată exact, cu ajutorul funcţiilor eliptice, vom stabili o soluţie aproximativă. Neglijînd pe 1 sub radical, ecuaţia (33) devine

$$\frac{dv}{d\eta} = -\frac{1}{2A(\eta + k\eta^2)^2} + \sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\sqrt{1-\eta}}{\eta + k\eta^2}, \tag{34}$$

iar soluţia acestei ecuaţii este

$$\begin{aligned} v = {} & \frac{1}{2A}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{k}{1+k\eta)}\right) - \frac{k}{A}\ln\left(1 + \frac{1}{k\eta}\right) - \\ & - \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}} + \beta\ln\frac{\beta - \sqrt{1-\eta}}{\beta + \sqrt{1-\eta}}\right) + \text{const.}, \end{aligned} \tag{35}$$

unde $\beta = \sqrt{1 + \frac{1}{k}}$. Constanta se va determina prin condiţia $v = 1$, pentru $\eta = 1$.

О ТУРБУЛЕНТНОМ ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ГЛАДКОЙ ТРУБЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе изучается турбулентное движение тяжелой жидкости в гладкой трубе круглого сечения исходя из уравнений Рейнольдса и пользуясь понятием «путь смешения».

Предположив, что путь смешения является линейной функцией расстояния от стенки (16), авторы в настоящей работе, в отличие от других работ, проведенных в этой области, получают точное выражение распределения скоростей, удовлетворяющее начальные условия (12). Так как это решение представляет трудности при расчете, то указывается приближенное решение (28), которое в применении к частному случаю приводит к известной формуле Кармана (32).

Для случая параболического изменения пути смешения в зависимости от расстояния от стенки (17) авторы дают приближенную формулу (35).

На основании точной формулы (25) могут быть внесены новые данные в изучение турбулентного движения, которые и будут рассмотрены в следующих работах.

SUR LE MOUVEMENT TURBULENT D'UN LIQUIDE PESANT DANS UNE CONDUITE CIRCULAIRE LISSE

(RÉSUMÉ)

Dans cet article on étudie le mouvement turbulent d'un liquide pesant à l'intérieur d'une conduite circulaire lisse, en partant des équations de Reynolds et en utilisant la notion de longueur de mélange.

En supposant que la longueur de mélange est une fonction linéaire de la distance à la paroi (16) et à l'encontre d'autres travaux effectués en ce sens, on obtient une expression exacte pour la distribution des vitesses, les conditions initiales (12) étant satisfaites. Etant donné que cette solution présente des difficultés de calcul, on donne la solution approximative (28) et, par sa particularisation, on obtient la formule classique de Kármán (32).

Au cas où la longueur de mélange varie paraboliquement en fonction de la distance à la paroi (17), on établit la formule approximative (35).

En se basant sur la formule exacte (25), on peut apporter de nouvelles contributions à l'étude du mouvement turbulent, qui feront l'objet de travaux à venir.

BIBLIOGRAFIE

1. A. N. Patraşev, *Ghidromehanika*, Voenno - Morskoe Izd. Moscova, 1953.
2. W. Szablewski, *Berechnung der turbulenten Strömung im Rohr auf der Grundlage der Mischungsweghypothese*. Z. angew. Math. Mech., vol. 31, nr. 4—5, aprilie—mai 1951, p. 131—142.
3. B. A. Bakhmeteff, *Mécanique de l'écoulement turbulent des fluides*. Dunod, Paris, 1941.
4. L. Prandtl, *The Mechanics of Viscous Fluids. Aerodynamic Theory (Durand)*. Julius Springer, Berlin, 1935, vol. III, p. 34—208.
5. D. Dumitrescu, *Distribuţia vitezelor în mişcarea turbulentă a unui lichid greu cu suprafaţă liberă*. Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 11—12, noiembrie — decembrie 1954, p. 705—713.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

HIDROMECANICĂ

ASUPRA UNEI PROBLEME DE SCURGERE SPRE SONDĂ ÎN CAZUL UNEI VARIAŢII OARECARE A PERMEABILITĂŢII

DE

T. OROVEANU

În cele ce urmează, vom lua în considerare problema scurgerii unui fluid incompresibil printr-un mediu poros a cărui permeabilitate variază după o lege oarecare, rezultatele urmînd a fi aplicate la stabilirea debitului unei sonde, care se alimentează dintr-un astfel de strat. Sub aspectul general, problema prezintă dificultăţi foarte mari, care fac necesare unele ipoteze simplificatoare. Admitem astfel, în primul rînd, că fenomenul de scurgere este plan, ceea ce implică şi ipoteza că permeabilitatea nu variază pe verticală. Utilizînd coordonatele polare, care se adaptează mai bine metodei de rezolvare pe care o avem în vedere, ecuaţia de continuitate se scrie sub forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \tag{1}$$

Mai departe, presupunem că este valabilă legea lui Darcy

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p \tag{2}$$

$k\ (r, \theta)$ fiind permeabilitatea mediului poros, μ viscozitatea dinamică a fluidului şi $p\ (r, \theta)$ presiunea.

Dacă punem

$$\varphi = -\frac{p}{\mu} \tag{3}$$

găsim

$$\bar{v} = k\nabla\varphi, \tag{4}$$

respectiv

$$v_r = k\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{k}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \tag{5}$$

Dacă introducem în ecuaţia (1) rezultatul precedent, aceasta capătă forma

$$\frac{k}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{6}$$

şi problema constă în găsirea soluţiilor ei. Pentru a putea aplica o metodă de rezolvare simplă şi anume aceea a separării variabilelor, vom admite că funcţia k se poate scrie

$$k=k_1(r)\,k_2(\theta). \tag{7}$$

În felul acesta generalitatea problemei este micşorată în oarecare măsură, însă ipoteza admisă permite să se ia în considerare o gamă destul de largă de variaţii ale permeabilităţii.

Mai departe, punem şi funcţia φ sub o formă asemănătoare

$$\varphi=\varphi_1(r)\,\varphi_2(\theta) \tag{8}$$

şi introducînd aceste expresii pentru k şi φ în ecuaţia (6) găsim, după unele calcule simple

$$\frac{r^2}{\varphi_1}\left[\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{dr}\right)\frac{d\varphi_1}{dr}\right]+\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2}+\frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{d\theta}\frac{d\varphi_2}{d\theta}\right)=0 \tag{9}$$

sau

$$\frac{r^2}{\varphi_1}\left[\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{dr}\right)\frac{d\varphi_1}{dr}\right]=-\frac{1}{\varphi_2}\left(\frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2}+\frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{d\theta}\frac{d\varphi_2}{d\theta}\right)=m^2, \tag{10}$$

deoarece primul membru al acestei ultime ecuaţii este funcţie numai de r, iar membrul al doilea numai de θ. Prin urmare problema se reduce la rezolvarea unor ecuaţii obişnuite de ordinul al doilea, respectiv de forma

$$r^2\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+\left(r+\frac{r^2}{k_1}\frac{dk_1}{dr}\right)\frac{d\varphi_1}{dr}-m^2\varphi_1=0 \tag{11}$$

şi

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2}+\frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{d\theta}\frac{d\varphi_2}{d\theta}+m^2\varphi_2=0. \tag{12}$$

Rezolvarea acestor ecuaţii de o formă destul de generală prezintă dificultăţi serioase, care pot fi parţial înlăturate dacă întrebuinţăm unele aproximaţii în ceea ce priveşte expresiile pe care le au coeficienţii lor.

În acest scop vom considera mai întîi ecuaţia (11) în care introducem notaţia

$$f(r)=\frac{1}{k_1}\frac{dk_1}{dr}, \tag{13}$$

obţinînd astfel

$$r^2\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}+r(1+rf)\frac{d\varphi_1}{dr}-m^2\varphi_1=0. \tag{14}$$

Funcția f definită prin (13) îndeplinește toate condițiile necesare pentru a fi dezvoltată într-o serie de forma *)

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \tag{15}$$

deoarece am admis că permeabilitatea variază continuu. Ecuația (14) devine

$$r^2 \frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + r \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^s \frac{d\varphi_1}{dr} - m^2 \varphi_1 = 0 \tag{16}$$

unde

$$a_0 = 1,\ a_1 = \alpha_0,\ \ldots,\ a_s = \alpha_{s-1},\ \ldots, \tag{17}$$

și se observă ușor că este de tip Fuchs [1]. Acest lucru ne permite să găsim o soluție de forma

$$\varphi_{11} = r^m \sum_{q=0}^{\infty} c_q r^q, \tag{18}$$

unde coeficienții c_q pot fi calculați cu ajutorul formulei de recurență

$$c_q = -\frac{\sum_{t=0}^{q-1} (m+t)\, c_t\, a_{q-t}}{q\,(2m+q)}, \tag{19}$$

în care vom ține seama că avem $a_0 = 1$. Singurul coeficient nedeterminat rămîne c_0, dar în conformitate cu teoria generală a acestor ecuații putem lua $c_0 = 1$.

Dacă m nu este un număr întreg, o a doua integrală a ecuației (18) este de forma

$$\varphi_{12} = r^{-m} \sum_{q=0}^{\infty} c_q^* r^q \tag{20}$$

coeficienții c_q^* calculîndu-se pe o cale analogă. În cazul cînd m este un număr întreg diferit de zero, a doua integrală se scrie

$$\varphi_{12} = r^m \sum_{q=0}^{\infty} c_q r^q \int \frac{dr}{r^{2m} \left(\sum_{q=0}^{\infty} c_q r^q \right)^2} e^{-\int \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^{s-1}\, dr} \tag{21}$$

și, după unele calcule, devine

$$\varphi_{12} = C\, \varphi_{11} \log r + r^{-m} \left(\sum_{q=1}^{\infty} b_q r^q - \frac{1}{2m} \right). \tag{22}$$

Integrala generală a ecuației considerate este deci

$$\varphi_1 = c_1 \varphi_{11} + c_2 \varphi_{12}. \tag{23}$$

*) Alegerea axelor de coordonate este astfel făcută, încît originea să se găsească în interiorul domeniului, în care se produce scurgerea.

Precizarea valorilor parametrului m rezultă din rezolvarea ecuației (12) în care punem

$$g(\theta) = \frac{1}{k_2}\frac{dk_2}{d\theta}, \tag{24}$$

$g(\theta)$ fiind o funcție periodică de perioadă 2π. Ecuația (12) se scrie

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\theta^2} + g(\theta)\frac{d\varphi_2}{d\theta} + m^2\varphi_2 = 0 \tag{25}$$

și deoarece condițiile fizice ale problemei impun ca φ_2 să fie o funcție periodică de perioadă 2π, problema constă în găsirea valorilor proprii ale parametrului m, astfel ca φ_2 să satisfacă această condiție. Lăsînd pentru moment la o parte aspectul general, ne vom limita la cazul în care avem $m=0$. Se observă atunci imediat că o soluție particulară a ecuației (25) este

$$\varphi_2 = C, \tag{26}$$

ceea ce înseamnă că φ nu depinde de θ, fenomenul de scurgere fiind deci radial. Revenind la ecuația (16), aceasta se scrie

$$r\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^s \frac{d\varphi_1}{dr} = 0 \tag{27}$$

și are soluția generală

$$\varphi_1 = C_1 \int e^{-\int \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^{s-1}\, dr}\, dr + C_2. \tag{28}$$

După cîteva calcule simple, obținem

$$\varphi_1 = C_1 [\log r + S(r)] + C_2 \tag{29}$$

unde $S(r)$ este o funcție analitică în intervalul de variație al lui r considerat.

Ținînd seama și de (26), funcția φ are în acest caz particular forma

$$\varphi = K_1 [\log r + S(r)] + K_2, \tag{30}$$

iar singularitatea logaritmică din origine, precum și faptul că φ nu depinde de θ, ne arată că scurgerea este aceea datorită unei surse situate în origine. Prin urmare, soluția găsită poate fi aplicată la stabilirea debitului unei sonde situate în centrul unui domeniu de alimentare cu frontiera circulară.

Pentru a determina constantele K și K_2 vom utiliza condițiile la limită. Notînd astfel cu r_c raza conturului circular de alimentare, pe care presupunem că presiunea are valoarea constantă p_c și cu r_s raza sondei, presiunea corespunzătoare fiind p_s, găsim

$$\varphi = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\log\frac{r_c}{r_s} + S(r_c) - S(r_s)}\left[\log\frac{r}{r_s} + S(r) - S(r_s)\right] + \varphi_s \tag{31}$$

φ_c și φ_s fiind valorile funcției φ, care corespund respectiv presiunilor p_c și p_s.

Expresia corespunzătoare pentru presiune se deduce imediat cu ajutorul relației (3) și are aceeași formă:

$$p = \frac{p_c - p_s}{\log \frac{r_c}{r_s} + S(r_c) - S(r_s)} \left[\log \frac{r}{r_s} + S(r) - S(r_s) \right] + p_s . \tag{32}$$

Pentru calculul debitului, vom porni de la expresia vitezei radiale

$$v_r = k_1(r)\, k_2(\theta) \frac{p_c - p_s}{\mu \left[\log \frac{r_c}{r_s} + S(r_c) - S(r_s) \right]} \left[\frac{1}{r} + S'(r) \right]. \tag{33}$$

Debitul rezultă din formula

$$Q = h \int_0^{2\pi} r\, v_r\, d\theta, \tag{34}$$

unde h este grosimea stratului.

Din ecuația (6) în care introducem pe φ, funcție numai de r, rezultă imediat [2]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k_1\, r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \tag{35}$$

sau

$$k_1\, r \frac{d\varphi}{dr} = C \tag{36}$$

și ținînd seama de (5) și (7) găsim

$$r\, v_r = k_2\, C. \tag{37}$$

Dacă înlocuim în acest rezultat expresia precedentă a vitezei, obținem, după calcule simple

$$k_1(r)\,[1 + r\, S'(r)] = A, \tag{38}$$

unde A este o constantă pentru care putem lua valoarea

$$A = k_1(r_s)\,[1 + r_s\, S'(r_s)]. \tag{39}$$

Revenind la formula (34), găsim

$$Q = h\, k_1(r_s) \frac{p_c - p_s}{\mu \left[\log \frac{r_c}{r_s} + S(r_c) - S(r_s) \right]} [1 + r_s\, S'(r_s)] \int_0^{2\pi} k_2(\theta)\, d\theta. \tag{40}$$

О ПРИТОКЕ НЕФТИ К БУРОВОЙ СКВАЖИНЕ ПРИ НЕКОТОРОМ ИЗМЕНЕНИИ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОРОДЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье автор исследует вопрос о притоке несжимаемой жидкости через пористую среду, проницаемость которой изменчива. Допускается, что явление притока имеет место в плоскости и что функ-

ция, представляющая изменения проницаемости, может быть выражена в форме произведения между функциями r и θ. В этом предположении дифференциальное уравнение притока может быть рассматриваемо методом выделения переменных, что ведет к двум уравнениям второй степени.

В виде примера, автор рассматривает вопрос притока нефти к буровой скважине, расположенной в центре кольцевого контура питания.

SUR LE PROBLÈME DE L'ÉCOULEMENT VERS UN PUITS DE PÉTROLE DANS LE CAS D'UNE VARIATION QUELCONQUE DE LA PERMÉABILITÉ

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on traite le problème de l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux dont la perméabilité est variable. On émet l'hypothèse que le phénomène d'écoulement est plan et l'on admet que la fonction qui représente la variation de la perméabilité peut être mise sous la forme d'un produit entre une fonction de r et une autre de θ. Dans ces conditions, l'équation différentielle de l'écoulement peut être traitée par la méthode de la séparation des variables et l'on obtient deux équations ordinaires du second ordre.

Comme application, on traite le problème de l'écoulement vers un puits de pétro.e situé au centre d'un contour d'alimentation circulaire.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique.* Paris, 1942, vol. II, ed. a VI-a, p. 476–481
2. M. Muskat, *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media.* Mac Graw Hill New York, 1937, p. 401–403.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

HIDROMECANICĂ

APLICAREA METODEI REŢELELOR LA STUDIUL MIŞCĂRII FLUIDELOR GRELE CU SUPRAFAŢA LIBERĂ

DE

D. DUMITRESCU, V. IONESCU şi R. TOTH

INTRODUCERE

Mişcarea fluidelor grele cu suprafaţă liberă constituie, fără îndoială, unul din cele mai importante capitole ale hidraulicii şi a fost, datorită importanţei sale practice, o preocupare continuă a hidraulicienilor.

Deşi materialul experimental acumulat în această direcţie este enorm, o justificare teoretică întîrzie din cauza dificultăţilor de ordin matematic. Într-adevăr, dacă se consideră fluidul ideal, problema mişcării se reduce la integrarea ecuaţiei diferenţiale $\Delta \psi = 0$ (ψ fiind funcţia de curent), astfel încît pe o linie de curent ψ = constant, iniţial necunoscută, să fie verificată relaţia lui Bernoulli.

Aşadar, nu avem de-a face cu o adevărată problemă la limită şi dificultăţile matematice provin din condiţia impusă de relaţia lui Bernoulli pe o porţiune din frontiera domeniului necunoscută apriori şi care va trebui să fie determinată paralel cu integrarea ecuaţiei $\Delta \psi = 0$.

Această problemă a fost tratată într-o formă mai mult sau mai puţin generală de N. Kocin [1], Levi-Civita [2], H. Villat [3], L. Sretesnski [4], I. Smetana [5], F. Aimond [6], H. Poncin [7], H. Blasius [8], A. Lauck [9], M. Haimovici [10], D. Dumitrescu [11], [12], [13] etc.

Este evident că dacă se ţine seama de viscozitate, sau se consideră mişcarea turbulentă, dificultăţile matematice cresc în aşa fel încît un studiu analitic apare inaccesibil. Din literatura avută la dispoziţie, nu cunoaştem, afară de cîteva cazuri particulare, cercetări cu caracter general în această direcţie. Faţă de aceste greutăţi, cercetarea ştiinţifică nu putea fi abordată decît prin simplificarea sistemului de ecuaţii diferenţiale, în vederea unei eventuale integrări exacte, urmînd drumul trasat de L. Prandtl, Oseen şi Stokes, sau o integrare a sistemului de ecuaţii diferenţiale păstrat intact cu una din metodele clasice ale calculului numeric.

În lucrarea de faţă s-a aplicat al II-lea mod de cercetare şi anume s-a aplicat metoda reţelelor la integrarea numerică a ecuaţiilor de tip $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ (fluide

perfecte) $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = k$ (fluide vîscoase) şi $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$ (mişcări axial simetrice).

Atenţia pe care o acordă cercetătorii sovietici prin lucrările lui L. V. Kantorovici, V. I. Krîlov [14], S. E. Mikheladze [15], D. Panov [16], I. Petrovski [17] etc. metodei reţelelor, cît şi realizările şcolii create de Southwell [18], [19], au fost determinante pentru noi în alegerea drumului ce trebuia urmat, pentru rezolvarea acestor grele şi importante capitole de hidraulică.

Fără a susţine că acesta este singurul şi cel mai expeditiv mod de a trata astfel de probleme şi fără a neglija din preocupările noastre viitoare aspectul general al problemei, sîntem îndreptăţiţi a crede, că pînă în prezent nu dispunem de un alt instrument matematic, care să ne asigure în această direcţie un răspuns imediat şi oricît de precis am vrea. Mai mult decît atît, putem afirma, din experienţă proprie, că în anumite cazuri (mişcarea axial simetrică) metoda reţelelor s-a dovedit a fi mai expeditivă decît studiul analitic.

În speranţa de a fi folositori eventualelor cercetări tehnico-ştiinţifice atît în hidraulică, cît şi în domeniul mecanicii aplicate şi pentru a evita reveniriile în rezolvarea problemelor de hidraulică ce ne-am propus să studiem, am rezumat la începutul acestei lucrări principiile generale ale metodei reţelelor şi am indicat formulele necesare calculului ulterior.

Prima problemă hidraulică tratată se referă la mişcarea permanentă a unui fluid greu, vîscos în canale deschise de diferite secţiuni ($\Delta\psi = k$). S-a determinat repartiţia vitezelor în 10 cazuri particulare.

În continuare s-a studiat mişcarea unui fluid greu, lipsit de viscozitate, peste un stăvilar plan, vertical, cu vîna complet deprimată ($\Delta\psi = 0$).

Urmează studiul deversării peste o clapetă curbă cu aerisire perfectă, determinîndu-se forma suprafeţei libere, repartiţia presiunilor şi repartiţia vitezelor. Rezultatele integrării numerice se suprapun încercărilor de laborator efectuat.

În sfîrşit, s-a studiat mişcarea axial simetrică $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0\right)$ creată de o bulă de aer într-un tub vertical, determinîndu-se viteza de ascensiune şi forma bulei. Rezultatele obţinute cu această metodă se suprapun cu rezultatele obţinute pe altă cale teoretică.

I. METODA REŢELELOR

1. Principiile metodei reţelelor

Să considerăm o ecuaţie cu derivate parţiale

$$L(u) = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0 \qquad (1)$$

cu funcţia necunoscută $u(x, y)$, pe care vrem să o integrăm într-un domeniu D, mărginit de o curbă simplă închisă C din planul Oxy, pe care sînt date condiţiile la limită ale problemei. Vom împărţi domeniul D într-o reţea oarecare de domenii mai mici poligonale, care îl acoperă în întregime (fig. 1). Laturile poligoanelor, care acoperă domeniul de integrare, se numesc « paşii » reţelelor, iar vîrfurile lor,

« nodurile » rețelelor. Pentru stabilirea teoriei generale, poligoanele pot fi oarecare, însă pentru ușurința calculelor e bine ca ele să fie regulate. Aplicînd metoda rețelelor se pot determina cu o aproximație oricît de bună valorile funcției căutate în nodurile rețelei, în funcție de condițiile la limită ale problemei.

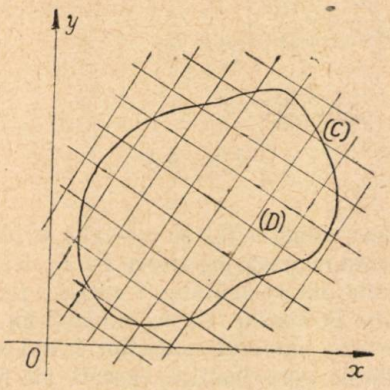


Fig. 1

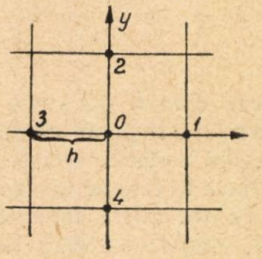


Fig. 2

Să presupunem, pentru a simplifica lucrurile, că domeniul D a fost acoperit de o rețea pătratică de pas h (fig. 2). Notăm valoarea funcției căutate $u\ (x,\ y)$ în punctele 0, 1, 2, 3, 4, respectiv cu u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

Dacă în ecuația (1) exprimăm derivatele parțiale care intervin prin diferențe finite, vom obține o relație algebrică între valorile funcției în diferite noduri ale rețelei.

Vom avea

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \simeq \frac{u_1 - u_3}{2h}.$$

În mod analog obținem

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1'} \simeq \frac{u_1 - u_0}{h} \quad \text{și} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{3'} \simeq \frac{u_0 - u_3}{h}.$$

Deoarece

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

rezultă

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \simeq \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{1'} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{3'}}{h} = \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2}. \tag{2}$$

Continuînd în același mod, putem exprima prin diferențe finite derivatele de orice ordin prin valorile funcției în orice punct al domeniului. Derivatele parțiale în raport cu y se calculează la fel. Se obține

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \simeq \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{h^2}. \tag{3}$$

Dacă introducem aceste expresii în ecuaţia (1), obţinem relaţia algebrică de care am amintit mai sus; operatorul diferenţial devine astfel un operator în diferenţe finite. În cazul cînd acest operator este ecuaţia lui Poisson $\Delta u = f(x, y)$ atunci, adunînd (2) cu (3) obţinem

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0}{h^2} = f(x_0, y_0)$$

sau

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} - \frac{h^2}{4} f(x_0, y_0). \tag{4}$$

În cazul cînd $L(u)$ are o altă formă, ecuaţia (4) se schimbă evident şi ea. O astfel de relaţie se poate scrie în fiecare din nodurile interioare ale reţelei în funcţie de valorile din nodurile vecine. În nodurile din vecinătatea frontierei forma ecuaţiei (4) variază în funcţie de condiţiile date pe contur. Obţinem astfel un sistem de n ecuaţii cu tot atîtea necunoscute (n este numărul nodurilor interioare curbei C), a cărui soluţie constituie tocmai valorile aproximative căutate ale funcţiei în nodurile reţelei.

Cu cît pasul reţelei este mai mic, cu atît numărul nodurilor reţelei este mai mare şi rezolvarea sistemului devine mai anevoioasă. Se înlătură această dificultate aplicîndu-se o metodă de aproximare succesivă a soluţiei, pe care o expunem mai jos. Să presupunem, pentru simplificare, că pe conturul C sînt date valorile funcţiei necunoscute $u(x, y)$. În toate nodurile interioare lui C dăm valori arbitrare funcţiei u, pe care apoi le verificăm cu o formulă de tip (4). Verificarea încetează în momentul în care valorile lui u în fiecare nod al reţelei nu se mai schimbă, adică atunci cînd între valoarea lui u în oricare nod al reţelei şi valorile lui u în nodurile vecine există relaţia (4).

Din cele de mai sus se vede că valorile aproximative ale funcţiei obţinute în nodurile reţelei, depind de pasul reţelei care acoperă domeniul D, de felul acestei reţele şi de condiţiile la limită ale problemei. În lucrarea [15] se arată, în cazul unei reţele oarecare, că în condiţii destul de largi puse funcţiei $u(x, y)$ sistemul de ecuaţii admite o soluţie, ea este unică şi că precizia ei creşte o dată cu micşorarea pasului h al reţelei. În plus, se arată că procesul de aproximaţii succesive, expus mai sus, este convergent. În afară de metoda aproximaţiilor succesive, C. Runge propune o altă metodă, care determină în cele din urmă valorile funcţiei necunoscute în nodurile reţelei la orice pas vrem, care însă ni se pare mai greoaie şi cu mai mari posibilităţi de erori.

Din această cauză am folosit metoda aproximaţiilor succesive. Mersul efectiv al operaţiilor se poate vedea în capitolul II, punctul 3.

2. Expresia în diferenţe finite a operatorului L (u) pentru diferite tipuri de reţele

Am arătat mai sus că, în general, poate fi folosită orice reţea pentru integrarea numerică a ecuaţiilor cu derivate parţiale cu diferite condiţii pe contur. Forma domeniului de integrare impune însă de multe ori alegerea unui anumit fel de reţea. Se caută, în general, ca frontiera domeniului să coincidă, pe cît posibil, cu punctele nodale marginale ale reţelei. Trebuie de asemenea să se caute reţeaua, care face ca relaţia (4) să aibă o formă cît mai simplă şi ca ordinul de eroare să fie cît mai mic.

În problemele studiate de noi, am ales diferite tipuri de rețele după considerentele de mai sus. Aceste probleme au condus în special la rezolvarea ecuației $\Delta u = K$, unde K este o constantă, în diferite domenii, cunoscînd valorile funcției pe contur. În cele ce urmează, vom scrie toate expresiile în diferențe finite ale ecuației $\Delta u = K$, pentru diferite tipuri de rețele și pentru diferite tipuri de noduri pe care le vom folosi ulterior.

Vom numi nod ordinar al rețelei un nod de felul celui din figura 2 și nod special un nod de felul celui din figura 3 sau figura 4, unde curba AB este o porțiune din C, pe care sînt date valorile lui $u\ (x,\ y)$.

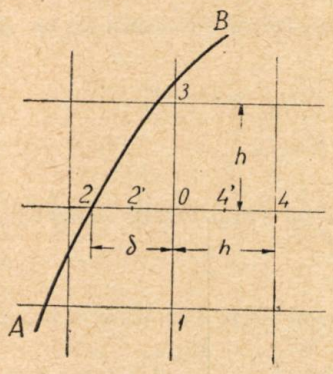


Fig. 3

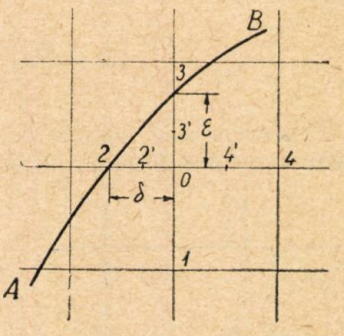


Fig. 4

Am notat cu δ și ε distanța de la punctul 0 la punctul unde curba intersectează dreapta orizontală, respectiv verticală a rețelei care trece prin 0. În orice caz avem $\varepsilon < h$ și $\delta < h$. Am văzut că într-un punct ordinar al rețelei, relația căutată este dată de formula (4). Pentru a o determina într-un nod special, procedăm analog, păstrînd aceleași notații ca mai sus. Avem [16]

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{4'} \simeq \frac{u_4 - u_0}{h} \; ; \; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{2'} \simeq \frac{u_0 - u_2}{\delta}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 \simeq \frac{\dfrac{u_4 - u_0}{h} - \dfrac{u_0 - u_2}{\delta}}{\dfrac{h + \delta}{2}} \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \simeq \frac{u_1 + u_3 - 2u_0}{h^2}. \tag{6}$$

Introducînd expresiile (5) și (6) în relația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = K \tag{7}$$

obţinem formula aproximativă

$$u_0 = \frac{\delta}{h+\delta}\frac{u_1+u_3}{2} + \frac{h}{h+\delta}\frac{\delta u_4 + h u_2}{h+\delta} - K\frac{\delta h^2}{2(h+\delta)}. \tag{8}$$

Pentru un punct special de tipul celui din figura 4 procedăm în mod analog şi obţinem

$$u_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}\frac{h u_2 + \delta u_4}{h+\delta} + \frac{\delta}{\varepsilon+\delta}\frac{h u_3 + \varepsilon u_1}{h+\varepsilon} - K\frac{\delta\varepsilon h}{2(\varepsilon+\delta)}. \tag{9}$$

În cazul reţelei dreptunghiulare (fig. 5) un calcul de acelaşi fel ne dă formula aproximativă

$$u_0 = \frac{a^2(u_1+u_3) + b^2(u_2+u_4) - a^2 b^2 K}{2(a^2+b^2)}. \tag{10}$$

Dacă în (10) facem $a=b$ aceasta devine (4).

Pentru a deduce formula aproximativă în cazul reţelei exagonale oarecare

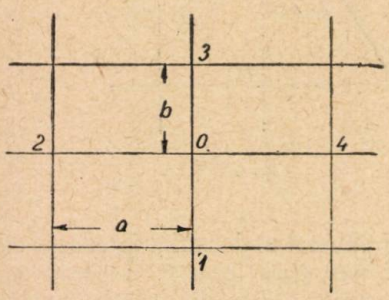


Fig. 5

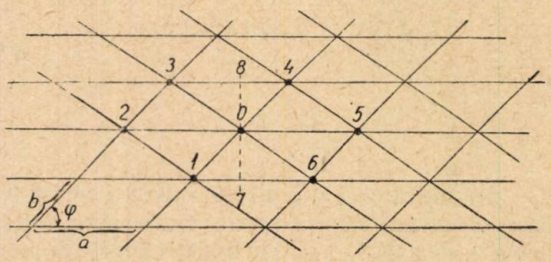


Fig. 6

(fig. 6), considerăm întîi punctele auxiliare 7 şi 8, care împreună cu 2 şi 5 formează nodurile unei reţele dreptunghiulare. Valorile în punctele 7 şi 8 se scriu apoi ca mai sus în funcţie de valorile în punctele 1 şi 6, respectiv 3 şi 4 şi obţinem

$$u_0 = \frac{\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} - K\frac{\sin^2\varphi}{2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}, \tag{11}$$

unde

$$\lambda_1 = \frac{1}{b^2} - \frac{\cos\varphi}{ab}\ ;\quad \lambda_2 = \frac{1}{a^2} - \frac{\cos\varphi}{ab}\ ;\quad \lambda_3 = \frac{\cos\varphi}{ab}\ ;\quad S_i = \frac{u_i + u_{i+3}}{2}\ (i=1,2,3).$$

Dacă $\varphi = \frac{\pi}{2}$ obţinem formula (10). Dacă $\varphi = \frac{\pi}{3}$ şi $a=b$ obţinem formula aproximativă pentru reţeaua exagonală regulat (fig. 7)

$$u_0 = \frac{u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6}{6} - K\frac{a^2}{4} \tag{12}$$

Pentru studiul problemelor propuse ne mai rămîne de stabilit o singură formulă aproximativă pentru mișcarea axial simetrică, pe care însă o vom stabili, cînd va interveni în considerațiile noastre.

3. Eroarea rețelelor

Fiecare formulă aproximativă din cele scrise mai sus prezintă o anumită eroare, care depinde de forma rețelei și de pasul ei [14] *).

În cazul rețelei pătrate de pas h avem, de exemplu, pentru ecuația Laplace

$$\frac{1}{h^2} \diamondsuit u_0 = \Delta u + R_0 ,$$

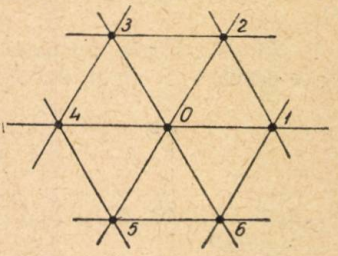


Fig. 7

unde am notat (fig. 2)

$$\diamondsuit u_0 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4 u_0$$

și

$$R_0 = \frac{2h^2}{4!}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right] + \frac{2h^4}{6!}\left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right] + \cdots$$

Pentru rețeaua exagonală de pas h, avem, tot pentru ecuația lui Laplace, relația

$$\sum_1^6 u_i - 6 u_0 = \frac{3h^2}{2!}\Delta u + \frac{9}{4}\frac{h^4}{4!}\Delta\Delta u +$$

$$+ \frac{h^6}{6!}\left(\frac{33}{16}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 15\,\frac{3}{16}\,\frac{\partial^6 u}{\partial x^4\,\partial y^2} + 15\,\frac{9}{16}\,\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{27}{16}\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right) + \cdots$$

C. Runge (citat după [16] **)) dă următoarea formulă pentru evaluarea erorii

$$\varepsilon_h(x, y) = \frac{U_h(x, y) - U_{2h}(x, y)}{2^n - 1}, \tag{13}$$

unde s-a notat cu:

$U_h(x, y)$, valoarea aproximativă a soluției în punctul (xy), la rețeaua de pas h;

$U_{2h}(x, y)$, valoarea aproximativă a soluției în punctul (x, y), la rețeaua de pas $2h$;

ε_h (x, y), diferența $u(x, y) - U_h(x, y)$, $u(x, y)$ fiind valoarea exactă a funcției necunoscute în punctul (x, y);

n, ordinul erorii.

În formula (13) intervin așadar numai valorile aproximative ale funcției, la 2 pași diferiți succesivi în același punct al lui D. Datorită expresiei sale simple, această formulă se aplică foarte ușor.

*) p. 198.
**) p. 41.

II. SCURGEREA FLUIDELOR GRELE ŞI VÎSCOASE ÎN CANALE DE DIFERITE SECŢIUNI

1. Ecuaţia repartiţiei vitezelor în scurgerea laminară; condiţii la limită

Să considerăm un canal de secţiune transversală oarecare (fig. 8) mărginită de o curbă C, înclinat de un unghi α faţă de orizontală, în aşa fel încît să se realizeze o mişcare uniformă. Să notăm cu $u(x, y)$ viteza fluidului într-o secţiune transversală oarecare şi cu ν coeficientul de viscozitate cinematică al fluidului.

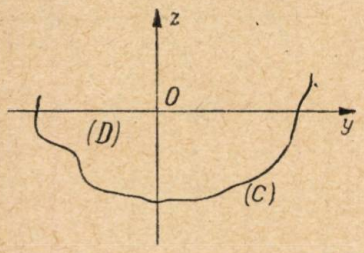


Fig. 8

Se ştie că viteza satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = K, \tag{14}$$

unde

$$K = -\frac{g \sin \alpha}{\nu}.$$

Pe conturul C viteza este nulă, iar la suprafaţa liberă efortul tangenţial poate fi considerat nul sau diferit de zero, după cum frecarea fluidului cu aerul este neglijabilă sau nu. În primul caz avem condiţiile la limită

$$u[y, f(y)] = 0 \quad \text{şi} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \tag{15}$$

unde $z = f(y)$ este ecuaţia conturului C. În al doilea caz avem condiţiile la limită

$$u[y, f(y)] = 0 \quad \text{şi} \quad u[y, 0] = \varphi(y), \tag{16}$$

unde $\varphi(y)$ este repartiţia vitezei la suprafaţa liberă [12].

Vom arăta că problema integrării ecuaţiei (14) cu condiţiile la limită (15), poate fi adusă la rezolvarea unei probleme Dirichlet. Să considerăm că avem de integrat ecuaţia (14) pe domeniul D din figura 8 cu condiţiile

$$u(y, z) = 0 \quad \text{pe } C$$

şi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0.$$

Să considerăm funcţia simetrică

$$v(y, z) = u(y, -z) = u(y, z).$$

Avem în mod evident

$$\Delta v = K$$

în domeniul D' simetric lui D faţă de axa $z = 0$. Pe de altă parte, din ecuaţia $\Delta u = K$ deducem prin derivare în raport cu z

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{sau} \quad \Delta \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

În plus avem

$$\frac{\partial u(y,z)}{\partial z} = -\frac{\partial u(y,-z)}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial z},$$

relație care arată că derivata după normala la axa $z=0$ ia valori egale și de semne contrarii în punctele simetrice față de această axă.

Să arătăm că funcția

$$F(y,z) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} & \text{pentru } (y,z) \in D \\ -\dfrac{\partial u}{\partial z} & \text{pentru } (y,z) \in D' \end{cases}$$

se anulează pe această axă. Avem într-adevăr, după formula lui Poisson scrisă pentru un cerc de rază ρ interior lui $D+D'$ cu centrul pe axă (fig. 9),

$$F(y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \mu(y,z)\,\frac{R^2-\rho^2}{Rr^2}\,ds.$$

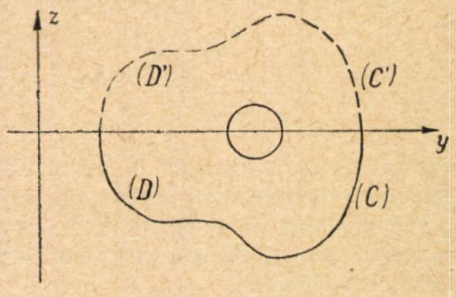


Fig. 9

Integrala e extinsă la conturul cercului C_1, iar $\mu(y,z)$ sînt valorile lui $\dfrac{\partial u(y,z)}{\partial z}$ pe cerc (egale și de semne contrarii pe cele două semicercuri simetrice). Se vede că $F(y,0)=0$, căci elementele egale și de semne contrarii ale integralei se anulează.

Avem așadar de integrat ecuația (14) în domeniul $D+D'$ cu $u=0$ pe conturul $C+C'$. Să observăm că scurgerea fluidului printr-o conductă de profil $D+D'$ este și ea caracterizată prin ecuația (12) cu aceleași condiții pe contur.

Problema aceasta a fost abordată și de alți autori și rezolvată cu alte metode aproximative în diferite cazuri particulare. J. Boussinesq [20] studiază mișcarea într-o conductă de profil în formă de poligon regulat cu un număr oarecare m de laturi, rezolvînd ecuația $\Delta u = -K$ cu $u=0$ pe conturul poligonal, căutînd o soluție de forma

$$u = -\frac{Kx^2}{2} + A_0 + A_1 x + B_1 y + A_2(x^2-y^2) + B_2 \cdot 2xy + \ldots$$

$$+ A_n\left(x^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots\right) +$$

$$+ B_n\left(\frac{n}{1}x^{n-1}y - \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots\right).$$

Polinoamele din paranteze sînt polinoame armonice de gradul n. Cele $2n+1$ constante arbitrare care intervin, se determină din condiția ca în $2n+1$, puncte ale conturului poligonal, funcția u să se anuleze.

Soluția problemei se dă sub forma $V_{max} = k'K\sigma$ și $V_{med} = kK\sigma$ unde: K este constanta din membrul al doilea al ecuației (14), σ suprafața conductei de profil

studiat, iar k' şi k două constante ce trebuie determinate. Aplicînd această metodă se găseşte

$$k = -\frac{0{,}0704}{\sqrt{m \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}}\ ; \quad k' = -\frac{0{,}144}{\sqrt{m \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}}\ .$$

M. Paschoud [21] rezolvă problema în aceleaşi condiţii, luînd

$$u = -\frac{K}{4} r^2 \left[\frac{x^2 + y^2}{r^2} - A_{0m} + \frac{A_{1m}}{r^m} p_m(x, y) + \frac{A_{2m}}{r^{2m}} p_{2m}(x, y) + \dots \right],$$

unde r este raza cercului înscris poligonului regulat şi m este gradul polinomului armonic respectiv. Constantele A_{im} se determină din condiţia ca mijloacele laturilor poligonului să se găsească pe conturul de ecuaţie $u(x, y) = 0$ şi din condiţia ca aceste puncte să constituie un contact de ordin infinit între conturul $u=0$ şi laturile poligonului.

Soluţia e dată sub aceeaşi formă ca în lucrarea [21], unde

$$k = -\frac{1}{2m \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}} \left[-\frac{3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}}{12} + \frac{m(m-1) + 2}{2m(m-1)} + \frac{2}{m(m+2)(m^2-1) \cos^m\left(\frac{\pi}{m}\right)} \right],$$

$$k' = -\frac{m(m-1) + 2}{4m^2 (m-1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}\ .$$

A. Getti [22] rezolvă problema inversă construind conturul $u=0$ pentru diferite valori ale constantelor, folosind astfel o metodă deja întrebuinţată în elasticitate în problema torsiunii barelor.

Calculele făcute după metodele indicate în lucrările de mai sus sînt mult mai dificile în cazul unor contururi de o formă poligonală neregulată.

În sfîrşit, în lucrarea [12] se dă soluţia exactă a problemei în cazul scurgerii într-un canal dreptunghiular la care se cunoaşte repartiţia de viteze la suprafaţa liberă.

Soluţia are forma

$$u(\eta, \zeta) = \sum_1^\infty \frac{16}{(2n-1)^3 \pi^3} \cos \frac{(2n-1)\pi\eta}{2}$$

$$\left\{ \frac{(-1)^{n-1} \left[2 + K \left(1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi h}{2} \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi h}{2}} \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi\zeta}{2} + (-1)^n K \left[1 - \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi\zeta}{2} \right] \right\}.$$

2. Considerații de similitudine

Înainte de a rezolva problema propusă să mai facem cîteva considerații cu caracter general. Ecuația mișcării

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{g \sin \alpha}{\nu}$$

se poate scrie sub formă adimensională punînd

$$u^* = \frac{u}{\bar{u}} \; ; \quad \eta = \frac{y}{R} \; ; \quad \zeta = \frac{z}{R} \, ,$$

unde R este raza hidraulică și $\bar{u}$ viteza medie în secțiunea de scurgere. Obținem

$$\frac{\bar{u}}{R^2}\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \zeta^2}\right] = -\frac{g \sin \alpha}{\nu}$$

sau

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \zeta^2} = -\frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{R^2}{\bar{u}} = -\frac{\mathrm{Re} \sin \alpha}{\mathrm{Fr}} \, . \tag{17}$$

Mișcarea depinde așadar de numerele caracteristice ale scurgerii (număru Reynolds și numărul Froude) precum și de înclinarea canalului α.

Alte considerații dimensionale ne vor permite să tragem anumite concluzii asupra criteriului de similitudine al mișcării găsit mai sus. Din ecuația $\Delta u = K$ și condițiile la contur se vede că viteza depinde de K și de parametrii geometrici ai canalului. Viteza va fi așadar caracterizată prin relația

$$F(\bar{u}, K, a, b, c, \ldots) = 0$$

unde $a, b, c, \ldots$ sînt parametrii geometrici ai canalului. Conform teoremei π [23] putem scrie această relație sub forma

$$F(\pi_1, \pi_2, \ldots) = 0.$$

Alegînd K și a ca mărimi fundamentale, expresia produșilor adimensionali este

$$\pi_1 = \frac{\bar{u}}{Ka^2} \; ; \quad \pi_2 = \frac{b}{a} \; ; \quad \pi_3 = \frac{c}{a} \; ; \ldots$$

Rezultă

$$F\left(\frac{\pi}{Ka^2}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0,$$

adică

$$\frac{\bar{u}}{Ka^2} = f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right).$$

Dar cum

$$\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Re}\sin\alpha} = \frac{\dfrac{\bar{u}^2}{ag}}{\dfrac{\bar{u}a}{\nu}\sin\alpha} = \frac{\bar{u}}{\dfrac{g\sin\alpha}{\nu}a^2} = \frac{\bar{u}}{Ka^2}$$

avem în cele din urmă

$$\frac{\mathrm{Re}\sin\alpha}{\mathrm{Fr}} = \psi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right). \tag{18}$$

Criteriul de similitudine este aşadar funcţie numai de parametrii geometrici ai canalului. Rezultă că pentru a asigura similitudinea mişcărilor laminare în canale, este suficient să asigurăm similitudinea geometrică.

3. Profile studiate

În toate exemplele studiate am presupus frecarea între aer şi apă, neglijabilă cum se face de obicei [24]. Această ipoteză este îndreptăţită de rezultatele experimentale obţinute de Allen [25]; el face un număr mare de măsurători de viteze medii în canale deschise de forme dreptunghiulare şi obţine, în cazul regimului laminar, o concordanţă bună cu rezultatele teoretice găsite pentru conducta dreptunghiulară de J. Boussinesq [26] şi R. J. Cornish [27] (ceea ce echivalează precum am văzut cu condiţia ca $\bar{\sigma}=0$ pe suprafaţa liberă a canalului de profil identic cu al semiconductei). Se constată o distribuţie parabolică a vitezelor pe suprafaţa liberă.

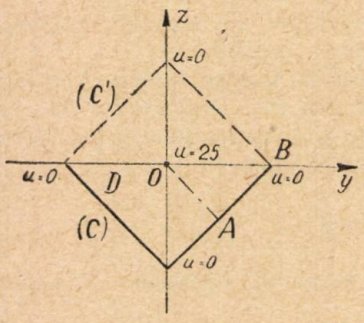


Fig. 10

Redăm, în cele de mai jos, amănunţit calculul unui profil la care există soluţia exactă, pentru a se desprinde metoda generală de calcul, pentru a compara rezultatele aproximative cu cele exacte şi pentru a evita în modul acesta repetările inutile. Am considerat un profil de forma unui triunghi dreptunghic isoscel. Rezultatele le vom compara cu cele obţinute de J. Boussinesq pentru conducta pătrată, căci am arătat că în cazul profilelor simetrice, soluţia problemei scurgerilor în conducte e identică cu cea a scurgerii în canale de profile identice cu ale semiconductei.

Avem de integrat ecuaţia $\Delta u = K$ în domeniul $D+D'$, unde D' este simetricul lui D faţă de axa Oy. Se vede uşor că K poate lua orice valoare, căci $\Delta(cu) = cK$, unde c este o constantă arbitrară; noi am luat, pentru uşurinţa calculelor, $K = -100$. Din cauza simetriei figurii (fig. 10) putem calcula valorile aproximative ale lui u numai în porţiunea OAB. Forma figurii arată că putem folosi reţeaua pătrată. Am ales reţeaua de cel mai mare pas posibil care acoperă exact domeniul. În cazul nostru aceasta este posibil dacă luăm ca pas unitate jumătatea OB a ipotenuzei triunghiului. Din figura 10 se vede că avem de calculat o singură valoare

(cea din originea axelor de coordonate). Ea se determină direct din formula (4) și obținem $u_0 = 25$. La pasul următor avem de calculat o singură valoare nouă, cea din punctul C pe care o calculăm ca mai sus $\left(\text{cu } h = \frac{1}{2}\right)$. Verificăm fiecare din aceste valori cu aceeași formulă aproximativă pînă cînd ele nu se vor mai schimba. Sîntem siguri că după un număr finit de verificări aceste valori nu se mai schimbă, deoarece s-a arătat că procesul de iterații este convergent, oricare ar fi valorile inițiale. Obținem în cele din urmă valorile din figura 11. Pentru o rețea și mai fină, proce

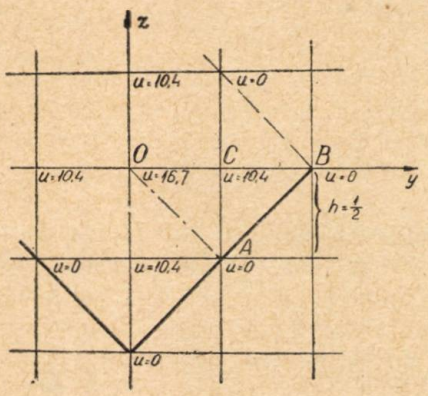


Fig. 11

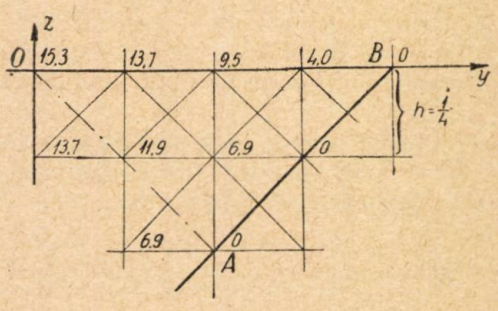


Fig. 12

deul de calcul al valorilor u în noduri este analog și verificarea lor de asemenea. Rezultatul este cel din figura 12.

Valorile din nodurile rețelei și mai fine le calculăm în două etape. Calculăm mai întîi valorile aproximative în centrele pătratelor (considerînd semidiagonala pătratului ca pas al unei rețele auxiliare) și cu aceasta completăm valorile funcției în toate nodurile noii rețele. Corectarea valorilor se face ca și în celelate cazuri.

Am fi putut porni direct calculul de la o rețea oricît de fină, dînd în nodurile ei valori arbitrare funcției. Conform teoremei deja amintite, verificările se opresc după un număr mai mic sau mai mare de încercări, după cum valorile luate sînt mai apropiate sau mai depărtate de cele reale. Nu am urmat această cale, căci ni s-a părut mai arbitrară și mai anevoioasă, decît cea arătată mai sus.

În figurile 13, 14 și 15 dăm valorile obținute în toate cazurile, calculate la rețele al căror pas rezultă din fiecare figură în parte, unde toate elementele mișcării sînt exprimate în mărimi adimensionale *).

Eroarea maximă a funcției obținute la pasul $h = \frac{1}{32}$ calculată cu formula lui Runge (13) este inferioară lui 1 %. Viteza medie și viteza maximă $u^* = +0{,}00708$ și $u_{max} = +0{,}148$ calculate de noi, reprezintă o bună aproximație față de rezultatele obținute cu ajutorul soluției exacte $\overline{u}^* = +0{,}0703$ și $\overline{u}^*_{max} = +0{,}147$.

*) Toate vitezele adimensionale ce urmează sînt de forma: $u^* = -\frac{u}{ka^2}$.

În figurile 16, 17, 18, 19, 20 şi 21 sînt prezentate repartiţia de viteze şi liniile de egală viteză în canale de diferite forme, ale căror elemente sînt arătate pe figurile respective. Datorită formei lor speciale ($\alpha = 45°$) am putut folosi în toate

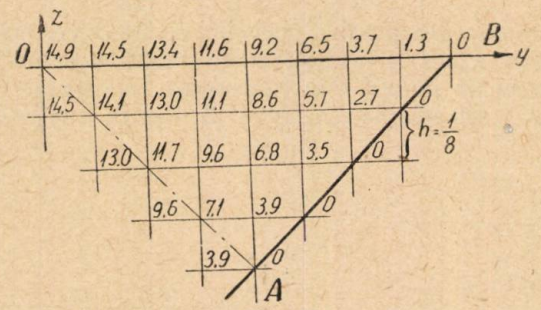


Fig. 13

aceste cazuri reţeaua pătrată şi formula aproximativă (4), unde evident $f(x, y) = K = -100$. În toate aceste cazuri am considerat ca pas unitar lungimea fundului, însemnată în figură cu a.

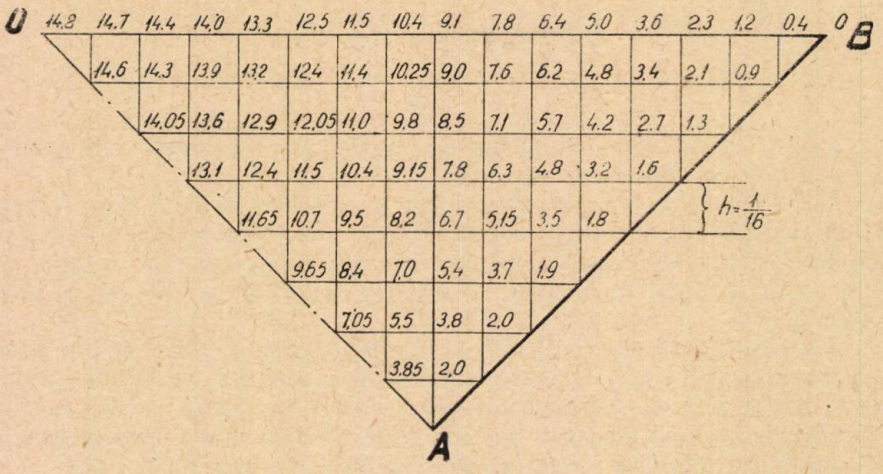


Fig. 14

În figura 16 avem $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, viteza medie $\bar{u}^* = +0{,}615$ şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}315$; 0,57; 0,78; 0,95; 1,085; 1,18; 1,235.

În figura 17 avem $\frac{a}{b} = 2$, viteza medie $\bar{u}^* = +0{,}0629$ şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}053$; 0,091; 0,1135.

În figura 18 avem $\frac{a}{b} = 4$, viteza medie $\bar{u}^* = +0{,}0178$ şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}0136$; 0,0233; 0,0292.

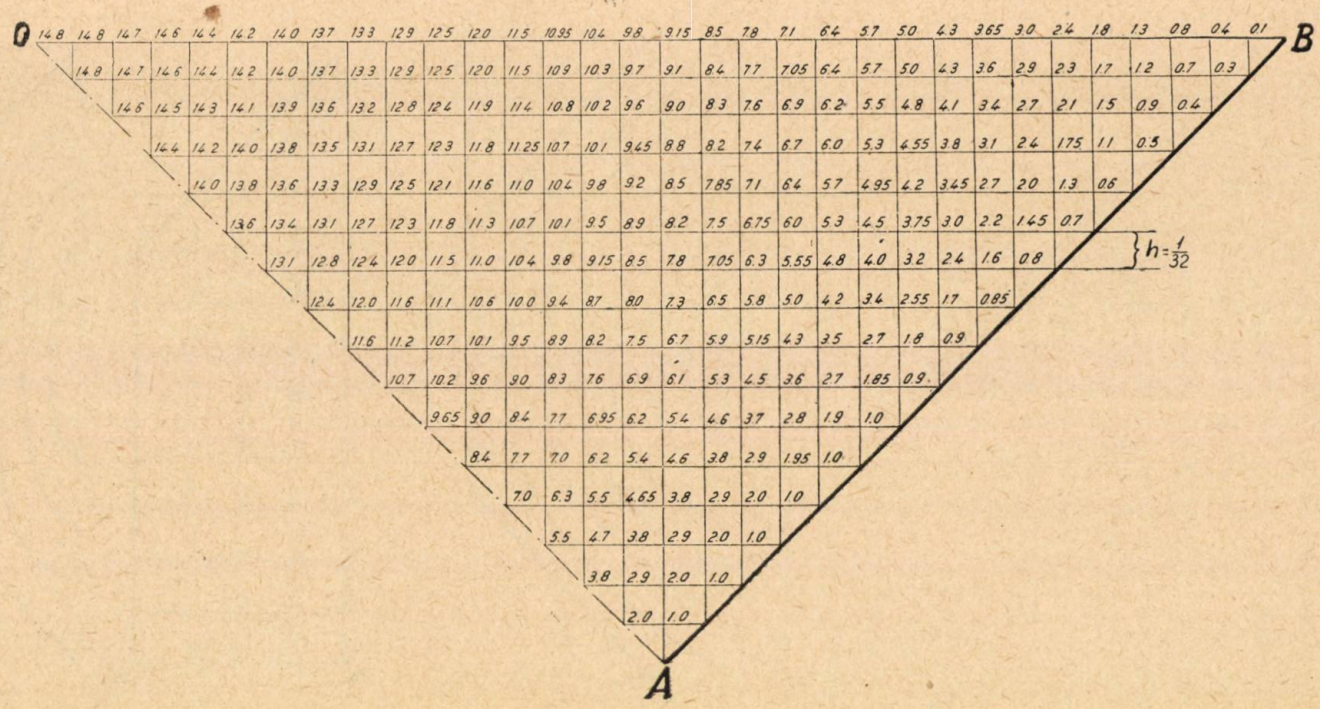

O
B
A
h=1/32
148 148 147 146 144 142 140 137 133 129 125 120 115 1095 104 98 915 85 78 71 64 57 50 43 365 30 24 18 13 08 04 01
148 147 146 144 142 140 137 133 129 125 120 115 109 103 97 91 84 77 705 64 57 50 43 36 29 23 17 12 07 03
146 145 143 141 139 136 132 128 124 119 114 108 102 96 90 83 76 69 62 55 48 41 34 27 21 15 09 04
144 142 140 138 135 131 127 123 118 1125 107 101 945 88 82 74 67 60 53 455 38 31 24 175 11 05
140 138 136 133 129 125 121 116 110 104 98 92 85 785 71 64 57 495 42 345 27 20 13 06
136 134 131 127 123 118 113 107 101 95 89 82 75 675 60 53 45 375 30 22 145 07
131 128 124 120 115 110 104 98 915 85 78 705 63 5.55 48 40 32 24 16 08
124 120 116 111 106 100 94 87 80 73 65 58 50 42 34 255 17 085
116 112 107 101 95 89 82 75 67 59 515 43 35 27 18 09
107 102 96 90 83 76 69 61 53 45 36 27 185 09
965 90 84 77 695 62 54 46 37 28 19 10
84 77 70 62 54 46 38 29 195 10
70 63 55 465 38 29 20 10
55 47 38 29 20 10
38 29 20 10
20 10

Fig. 15

O	125.5	125	124	122	120.5	117.5	114	109.5	105	99.5	94	87.5	81	73.5	66	58	50	42	34	26	18.5	12	6	2
	125	124.5	123.5	122	120	117	113.5	109	104.5	99	93.5	87	80.5	73	65	57	49	41	33	25	17.5	10.5	4.5	
	123.5	123	122	120.5	118.5	115.5	112	107.5	103	97.5	92	85.5	78.5	71	63	55	46.5	38	30	22	14	6.5		
	121	120.5	119.5	118	116	113	109.5	105	100.5	95	89	82.5	75	67.5	59.5	51	42.5	33.5	25	16.5	8			
	118	117.5	116.5	115	112.5	109.5	106	101.5	96.5	91	85	78	70.5	63	54.5	45.5	36.5	27.5	16.5	9				
	113.5	113	112	110.5	108	105	101.5	97	92	86.5	80	73	65	57	48	39	29.5	20	10					
	108.5	108	107	105.5	103	100	96	91.5	86.5	80.5	74	66.5	58.5	50	40.5	31	21	10.5						
	102.5	102	101	99.5	97	94	90	85.5	80	74	67	59.5	51	42	32	22	11							
	95	95	94	92.5	90	87	83	78.5	73	66.5	59	51	42	32.5	22.5	11.5								
	87	87	86	84.5	82	79	75	70.5	65	58	50.5	42	32.5	22.5	11.5									
	78	78	77	75.5	73.5	70.5	66.5	62	56	49	41.5	32.5	22.5	11.5										
	68	68	67	65.5	63.5	61	57	52.5	46.5	39.5	31.5	22	11.5											
	57	57	56	55	53	50.5	47	42.5	37	29.5	21	11												
	45	44.5	44	43	41.5	39.5	36.5	32.5	27	19.5	10.5													
	31.5	31.0	30.5	30.0	29.0	27.0	25.0	22.0	17.0	9.5														
	16.5	16.5	16.0	15.5	15.0	14.0	13.0	11.5	7.5															
O'																								

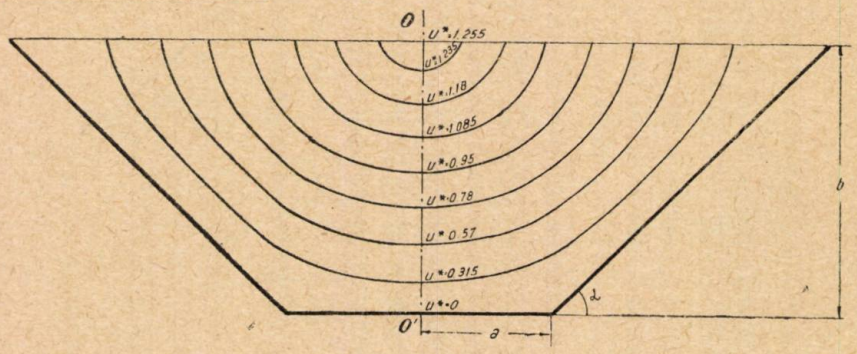
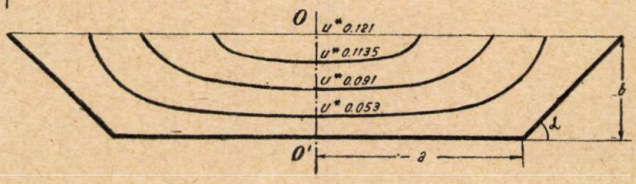


Fig. 16

O	12.1	12.05	11.9	11.7	11.4	10.9	10.1	9	7.5	5.5	3.3	1.2
	11.35	11.3	11.2	11	10.7	10.2	9.5	8.4	6.9	4.8	2.4	
	9.1	9.1	9	8.8	8.6	8.2	7.6	6.7	5.2	2.9		
	5.3	5.3	5.25	5.2	5	4.8	4.5	3.9	2.7			
O'												



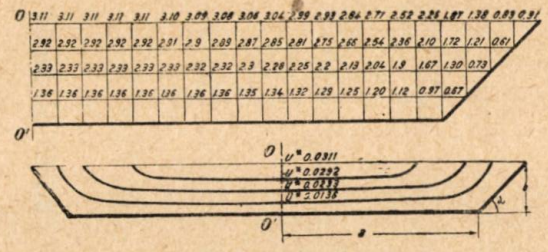


Fig. 18

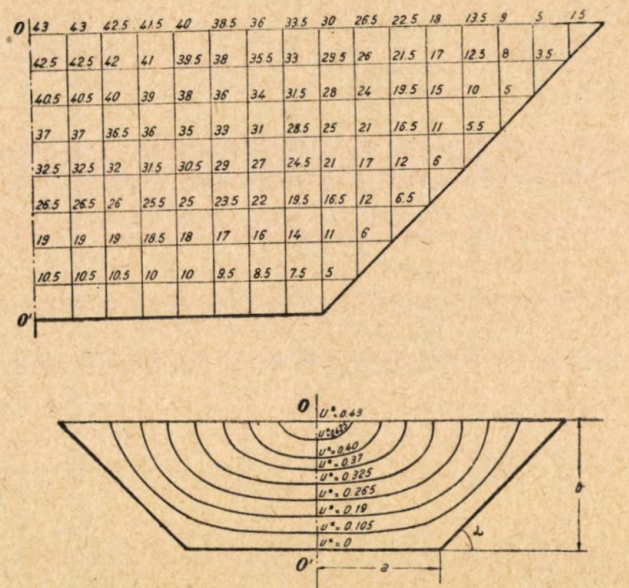
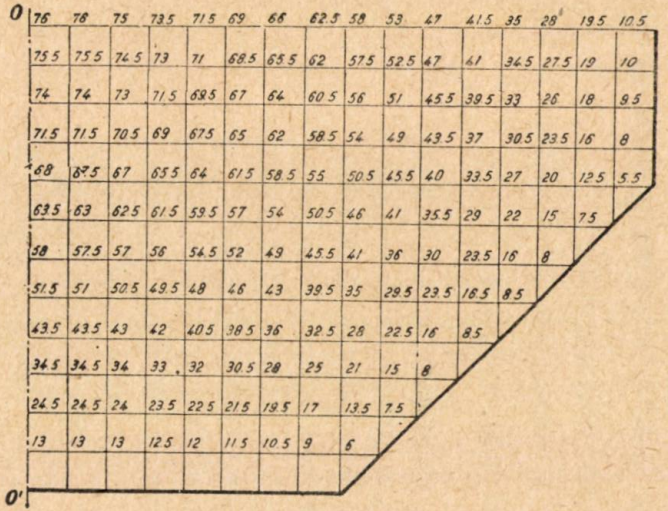


Fig. 19



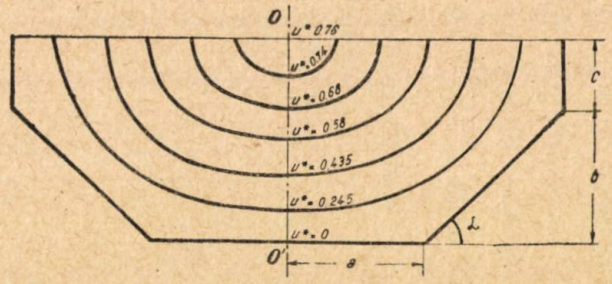


Fig. 20

În figura 19 avem $\frac{a}{b} = 1$, viteza medie $\overline{u}^* = +0{,}214$ şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}105$; 0,19; 0,265; 0,325; 0,37; 0,4; 0,425.

În figura 20 avem $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{c} = 2$, viteza medie $\overline{u}^* = +0{,}3797$ şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}245$; 0,435; 0,58; 0,68; 0,74.

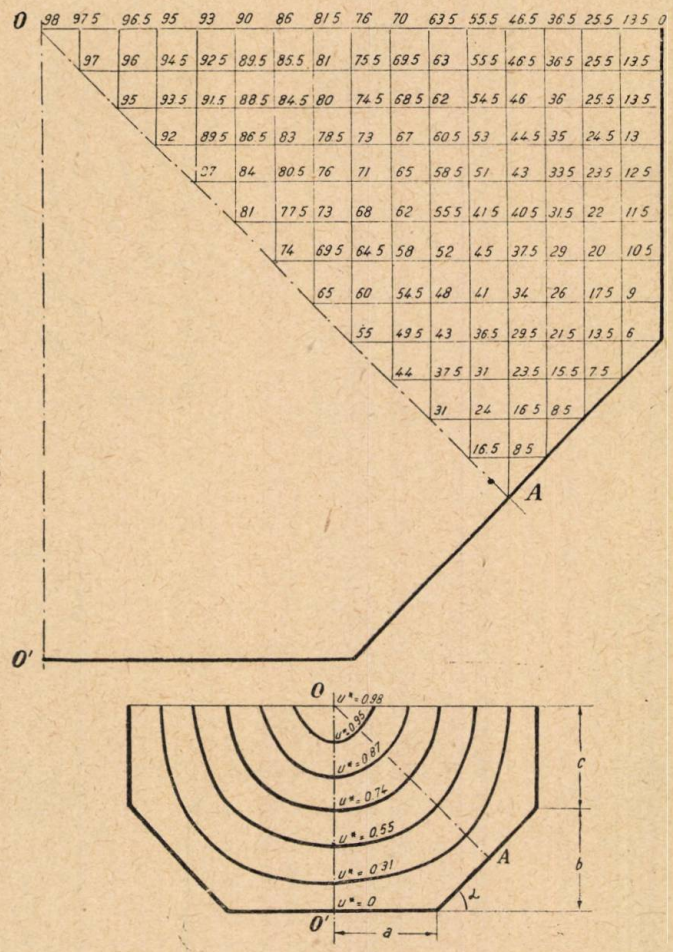
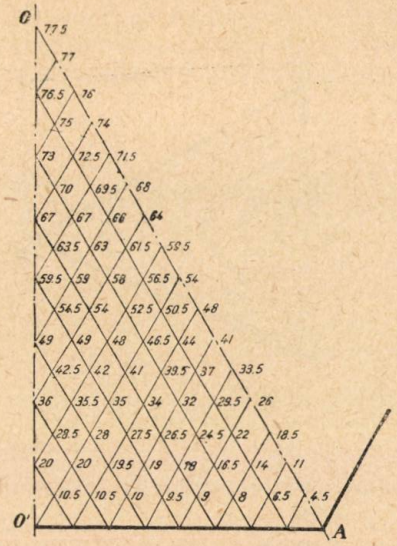


Fig. 21

În figura 21 avem $\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{c} = 1$, viteza medie $\overline{u}^* = +0{,}4893$ şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}31$; 0,55; 0,74; 0,87; 0,95;

În figurile 22, 23 şi 24 s-a indicat repartiţia de viteze şi liniile de egală viteză în canale de o formă care se acoperă exact cu o reţea exagonală regulată ($\alpha = 60°$). În aceste cazuri s-a folosit formula aproximativă (10).



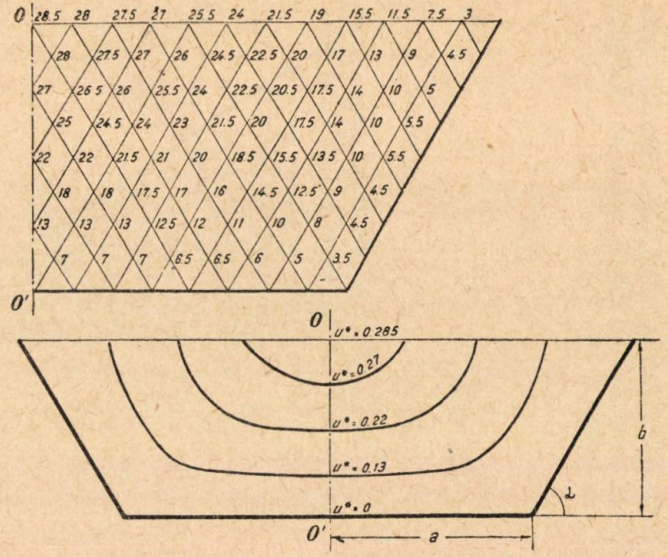


Fig. 23

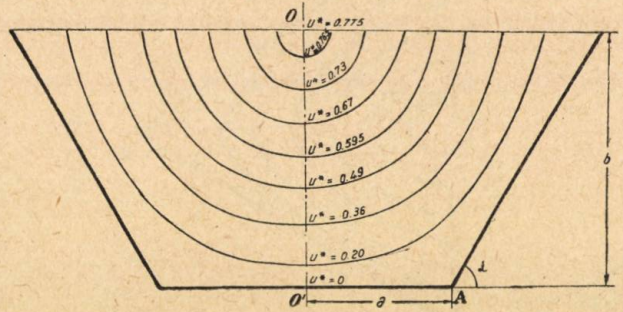


Fig. 22

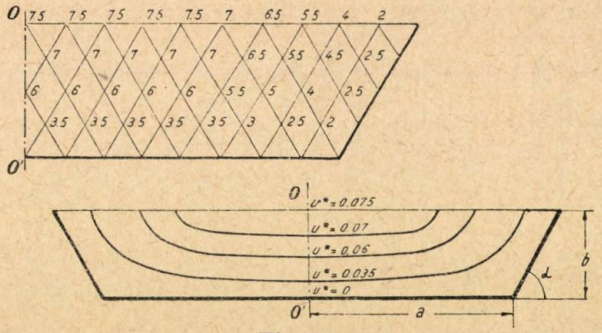
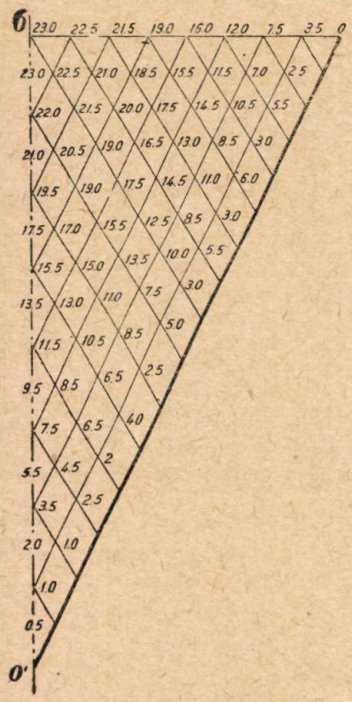
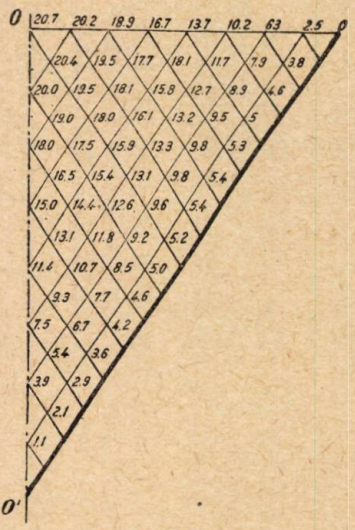


Fig. 24

În figura 22 sînt prezentate repartiţia de viteze şi liniile de egală viteză $u^* = +0{,}2;\ 0{,}36;\ 0{,}49;\ 0{,}595;\ 0{,}67;\ 0{,}73;\ 0{,}765$ într-un canal semiexagonal regulat. Datorită simetriei figurii putem calcula repartiţia de viteze numai în triunghiul din figură. În acest caz avem $\overline{u}^* = +0{,}3804$.





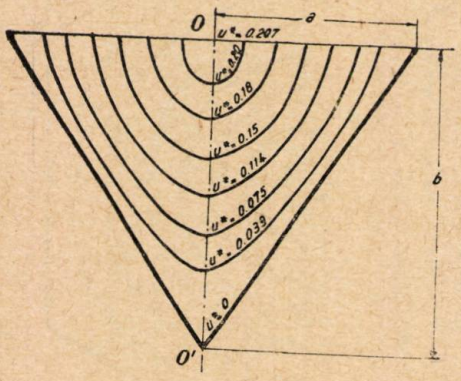


Fig. 25

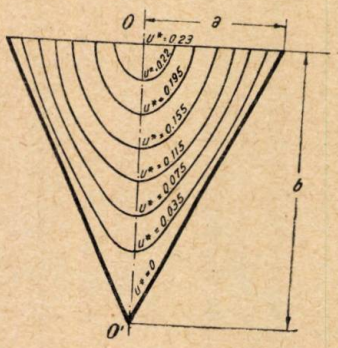


Fig. 26

Cazul canalului semiexagonal regulat a fost studiat de M. Paschoud [21]. El găseşte $\overline{u}^* = +0{,}382$ şi $\overline{u}^*_{\max} = +0{,}778$. Diferenţa rezultatelor obţinute de el, faţă de cele obţinute de noi, rămîne inferioară lui 1 %.

În figura 23 avem $\frac{a}{b} = \frac{8}{7}$, viteza medie $\bar{u}^* = +0{,}1427$ și liniile de egală viteză $u^* = +0{,}13;\ 0{,}22;\ 0{,}27$.

În figura 24 avem $\frac{a}{b} = \frac{8}{3{,}5}$, viteza medie $\bar{u}^* = +0{,}0416$ și liniile de egală viteză $u^* = +0{,}035;\ 0{,}06;\ 0{,}07$.

În figura 25 sînt trecute rezultatele în cazul scurgerii într-un canal triunghiular în care $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. În acest caz am fi putut folosi o rețea exagonală neregulată și formula aproximativă (9), însă putem considera nodurile acestei rețele ca noduri ale unei rețele pătrate, ceea ce este mult mai avantajos pentru calcul. Am obținut în acest caz $\bar{u}^* = +0{,}102$.

S-au trasat curbele de egală viteză pentru

$$u^* = +0{,}035;\ 0{,}075;\ 0{,}115;\ 0{,}155;\ 0{,}195;\ 0{,}22.$$

În sfîrșit, în figura 26 sînt reprezentate rezultatele studiului scurgerii într-un canal triunghiular cu $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. În acest caz am folosit rețeaua exagonală neregulată, deci formula aproximativă (9), unde pentru pasul $h = \frac{1}{8}$, la care ne-am oprit, avem

$$\lambda = \lambda_3 = 39{,}4;\quad \lambda_2 = 24{,}6.$$

În acest caz $\bar{u}^* = +0{,}0966$. S-au trasat curbele de egală viteză pentru $u^* = +0{,}039;\ 0{,}075\ ;\ 0{,}114;\ 0{,}15\ ;\ 0{,}18;\ 0{,}2$.

Trebuie să observăm că vitezele obținute de noi sînt toate mai mici decît cele exacte, însă cu aceste rezultate nu ne îndepărtăm mult de realitatea fizică. Din experiențele făcute de Allen în canale dreptunghiulare, se constată abateri în minus față de soluțiile exacte ale lui Boussinesq — Cornish pînă la 2 % — 3 % determinate în aceleași ipoteze, ca în cazul de față. În adevăr, la stabilirea ecuațiilor de mișcare și a condițiilor la limită nu am ținut seama de efectul frecării între aer și apă și nici de apariția curenților transversali, care acționează în sensul micșorării vitezei medii.

III. MIȘCAREA FLUIDELOR GRELE CU SUPRAFAȚA LIBERĂ NECUNOSCUTĂ

1. Considerații generale

Să considerăm mișcarea irotațională a unui fluid greu incompresibil, fără viscozitate și de densitate egală cu unitatea, într-un plan vertical. Domeniul fluid este limitat de un perete solid S și de o suprafață liberă L, pe care presiunea este constantă.

Mișcarea fiind raportată la un sistem rectangular de axe yOz (fig. 27), ecuațiile hidrodinamicii se reduc la relația lui Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} V^2 + g z = \text{const.} \tag{19}$$

la care se adaugă relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{(mişcare irotaţională),} \qquad (20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad \text{(ecuaţia continuităţii).} \qquad (21)$$

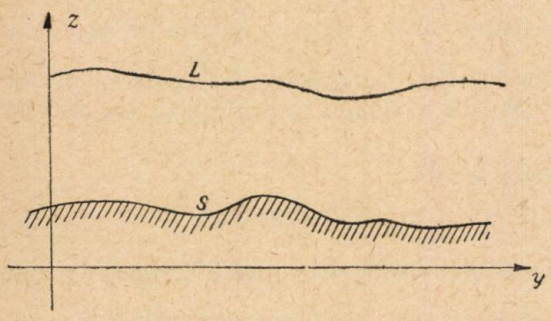


Fig. 27

Din tot domeniul fluid se cunoaşte numai forma peretelui solid S. Cunoscîndu-se viteza la infinit amonte a fluidului, se cere să se determine forma suprafeţei libere L. Ecuaţia (21) este satisfăcută ca şi în cazul fluidelor ideale, punînd

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

unde ψ este funcţia de curent a mişcării. Din ecuaţia (20) rezultă $\Delta \psi = 0$.

Să notăm cu Q debitul de scurgere. Ecuaţia $\psi(y, z) = Q$ este tocmai ecuaţia suprafeţei libere L, dacă $\psi(y, z) = 0$ reprezintă ecuaţia curbei S. Suprafaţa liberă trebuie aleasă în aşa fel, ca pe ea să fie satisfăcută ecuaţia (19). Problema determinării suprafeţei libere în scurgerea fluidelor grele într-un plan vertical, este una dintre cele mai dificile din mecanica fluidelor şi a fost abordată de mai mulţi autori, dintre care citãm: H. Villat [3], H. Poncin [7].

Noi am rezolvat această problemă în trei cazuri particulare, pe care le vom expune în cele de mai jos, aplicînd metoda reţelelor.

2. Scurgerea peste un deversor plan înecat, cu vîna complet deprimată

Să considerăm cazul particular, cînd peretele solid S are forma din figura 28. Presupunem că se realizează o mişcare permanentă, care să aibă aspectul genera arătat în figură, adică obstacolul BC să se comporte ca un deversor plan vertical, iar mişcarea să fie simetrică faţă de un plan ce trece prin el. Aceste ipoteze arată că am neglijat efectul viscozităţii. Vom presupune în plus că mişcarea se efectuează într-un domeniu nelimitat în direcţia x, pentru a considera mişcarea plană (planul figurii). Ne propunem să determinăm suprafaţa liberă L şi forma liniilor de curent. Avem de integrat ecuaţia $\Delta\psi = 0$ în domeniul indicat. Datorită simetriei figurii faţă de axa Oz putem lua în consideraţie numai domeniul mărginit de peretele plan AB, suprafaţa liberă L şi axa Oz.

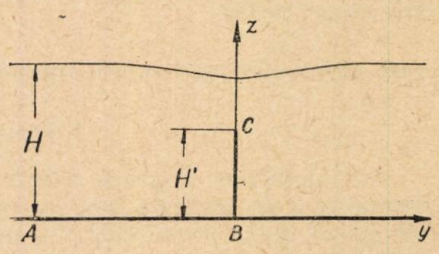


Fig. 28

La infinit amonte avem viteza constantă V_∞ paralelă cu planul de scurgere.

Din expresiile

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = V_\infty \; ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \text{ pentru } \quad y = \infty \cdot$$

deducem $\psi\,(y, z) = f\,(z)$ pentru $y = \infty$, adică

$$u = V_\infty = \frac{d\psi}{dz}$$

sau

$$\psi\,(\infty, z) = V_\infty z + c. \tag{22}$$

Dar cum peretele AB este linia de curent $\psi = 0$, din (22) rezultă $c = 0$. Dacă în plus vom considera $V_\infty = 1$, ceea ce putem admite totdeauna, păstrînd generalitatea problemei, putem deduce din (22) expresia lui $\psi\,(y, z)$ la mari distanțe.

În calcule am considerat cota fluidului la infinit amonte $H = 3$ și înălțimea deversorului $H' = 2$. Pe suprafața liberă L necunoscută avem așadar $\psi = 3$. Dispunem totuși de o relație restrictivă pentru alegerea ei. Pe suprafața liberă am spus că trebuie să se verifice relația lui Bernoulli

$$\frac{V_\infty^2}{2g} + H = \frac{V^2}{2g} + z\,, \tag{23}$$

unde z este cota suprafeței libere într-un punct oarecare al ei și H cea de la infinit. Din relația (23) rezultă

$$V = \sqrt{V_\infty^2 + 2g\,(H - z)}\,.$$

Din condiția ca radicalul să nu fie negativ, deducem

$$z \leqslant H + \frac{V_\infty^2}{2g}$$

sau

$$\frac{z}{H} \leqslant 1 + \frac{\mathrm{Fr}}{2}\,, \tag{24}$$

unde am notat

$$\mathrm{Fr} = \frac{V_\infty^2}{gH}\,.$$

Suprafața liberă fiind aleasă la început, arbitrar, respectînd relația (24) avem de rezolvat o problemă Dirichlet.

În punctele speciale ale domeniului de scurgere (fig. 29) vom aplica formula aproximativă (8), iar în punctele ordinare, formula aproximativă (4). Odată problema rezolvată, trebuie verificat dacă două puncte oarecare ale suprafeţei libere verifică relaţia

$$\frac{V^2}{2g} + z = \text{const.}\ , \tag{25}$$

pe care o vom exprima de asemenea în diferenţe finite. Avem pentru aceasta într-un punct 0 arbitrar al suprafeţei libere (fig. 30)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \simeq \frac{\psi_0 - \psi_2}{l_z}\ ;\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \simeq -\frac{\psi_0 - \psi_1}{l_y}\ ,$$

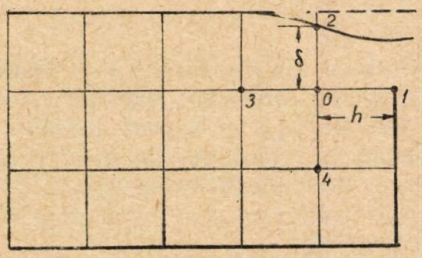


Fig. 29

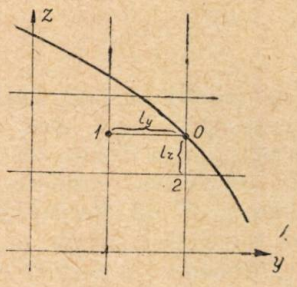


Fig. 30

unde ψ_0, ψ_1, ψ_2 sînt valorile funcţiei ψ respectiv în punctele 0, 1, 2, iar l_z şi l_y lungimile indicate în figură. Relaţia (23) devine în diferenţe finite

$$\frac{\psi_0 - \psi_1}{2g\, l_y^2} + \frac{(\psi_0 - \psi_2)^2}{2g\, l_z^2} + z = \text{const.} \tag{26}$$

În cazul că această relaţie nu este satisfăcută în toate punctele suprafeţei libere, vom modifica forma suprafeţei libere, rezolvăm noua problemă Dirichlet şi verificăm din nou relaţia (26) în cîteva puncte ale sale. Aceste încercări încetează, cînd în toate punctele suprafeţei libere este verificată relaţia (26) cu suficientă exactitate.

Trecerea de la o reţea la alta mai fină, se face ca şi în cazurile studiate în capitolul II. Noi am utilizat o reţea mai fină în apropiere de creasta deversorului şi de suprafaţa lil eră, căci în această regiune ψ (y, z) prezintă variaţii mai mari de la un nod la altul al reţelei, decît în celelalte puncte.

În figura 31 sînt date valorile definitive ale lui ψ în nodurile reţelei, care acoperă domeniul de scurgere. În acest caz am obţinut eroarea relativă maximă

$$\frac{C - C_\infty}{C_\infty} \cdot 100\% = \frac{3{,}051 - 2{,}973}{3{,}051} 100\% = 2{,}56\%\ ,$$

unde C_∞ şi C sînt respectiv valorile constantei din formula (24) calculată în punctul de la infinit al suprafeţei libere şi într-un punct curent al ei. Eroarea maximă calculată cu formula lui Runge, este de 2,05 % în punctul $y = 0$, $z = 2{,}25$. Avem $\varepsilon = \dfrac{130 - 122}{2^2 - 1} = 2{,}66$, adică $\varepsilon = 2{,}05\ \%$.

Figura 32 reprezintă spectrul hidrodinamic al mişcării pentru valorile lui $\psi = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 1{,}75;\ 2;\ 2{,}25;\ 2{,}5;\ 2{,}75;\ 3$.

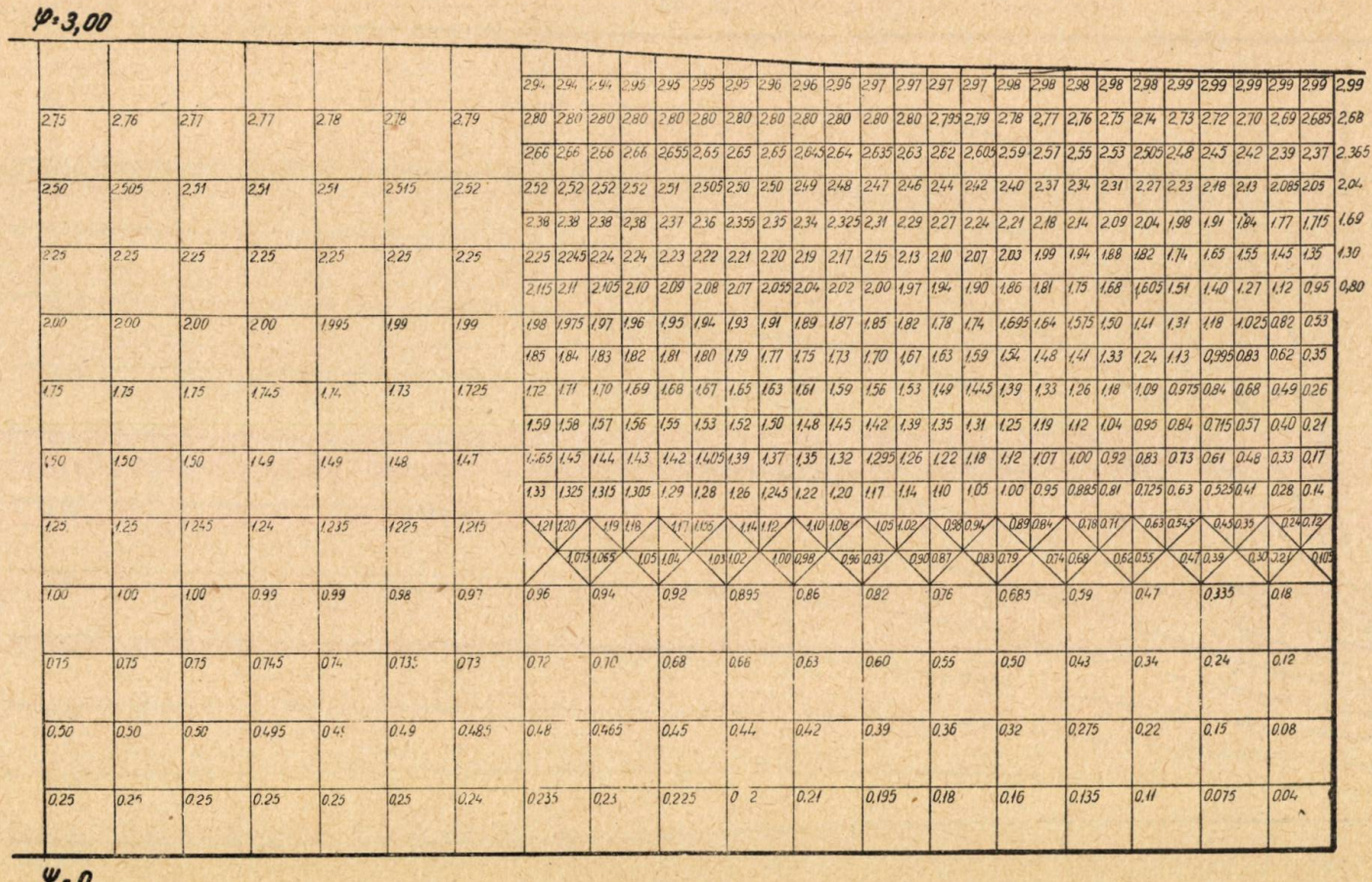


Fig. 31

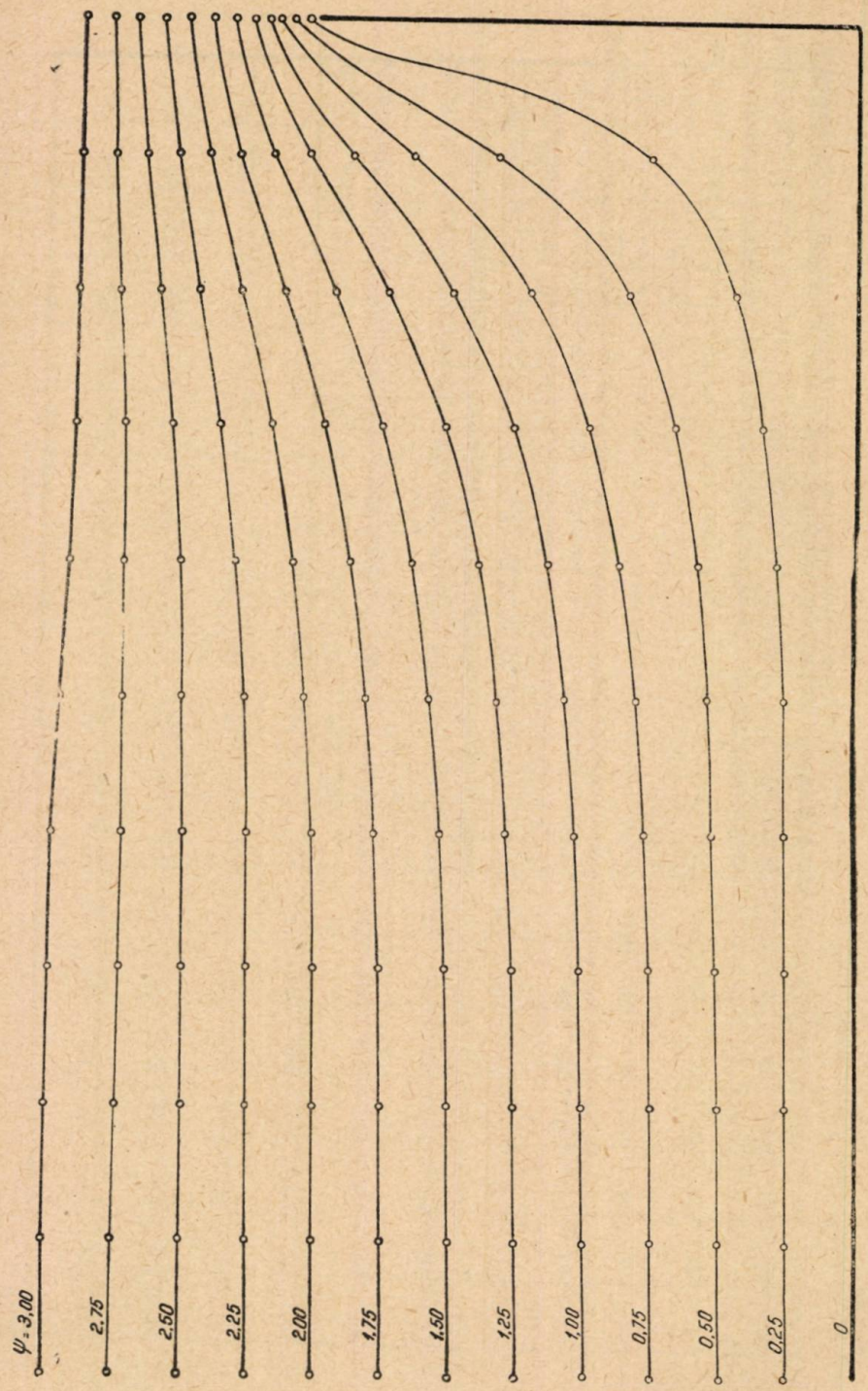


Fig. 32

3. Scurgerea peste clapetă

Un alt caz de mișcare cu suprafață liberă studiat este acela al deversării peste o clapetă, în arc de cerc, cu o incidență α față de planul de scurgere (fig. 33), în ipoteza că lama deversantă este complet aerisită și neînecată. Elementele scurgerii sînt: $Q = 31$ l/s; $H = 54$ cm; $\alpha = 45° 25'$; $R = 105{,}7$ cm $L = 39{,}2$ cm.

Problema aceasta diferă de precedenta prin condițiile ei la limită. Ne propunem să integrăm ecuația $\Delta \psi = 0$, care caracterizează mișcarea pe domeniul $ABC\,DE$. Suprafața liberă BC este necunoscută și pe ea am considerat $\psi = 93$. Pe porțiunea AB, situată la suficient de mare distanță de clapetă, vom avea $\psi = z$, din considerentele expuse în cazul stăvilarului înecat. Pe porțiunea AED a domeniului de scurgere, $\psi = 0$. În secțiunea CD a scurgerii nu cunoaștem repartiția de viteze, deci nici valorile funcției ψ. Cunoaștem numai valorile vitezei în punctele C și D din literatură [28], [29] unde se consideră $V_m = \sqrt{2g\,\delta}$ respectiv $V_M = \sqrt{2g\,(h + \delta)}$. Repartiția de viteze, în această regiune, trebuie determinată în așa fel încît debitul de scurgere în secțiunea CD să fie egal cu debitul de scurgere prin secțiunea AB (legea continuității). Această condiție însă nu determină în mod unic problema și de aceea vom folosi niște încercări experimentale, care dau repartiția de presiuni pe clapetă.

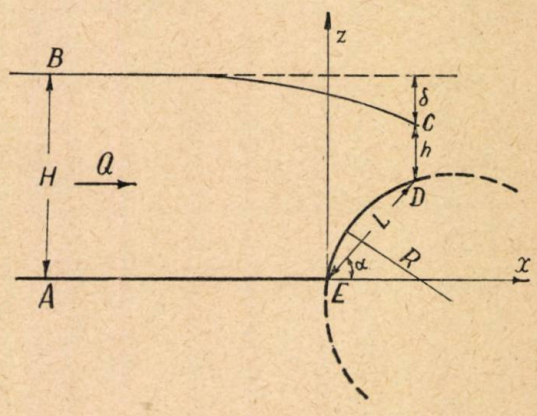


Fig. 33

Problema se pune deci în modul următor: să se determine suprafața liberă BC și repartiția de viteze în secțiunea CD, în cazul în care se cunosc vitezele în punctele C și D, să se determine valorile lui ψ pe suprafața liberă, în secțiunea AB și pe linia AED, în așa fel încît pe suprafața liberă să se verifice relația lui Bernoulli, presiunile exercitate pe clapetă să aibă repartiția dată de experiență, iar debitul prin secțiunea CD să fie egal cu debitul prin secțiunea AB.

Repartiția de presiuni măsurată în laborator este reprezentată în figura 37 printr-o linie continuă.

Pentru rezolvarea problemei vom alege în mod arbitrar suprafața liberă BC. Odată aleasă aceasta, se determină din formulele scrise mai sus vitezele în punctele C și D. Alegem o repartiție de viteze, deci de valori ale lui ψ în secțiunea CD, în așa fel încît să se respecte legea continuității. În acest fel avem de rezolvat o problemă Dirichlet, pe care o soluționăm ca și în cazul precedent. Odată rezolvată, verificăm dacă pe suprafața liberă este satisfăcută relația lui Bernoulli și dacă în lungul clapetei repartiția presiunilor coincide cu cea experimentală. În caz contrar, schimbăm atît suprafața liberă, cît și repartiția vitezelor în secțiunea CD, ținînd seama de condițiile de mai sus și verificăm din nou relația lui Bernoulli și repartiția de presiuni.

În încercările noastre am ținut seama de alura aproximativă a suprafeței libere obținută în experiențele de laborator și de repartiția de viteze obținută în scurgeri peste stăvilare [28], [29], așa că am fost scutiți de un număr mare de încercări.

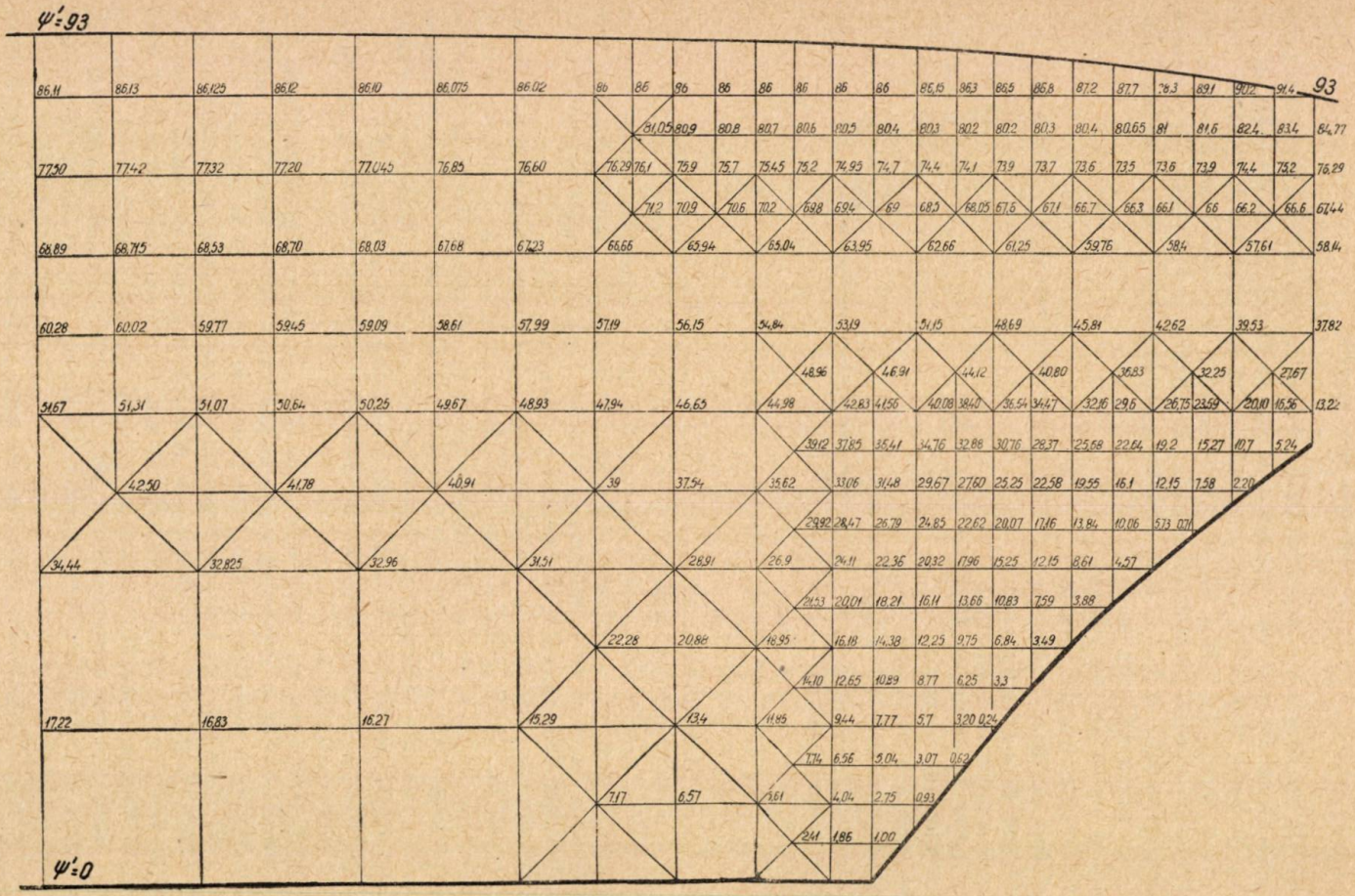


Fig. 34

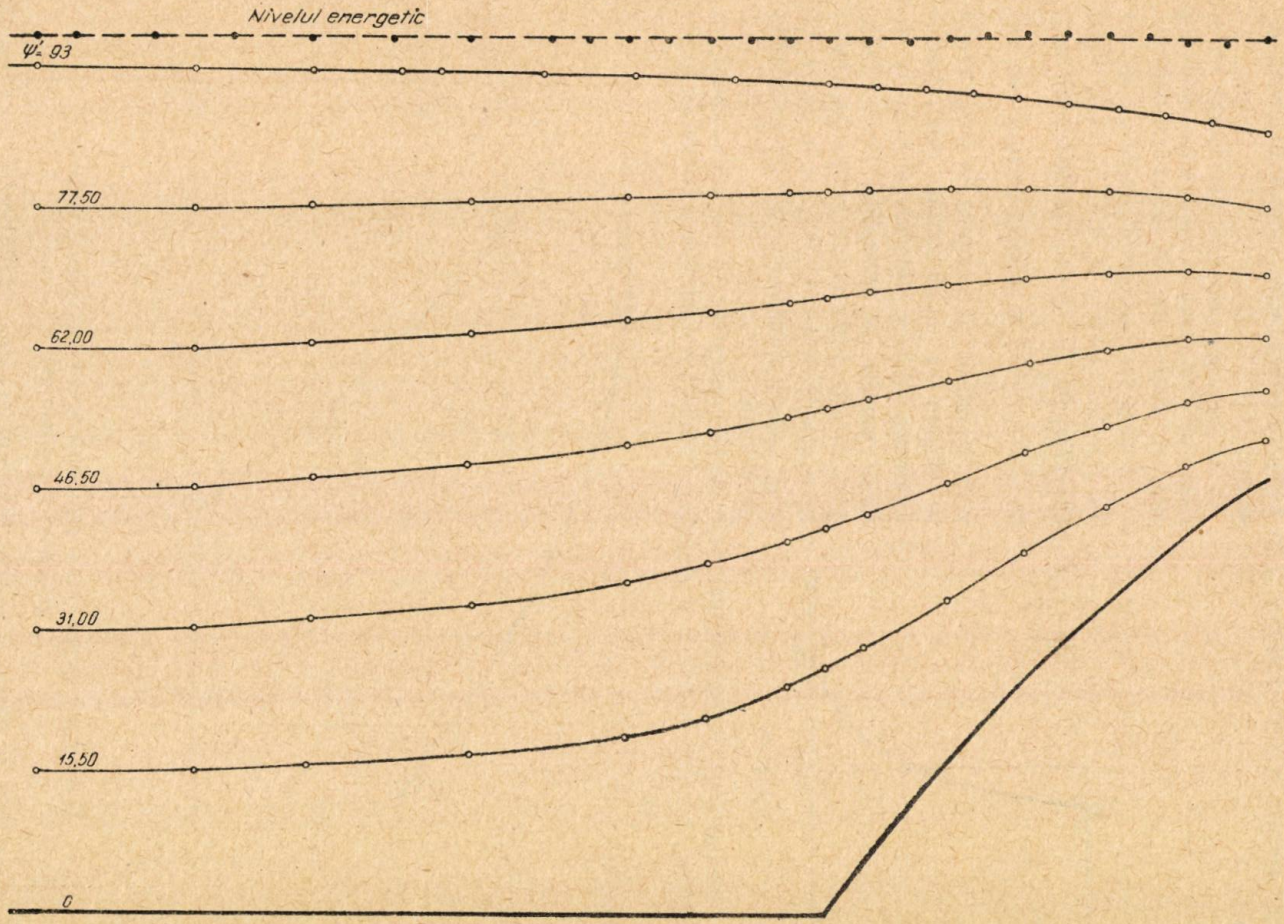


Fig. 35

Rezultatele calculelor sînt reprezentate în figurile 34, 35, 36 şi 37. În figura 34 sînt trecute valorile funcţiei ψ în nodurile reţelei, care acoperă domeniul de scurgere.

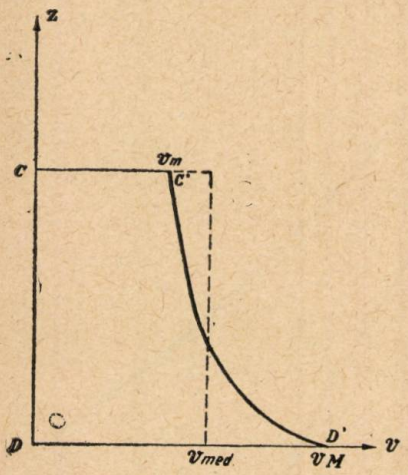


Fig. 36

În regiunea clapetei am lucrat cu o reţea mai fină decît în restul domeniului din aceleaşi motive ca în cazul stăvilarului.

Figura 35 reprezintă liniile de curent ale mişcării pentru $\psi' = 15{,}5;\ 31{,}0;\ 46{,}5;\ 62;\ 77{,}5;\ 93$ şi nivelul energetic al mişcării $N = \frac{V_\infty^2}{2g} + z$. Linia punctată este nivelul la infinit al scurgerii în jurul căreia se dispun cu aproximaţie, care rămîne inferioară lui 1 %, valorile calculate în diferite puncte ale suprafeţei libere. În figura 36 este reprezentată repartiţia finală de viteze în secţiunea CD, iar în figura 37, prin puncte balustrate, valorile presiunilor pe clapetă.

Necoincidenţa presiunilor calculate cu cele măsurate se datoreşte erorilor de măsurători, erorilor de calcul şi neglijării viscozităţii fluidului în calculele făcute

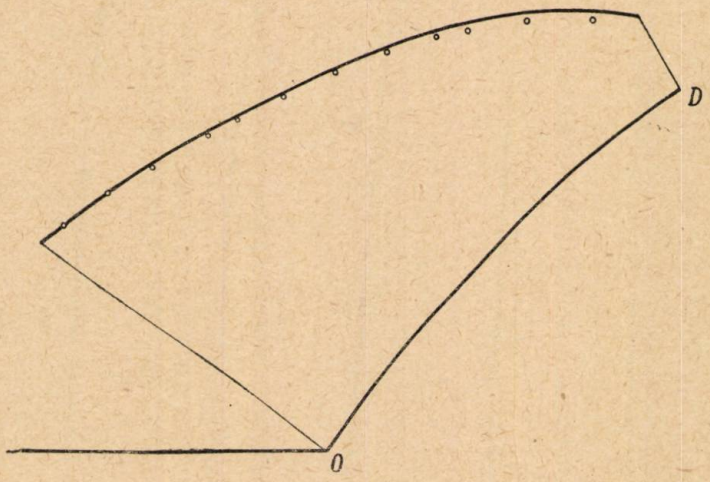


Fig. 37

4. Mişcarea ascendentă a unei bule de aer într-un tub vertical *(mişcare axial simetrică)*

Să studiem, în sfîrşit, problema determinării formei suprafeţei libere şi viteza de ascensiune a unei bule de aer de densitate δ_2 într-un tub cilindric, circular, vertical, plin cu un lichid greu, fără viscozitate, de densitate δ_1, bula fiind continuu alimentată la baza tubului [13]. Viteza de ascensiune a bulei w o vom determina aplicînd teorema π [23]. Ea depinde de greutatea specifică a lichidului (căci vom

presupune $\delta_1 \gg \delta_2$), de accelerația gravității g și de raza cilindrului R. Conform teoremei π trebuie să avem

$$F(w, \delta, g, R) = 0.$$

Luînd ca mărimi fundamentale δ, g, R, urmează că

$$w = \lambda \delta^p g^q R^r,$$

unde λ este o constantă, care trebuie determinată și care constituie valoarea caracteristică a problemei noastre. Înlocuind mărimile din relația de mai sus cu expresiile lor dimensionale, obținem

$$[L T^{-1}] = [ML^{-}]^p [LT^{-2}]^q [L]^r.$$

Identificarea exponenților mărimilor M, L, T, determină valorile $p = 0$; $q = -\frac{1}{2}$; $r = \frac{1}{2}$. Urmează de aici că

$$w = \lambda \sqrt{g R}. \tag{27}$$

Din această relație rezultă

$$\lambda^2 = \frac{w^2}{g R},$$

adică λ^2 este numărul Froude al mișcării. Din cele de mai sus rezultă că viteza de ascensiune a bulei este constantă.

Să considerăm mișcarea raportată la un sistem de axe $r0z$ (fig. 38) cu originea în punctul de impact 0.

Să notăm cu p_1 presiunea din interiorul fluidului și cu V viteza unei particule fluide. Vom scrie relația lui Bernoulli într-un punct pe suprafața liberă

$$\frac{p_1}{\delta_1} + \frac{V^2}{2} - g z = C_1.$$

Constanta C_1 se determină din condiția ca pentru $z = 0$ să avem $V = 0$ și $p_1 = p_0$ (p_0 presiunea în 0). Rezultă că

$$C_1 = \frac{p_0}{\delta_1}$$

și deci

$$p_1 = g\delta_1 z - \frac{V^2}{2}\delta_1 + p_0.$$

În interiorul bulei avem relația

$$\frac{p_2}{\delta_2} - g z = C_2.$$

Constanta C_2 se determină din condiția ca $p_2 = p_0$ pentru $z = 0$. Rezultă că

$$p_2 = p_0 + g\delta_2 z.$$

Cum pe suprafața liberă trebuie să avem $p_1 = p_2$, urmează că

$$V = \sqrt{2gz\left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}.$$

Dacă vom considera, cum am spus mai sus, $\delta_2 \ll \delta_1$, vom avea

$$V = \sqrt{2gz}, \tag{28}$$

relaţia care determină viteza fluidului pe suprafaţa liberă.

Datorită relativităţii mişcării vom presupune că bula rămîne în repaus şi că fluidul are la infinit viteza constantă $w = \lambda \sqrt{g R}$. Mişcarea va fi raportată la sistemul de axe fixe rOz. Ea este reprezentată de ecuaţiile caracteristice mişcării axial simetrice

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \tag{30}$$

unde φ şi ψ sînt respectiv potenţialul de viteze şi funcţia de curent a mişcării. Vom scrie aceste ecuaţii fără dimensiuni punînd:

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{\lambda \sqrt{g R^3}}\ ;\quad \psi^* = \frac{\psi}{\lambda \sqrt{g R^5}}\ ;\quad u^* = \frac{u}{\lambda \sqrt{g R}}\ ;\quad v^* = \frac{v}{\lambda \sqrt{g R}}\ ;\quad \frac{z}{R} = \eta\ ;\ \frac{r}{R} = \xi,$$

unde u, v sînt componentele vitezei unei particule fluide oarecare. Ecuaţiile (29) şi (30) devin

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} = 0. \tag{32}$$

Soluţia ecuaţiei (32) are forma

$$\psi^* = \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{\lambda}\sum_1^\infty K_i J_1(\beta_i \xi)\, e^{-\beta_i \eta},$$

căci am adăugat o translaţie paralelă cu generatoarea cilindrului, de viteză 1. J este funcţia Bessel de speţa întîia, β_i zerourile sale şi K_i constante arbitrare.

Componentele vitezei sînt

$$u^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \xi} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta}\ ;\quad v^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \eta} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi^*}{\partial \xi}.$$

Să scriem relaţia (28) fără dimensiuni. Avem

$$V^2 = u^2 + v^2 = 2g\,z$$

sau

$$\lambda^2 g R\left[\frac{u^2}{\lambda^2 g R} + \frac{v^2}{\lambda^2 g R}\right] = 2gR\,\frac{z}{R},$$

adică

$$u^{*2} + v^{*2} = \frac{2\eta}{\lambda^2}. \tag{33}$$

Din expresia funcției de curent ψ^* deducem $\psi^*(0, \eta) = 0$, ceea ce se vede ușor și

$$\psi^*(1, \eta) = \frac{1}{2}, \quad \text{căci} \quad J_1(\beta_i) = 0.$$

Noi vom considera că

$$\psi^*(0, \eta) = 0 \quad \text{și} \quad \psi^*(1, \eta) = 500,$$

întrucît aceasta nu schimbă rezultatele și evită un mare număr de zecimale.

Vom considera că la infinit amonte scurgerea este paralelă cu generatoarea tubului, adică $u^* = 0$. Din forma lui u^* și a lui V^* deducem că în acest caz, avem la mari distanțe

$$\psi^*(\xi, \eta) = f(\xi).$$

Expresia lui V^* ne dă forma lui ψ, pentru $\eta = \infty$, avem

$$v^* = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = -1, \text{ adică } \psi^* = \frac{1}{2}\xi^2 \qquad \text{pentru } \eta = \infty,$$

ceea ce s-ar fi putut deduce ușor și din expresiile componentelor vitezei. În acest fel problema este complet determinată. Avem de integrat ecuația

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi} = 0$$

în domeniul *DEFO* (fig. 38) cu următoarele condiții la limită

$$\psi(1, \eta) = 500 \;;\; \psi(0, \eta) = 0 \;;\; \psi(\xi, d) = \frac{1}{2}\xi^2 \quad (d = OD),$$

unde D, E, F sînt puncte suficient de depărtate de originea axelor.

Linia liberă OF este necunoscută și o vom determina în așa fel încît pe ea să fie satisfăcută relația (33), pe care o scriem sub forma

$$\lambda^2 = \frac{2\eta}{u^{*2} + v^{*2}}. \tag{34}$$

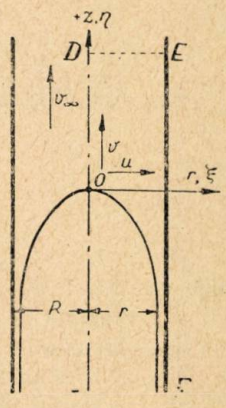


Fig. 38

Ca și în celelalte cazuri, alegem, la început, arbitrar suprafața liberă și rezolvăm numeric ecuația (32) în domeniul astfel determinat, ținînd seama de condițiile la limita de mai sus. Verificăm relația (34) pe suprafața liberă. Dacă valorile lui λ, astfel obținute, sînt sensibil egale între ele, problema este rezolvată; dacă nu, se începe același calcul pentru altă suprafață liberă, pînă cînd pe suprafața aleasă este satisfăcută relația (34). Din cele de mai sus se vede că o dată cu determinarea suprafeței libere se determină și valoarea constantă λ și deci viteza de ascensiune a bulei din relația (27).

Problema determinării suprafeței libere și a lui λ se rezolvă așadar simultan.

Pentru calculele numerice vom scrie ecuaţia (32) în diferenţe finite. Pentru un punct oarecare al reţelei (fig. 39) avem

$$\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\eta^2}\right)_0 \simeq \frac{\psi_3+\psi_1-2\psi_0}{h^2}\,;\quad \left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi^2}\right)_0 \simeq \frac{\psi_2+\psi_4-2\psi_0}{h^2}\,;\quad \frac{\partial\psi^*}{\partial\xi} = \frac{\psi_2-\psi_4}{2h}.$$

Introducem aceste expresii în ecuaţia (32) şi obţinem

$$\psi_0 = \frac{\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4}{4} - \frac{h}{8\xi}(\psi_2-\psi_4).$$

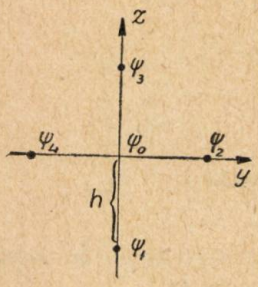


Fig. 39

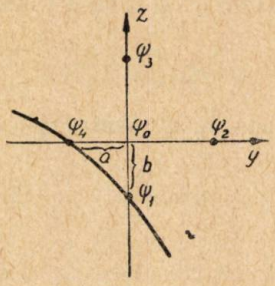


Fig. 40

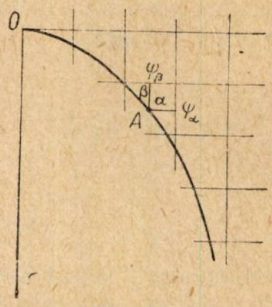


Fig. 41

Pentru un punct situat lîngă suprafaţa liberă (fig. 40) procedăm în mod analog şi obţinem

$$\psi_0 = \frac{ah}{(a+b)(b+h)}\psi_1 + \frac{ab}{(a+b)(a+h)}\psi_2 + \frac{ab}{(a+b)(b+h)}\psi_3 +$$

$$+ \frac{bh}{(a+b)(a+h)}\psi_4 - \frac{1}{2\xi}\frac{abh(\psi_2-\psi_4)}{(a+b)(a+h)}.$$

Expresia (34) are următoarea formă în diferenţe finite

$$\lambda^2 = \frac{2\eta_A\xi_A^2}{\left(\frac{\psi_\alpha}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\psi_\beta}{\beta}\right)^2}. \tag{35}$$

unde am notat (fig. 41).

ψ_α, valoarea lui ψ^* în punctul situat pe orizontala punctului A la distanţa α;

ψ_β, valoarea lui ψ^* în punctul situat pe verticala punctului A la distanţa β;

ξ_A, abscisa punctului A;

η_A, ordonata punctului A.

Calculele au fost conduse aşa cum am arătat mai sus, iar rezultatele sînt reprezentate în figurile 42, 43 şi 44.

În figura 42 sînt trecute valorile funcţiei ψ' în nodurile relaţiei, care acoperă domeniul de scurgere. La pasul la care ne-am oprit, valoarea lui λ pe suprafaţa liberă oscilează în jurul unei valori constante ($\lambda = 0{,}496$), cu abateri care nu depă-

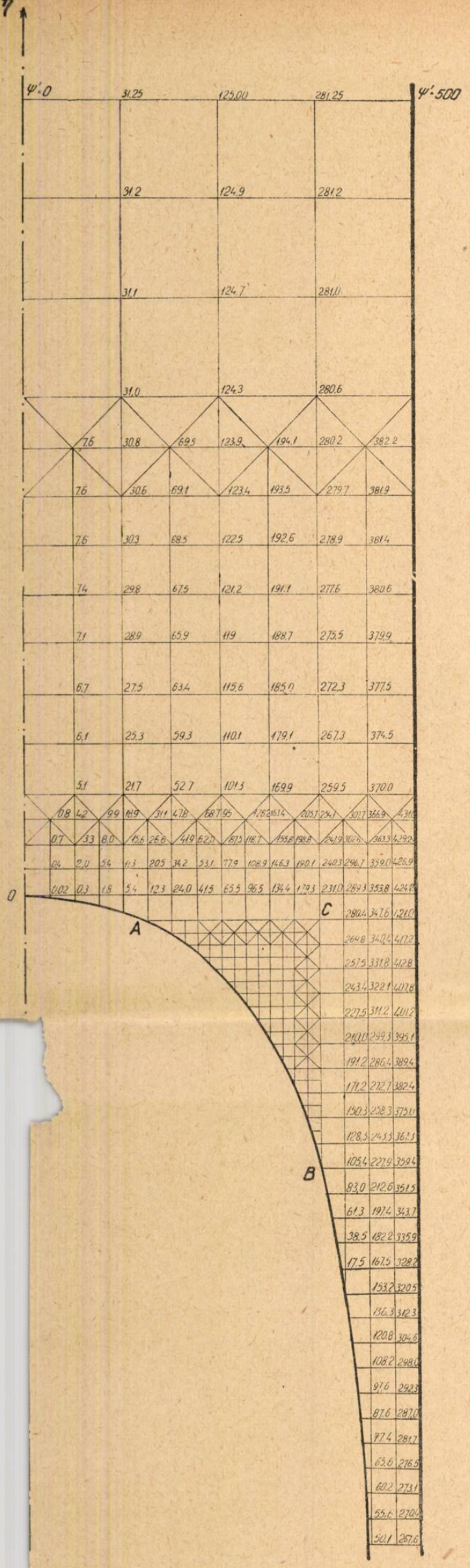


Fig. 42

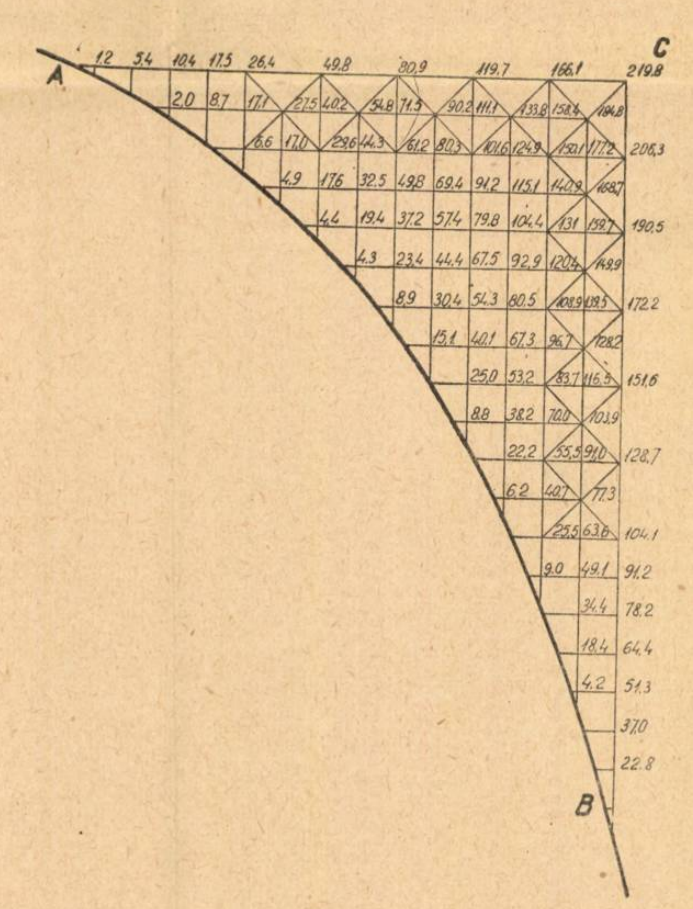


Fig. 43

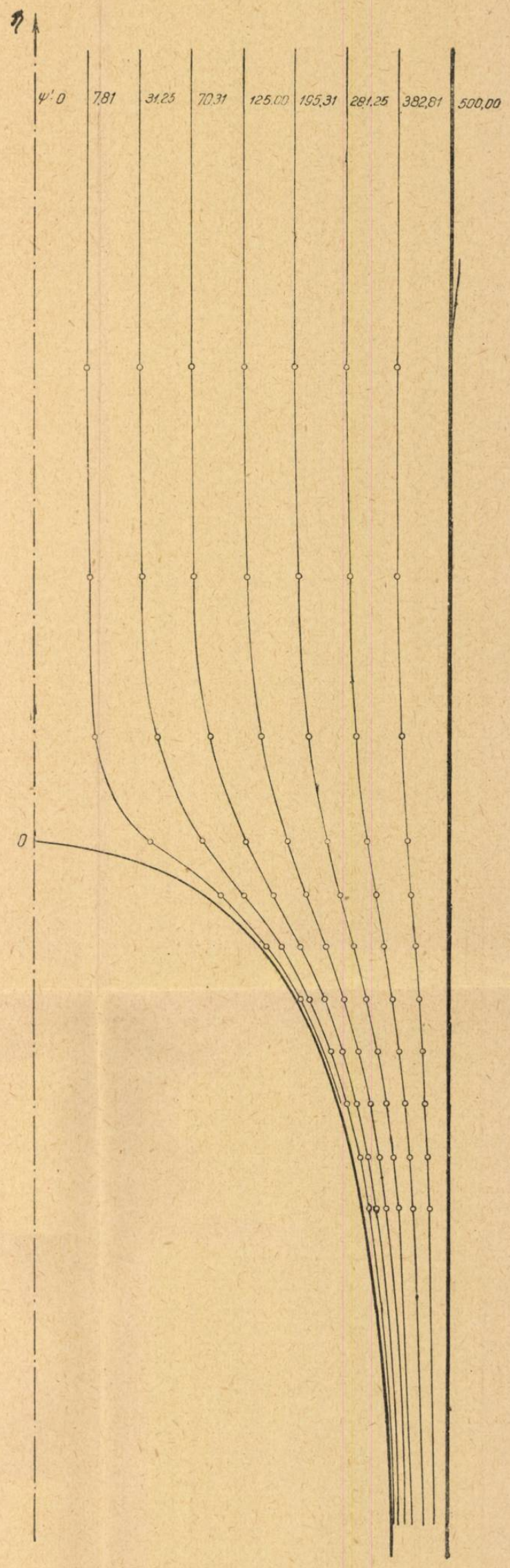


Fig. 44

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

șesc 6 % (în punctul $\xi = \frac{13}{16}$; $\eta = -1$). Figura 43 reprezintă un detaliu din figura 42, iar în figura 44 am trecut liniile de curent ale mișcării pentru $\psi' = 7{,}81$, 31,25; 70,31; 125; 195,31; 281,25; 382,81; 500.

Rezultatele numerice obținute coincid cu rezultatele obținute pe altă cale teoretică și experimentală [13].

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК ПРИ ИЗУЧЕНИИ БЕЗНАПОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе рассматривается при помощи метода сеток ряд вопросов безнапорного движения тяжелых вязких и невязких жидкостей. Во избежание бесполезных повторений, в первой части работы излагаются общие принципы этого метода, необходимые для численного интегрирования уравнений с частными производными, которые определяют движение жидкостей в 15 рассмотренных случаях.

Во второй части разбирается вопрос равномерного установившегося движения тяжелой вязкой жидкости в открытых каналах различных сечений. При условии, что трение между воздухом и жидкостью равно нулю, вопрос сводится к течению жидкости в трубопроводе. Движение определяется уравнением типа Пуассон $\Delta u = k$ (u — скорость в трубопроводе), при условии $u = 0$ на контуре трубопровода. На рисунках 15—26 приводятся численные значения неизвестной функции и кривые равных скоростей.

Далее изучается истечение через вертикальный плоский затвор совершенно затопленной струи тяжелой невязкой жидкости ($\Delta\psi = 0$, где ψ — функция тока). Свободная поверхность определяется методом последовательных приближений. Результаты в численном выражении и линии тока приведены на рисунках 31 и 32.

Следует изучение истечения через изогнутый затвор, наклоненный под углом α к горизонтале в условиях полной аэрации и полностью незатопленной струи ($\Delta\psi = 0$, где ψ — функция тока). Путем последовательных приближений определяется положение свободной поверхности, распределение давлений на затворе и распределение скоростей в вертикальном сечении, проходящем через кромку затвора. Положение свободной поверхности и распределение давлений на затворе хорошо совпадают с результатами, полученными опытным путем.

В конце рассматривается осесимметричное движение $\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$, (где ψ — функция тока), а именно, восходящее движение воздушного пузырька в цилиндрической вертикальной трубе, наполненной тяжелой жидкостью. Определяется контур воздушного пузырька и его восходящая скорость. Численные результаты, полученные путем этого метода, совпадают с результатами, полученными другими путями — теоретическими и опытными [13].

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES RÉSEAUX À L'ÉTUDE DU MOUVEMENT DES FLUIDES PESANTS À SURFACE LIBRE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étudie au moyen de la méthode des réseaux, toute une série de problèmes du mouvement des fluides pesants, visqueux ou sans viscosité, et offrant une surface libre. Afin d'éviter des retours inutiles, les Auteurs exposent, dans la première partie du travail, les principes généraux de cette méthode, nécessaires à l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles qui déterminent les mouvements des fluides dans les 15 cas étudiés.

Dans la seconde partie, on traite du problème du mouvement permanent, uniforme, d'un fluide pesant, visqueux, dans des canaux ouverts, de différentes sections. En posant la condition que le frottement entre l'air et le liquide soit nul, le problème se réduit à l'écoulement du fluide dans une conduite. Le mouvement est déterminé par une équation de type Poisson $\Delta u = k$ (u étant la vitesse dans la conduite) à la condition que $u = 0$ sur le contour de la conduite. Les figures 15 — 26 donnent les valeurs numériques de la fonction inconnue et les lignes de vitesses égales.

On étudie ensuite le mouvement d'un fluide pesant non visqueux, par-dessus un barrage plan vertical, dont la veine est complètement déprimée ($\Delta\psi = 0$, ψ étant la fonction de courant). La surface libre est déterminée par des approximations successives. Les résultats numériques et les lignes de courant sont rendus par les figures 31—32.

Suit l'étude du déversement par-dessus un clapet courbe, incliné à une incidence α, à aération parfaite et veine totalement non submergée ($\Delta\psi = 0$, ψ étant la fonction de courant).

Par des approximations successives, on détermine la position de la surface libre, la répartition des pressions sur le clapet et la répartition des vitesses dans la section verticale qui passe par l'arête du clapet. La position de la surface libre et la répartition des pressions sur le clapet coïncident d'une manière satisfaisante avec les résultats expérimentaux.

On étudie enfin le mouvement axialement symétrique $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \right.$ $\left. - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0\right)$, ($\psi$ étant la fonction de courant), à savoir, le mouvement ascendant d'une bulle d'air dans un tube cylindrique vertical, rempli d'un fluide pesant.

On détermine le contour de la bulle d'air ainsi que sa vitesse d'ascension. Les résultats numériques obtenus à l'aide de cette méthode coïncident avec les résultats obtenus par voie théorique et expérimentale [13].

BIBLIOGRAFIE

1. N. Kocin, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie à la surface de séparation de deux liquides de profondeur finie.* Mathematische Annalen, 1927, t. 983—4, p. 281.
2. Levi-Civita, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie.* Mathematische Annalen, 1925, t. 93, p. 264.

3. H. Villat, *Sur l'écoulement des fluides pesants.* Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1915, t. 32, p. 175.
4. L. Sretesnski, *Teoria volnovîh dvijenii jidkosti.* O.N.T.I. Moscova, 1936.
5. J. Smetana, *Etude de la surface d'écoulement des grands barrages.* Revue Générale de l'Hydraulique, 1948, nr. 46, p. 56; 1949, nr. 49, p. 37.
6. F. Aimond, Annales de Toulouse. 1929, t. 21, p. 53.
7. H. Poncin, *Recherches sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical.* Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, 1932, nr. 16, p. 71.
8. H. Blasius, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1910, t. 58.
9. A. Lauk, Übersicht über eine wch. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1929, vol. 9, p. 1.
10. M. Haimovici, *Sur l'écoulement des liquides pesants dans un plan vertical.* Ann. scientifiques de l'Université de Jassy, 1935, t. XXI, fasc. 1–4, p. 182–231.
11. D. Dumitrescu, *Determinarea coeficientului de contracție la ajutajele cilindrice.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe tehnice și chimice, t. IV, nr. 3–4, iulie-decembrie 1952.
12. — *O soluție exactă a sistemului de ecuații diferențiale Navier-Stokes pentru fluidele grele cu suprafață liberă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 3–4, martie – aprilie 1954, p. 115.
13. — *Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr.* Z.A.M.M. 1943, vol. 23, caiet 3, p. 139–149.
14. L. V. Cantorovici i V. I. Krîlov, *Priblijenie metodî vișevo analiza.* Moscova, 1950.
15. S. E. Mikeladze, *Despre integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale.* Izvestia Acad. Nauk, 1943, nr. 6.
16. D. Panov, *Spravocinik po cislenomu reșeniiu diferențialnîh uravnenii v ciastnîh proizvodnîh.* Moscova, 1951.
17. I. Petrowski, *Lekții ob uravneniah s ciastnîmi proizvodnîmi.* Moscova, 1953.
18. R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Engineering Science.* University Press, Oxford, 1940.
19. — *Relaxation Methods in Theoretical Physics.* University Press, Oxford, 1946.
20. J. Boussinesq, *Sur la vitesse moyenne ou de débit et la vitesse maximum ou axiale dans un tube prismatique à section régulière d'un nombre m de côtés.* 1916, t. 158, p. 1846.
21. M. Paschoud, *Calcul des vitesses de régime uniforme par les polynômes dans les tubes cylindriques à section polygonales régulières.* 1924, t. 179, p. 451.
22. Augusto Getti, *Distribuzione delle velocità all'interno e sforzi di scorrimento al contorno nelle correnti a regime uniforme.* Energia Elettrica, 1950, nr. 11–12, p. 664–682.
23. E. Buckingham, Phys. Rev., 1914, vol. 4, p. 345.
24. *Handbuch der Experimentalphysik*, 1935, vol. IV, partea IV.
25. Allen, *Streamline and Turbulent Flow in Open Channels.* Phil. Mag., 1934, vol. XVII, nr. 7, p. 1081.
26. J. Boussinesq, *Mémoire sur l'influence de frottement dans les mouvements réguliers des fluides.* Journal des mathématiques pures et appliquées, 1868, vol. 3, p. 377.
27. R. J. Cornish, *Flow in a Pipe of Rectangular Cross Section.* Proceedings of the Royal Society of London, 1927 seria A, vol. CXX, p. 1128.
28. R. Winkel, *Die Geschwindigkeitsverteilung im Strahle über die Wehrkrone.* Bautechnik, 1929, nr. 1, p. 238.
29. Chr. Keutner, *Neues Berechnungsverfahren für den Abfluss an Wehren, aus der Geschwindigkeitsverteilung des Wassers über der Wehrkrone.* Bautechnik, 1929, nr. 1, p. 575.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

CONSIDERAŢII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR CIRCULARE DE ALUNGIRE INFINITĂ LUBRIFICATE CU GAZE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că se poate găsi repartiţia de presiuni în lagărele cu lubrificaţie gazoasă de alungire infinită, în mod exact pentru lagărele plane şi aproximativ, însă cu o bună precizie pentru lagărele circulare. În ambele situaţii, soluţiile sînt date sub o formă implicită.

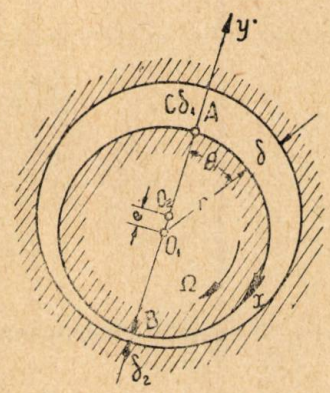


Fig. 1

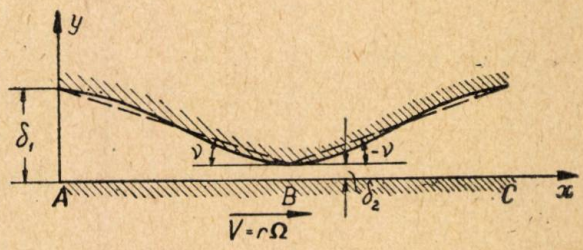


Fig. 2

De aceea, în lucrarea de faţă vom relua problema repartiţiei de presiuni în lagărele circulare, căutînd, cu mici aproximaţii, să punem soluţia sub o formă mai uşor accesibilă aplicaţiilor practice.

După cum s-a arătat [1], un lagăr circular (fig. 1), dacă se desfăşoară suprafaţa fusului (lucru totdeauna posibil, deoarece grosimea δ a filmului de lubrifiant este foarte mică în raport cu raza de curbură), poate fi privit ca fiind compus din două lagăre plane AB şi BC (fig. 2). Porţiunea AB formează un unghi de înclinare ν, iar porţiunea BC unghiul $-\nu$.

Deoarece înclinarea este foarte mică, se poate înlocui unghiul cu tangenta, așa încît

$$\nu = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\pi r} = \frac{2e}{\pi r} = \frac{2\alpha}{\pi}\,\psi, \tag{1}$$

unde α este excentricitatea, iar ψ jocul relativ:

$$\alpha = \frac{e}{\Delta}\;; \quad \psi = \frac{\Delta}{r}, \tag{2}$$

Δ fiind jocul radial dintre fus și cuzinet.

Problema găsirii repartiției de presiuni într-un lagăr circular se reduce deci la găsirea repartiției de presiuni în două lagăre plane.

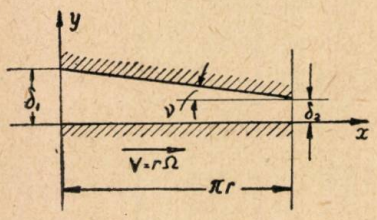


Fig. 3

Porțiunea AB. În această zonă (fig. 3) grosimea filmului de lubrifiant este egală cu

$$\delta = \delta_1 - \nu\, x, \tag{3}$$

iar ecuația diferențială a presiunilor este [1]

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu\, V \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{C_1}{\delta^3 p}\right), \tag{4}$$

în care C_1 este o constantă de integrare egală cu

$$C_1 = p_{\max}\, \delta_0, \tag{5}$$

$p_{\max}$ fiind presiunea maximă din lagăr, iar δ_0 grosimea filmului de lubrifiant corespunzătoare.

Făcînd schimbarea de variabilă

$$x = \frac{\delta_1 - \delta}{\nu}, \tag{6}$$

ecuația (4) se scrie

$$\frac{dp}{d\delta} = -\frac{6\mu\, V}{\nu}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{C_1}{\delta^3 p}\right). \tag{7}$$

În cele ce urmează, este avantajos să se utilizeze variabilele adimensionale

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\Delta}\;; \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \tag{8}$$

unde p_0 este presiunea în zona grosimii maxime a filmului de lubrifiant ($\theta = 0$, $\delta = \delta_1$).

Atunci ecuația (7) ia forma

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = -\frac{6\mu\, V}{\nu \Delta p_0}\left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} - \frac{K_1}{\bar{\delta}^3 \bar{p}}\right) \tag{9}$$

în care acum

$$K_1 = \bar{p}_{\max}\, \bar{\delta}_0, \tag{10}$$

unde

$$\bar{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{\Delta} \; ; \; \bar{p}_{\max} = \frac{p_{\max}}{p_0} \, . \tag{11}$$

Dacă se notează

$$\xi = \frac{3\mu V}{\nu \Delta p_0} \, , \tag{12}$$

adică

$$\xi = \frac{3\pi \mu \Omega}{2\alpha p_0 \psi^2} \tag{13}$$

ecuaţia (9) devine

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = -2\xi \left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} - \frac{K_1}{\bar{\delta}^3 \bar{p}} \right) . \tag{14}$$

Ecuaţia (14) se integrează uşor, punînd [1]

$$\bar{\delta} \, \bar{p} = \bar{\eta} \, (t) \; ; \quad t = \log \bar{\delta} . \tag{15}$$

În acest caz, deoarece

$$\bar{p} + \bar{\delta} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = \frac{d\bar{\eta}}{dt} \frac{1}{\bar{\delta}} \, , \tag{16}$$

ecuaţia (14) se scrie

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = \bar{\eta} - 2\xi \left(1 - \frac{K_1}{\bar{\eta}} \right) \tag{17}$$

sau, separînd variabilele,

$$\frac{\bar{\eta} \, d\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 - 2\xi \bar{\eta} + 2\xi K_1} = dt. \tag{18}$$

În sfîrşit dacă notăm

$$K_3 = \frac{2K_1}{\xi} \, , \tag{19}$$

obţinem

$$\frac{\bar{\eta} \, d\bar{\eta}}{\eta^2 - 2\xi \bar{\eta} + \xi^2 K_3} = dt = \frac{d\bar{\delta}}{\bar{\delta}} \tag{20}$$

ecuaţie de aceeaşi formă cu aceea deja obţinută [1] şi care are aspecte diferite după cum

$$K_3 > 1, \tag{21}$$

în care caz rădăcinile trinomului de gradul doi din primul membru al relaţiei (20) sînt imaginare sau după cum

$$K_3 < 1, \tag{22}$$

în care caz rădăcinile respective sînt reale.

Regimul, în care μ, Ω, ψ, α, p_0 sînt astfel încît

$$K_3 = 1, \tag{23}$$

a fost numit «regim critic», caracterizat, pentru o excentricitate relativă dată α, de valoarea ξ_c, deoarece separă diferitele regimuri posibile de funcționare în două domenii, în care soluția ecuației diferențiale (20) este de natură diferită.

În cazul în care regimul de lucru este astfel încît $K_3>1$, atunci integrala ecuației (20) este

$$\frac{1}{2}\ln(\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3) + \frac{1}{\sqrt{K_3-1}}\operatorname{arctg}\frac{\bar{\eta}-\xi}{\xi\sqrt{K_3-1}} = \ln C_2\bar{\delta} \tag{24}$$

sau

$$(\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3)\exp\left[\frac{2}{\sqrt{K_3-1}}\operatorname{arctg}\frac{\bar{\eta}-\xi}{\xi\sqrt{K_3-1}}\right] = K_2\bar{\delta}^2, \tag{25}$$

C_2, respectiv K_2, fiind o constantă arbitrară de integrare.

Pentru considerațiile ulterioare și în special pentru calculul elementelor globale ale lagărului este interesant de studiat variația termenului

$$\chi = \exp\left[\frac{2}{\sqrt{K_3-1}}\operatorname{arctg}\frac{\bar{\eta}-\xi}{\xi\sqrt{K_3-1}}\right] \tag{26}$$

în funcție de $\bar{\eta}$, ξ și K_3. Această variație este arătată în figura 4.

Se observă că pe zona $0<\bar{\eta}<2$ această variație se apropie mult de o dreaptă și aceasta pe măsură ce crește ξ și K_3.

În cazul $K_3<1$ (22) rădăcinile trinomului de gradul doi din primul membru (20) sînt reale și egale cu

$$\bar{\eta}^*_{1,2} = \xi(1 \pm \sqrt{1-K_3}), \tag{27}$$

iar integrala ecuației diferențiale (20), care dă repartiția de presiuni, este

$$[\bar{\eta}-\xi(1+\sqrt{1-K_3})]^{1+\frac{1}{\sqrt{1-K_3}}}[\bar{\eta}-\xi(1-\sqrt{1-K_3})]^{1-\frac{1}{\sqrt{1-K_3}}} = K_2\bar{\delta}^2 \tag{28}$$

sau

$$\bar{\eta}^2 - 2\xi\bar{\eta} + \xi^2 K_3 = K_2\bar{\delta}^2\left[\frac{\bar{\eta}-\xi(1-\sqrt{1-K_3})}{\bar{\eta}-\xi(1+\sqrt{1-K_3})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1-K_3}}} \tag{29}$$

Termenul

$$\chi' = \left[\frac{\bar{\eta}-\xi(1-\sqrt{1-K_3})}{\bar{\eta}-\xi(1+\sqrt{1-K_3})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1-K_3}}} \tag{30}$$

are în funcție de $\bar{\eta}$ și pentru diverse valori K_3 și ξ variația arătată în figura 5.

Se constată și aici că variația lui χ' în funcție de $\bar{\eta}$ poate fi considerată aproximativ ca fiind liniară în intervalul $0<\bar{\eta}<2$.

În sfîrșit, în cazul cînd $K_3=1$ (regimul critic), regim pentru care soluțiile (25) și (29) nu au sens, rădăcinile trinomului de gradul doi din primul membru al relației (20) sînt reale și confundate:

$$\bar{\eta}^*_{1,2} = \xi_c, \tag{31}$$

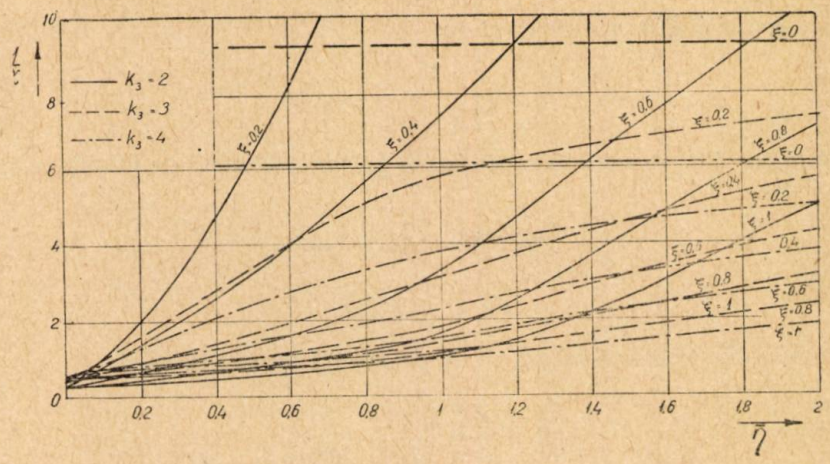


Fig 4

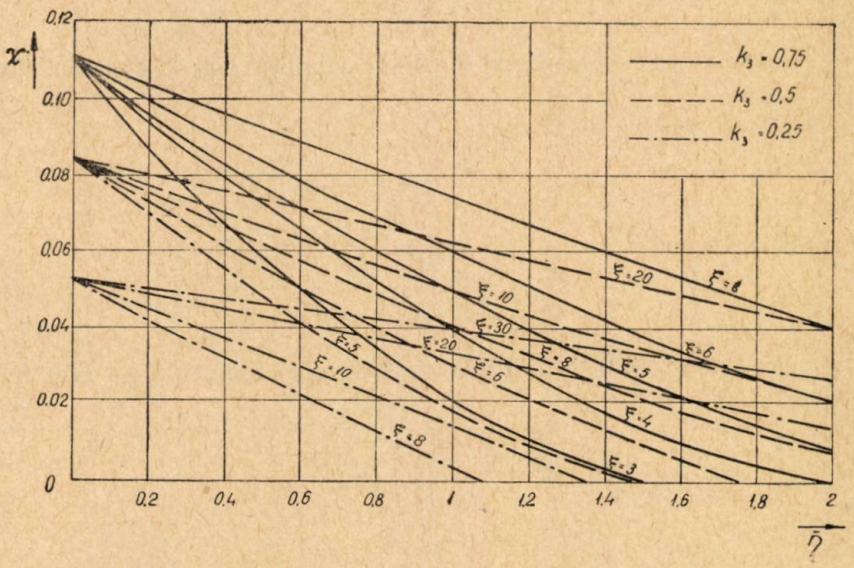


Fig. 5

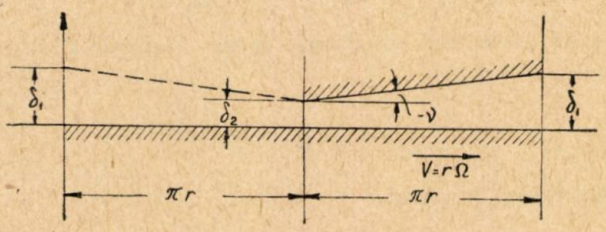


Fig. 6

integrala ecuației (20) este în acest caz

$$(\xi_c - \bar{\eta}) \exp\left[\frac{\xi_c}{\xi_c - \bar{\eta}}\right] = K_2\,\bar{\delta}. \tag{32}$$

Porțiunea BC. În această zonă (fig. 6) grosimea filmului de lubrifiant variază după relația

$$\delta = 2\,\delta_2 - \delta_1 + \nu\,x, \tag{33}$$

deoarece

$$\pi r \leqslant x \leqslant 2\pi r. \tag{34}$$

Ecuația diferențială a mișcării este de aceeași formă (4), adică

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu V\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{C_1'}{\delta^3 p}\right) \tag{35}$$

în care constanta de integrare C_1' este acum egală cu

$$C_1' = p_{\min}\,\delta_0', \tag{36}$$

unde $p_{\min}$ este presiunea minimă în filmul de lubrifiant, iar δ_0' grosimea filmului corespunzătoare.

Utilizînd schimbarea de variabile

$$x = \frac{\delta + \delta_1 - 2\delta_2}{\nu} \tag{37}$$

ecuația (35) se scrie

$$\frac{dp}{d\delta} = \frac{6\mu V}{\nu}\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{C_1'}{\delta^3 p}\right). \tag{38}$$

Cu aceleași notații (13) și utilizînd variabilele adimensionale $\bar{p}$ și $\bar{\delta}$ (11), ecuația (38) devine

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}} = 2\xi\left(\frac{1}{\bar{\delta}^2} - \frac{K_1'}{\bar{\delta}^3 \bar{p}}\right), \tag{39}$$

în care

$$K_1' = \bar{p}_{\min}\,\bar{\delta}_0', \tag{40}$$

unde

$$\bar{\delta}_0' = \frac{\delta_0'}{\Delta}\;;\quad \bar{p}_{\min} = \frac{p_{\min}}{p_0}. \tag{41}$$

Utilizînd aceeași schimbare de funcție și de variabilă (13), ecuația (39) se scrie

$$\frac{\bar{\eta}\,d\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 + 2\xi\bar{\eta} - 2\xi K_1'} = dl = \frac{d\bar{\delta}}{\bar{\delta}}. \tag{42}$$

Să considerăm acum trinomul

$$\bar{\eta}^2 + 2\,\xi\bar{\eta} - 2\xi K_1' = 0 \tag{43}$$

ale cărui rădăcini sînt

$$\bar{r}'_{1,2} = -\xi\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2K'_1}{\xi}}\right). \tag{44}$$

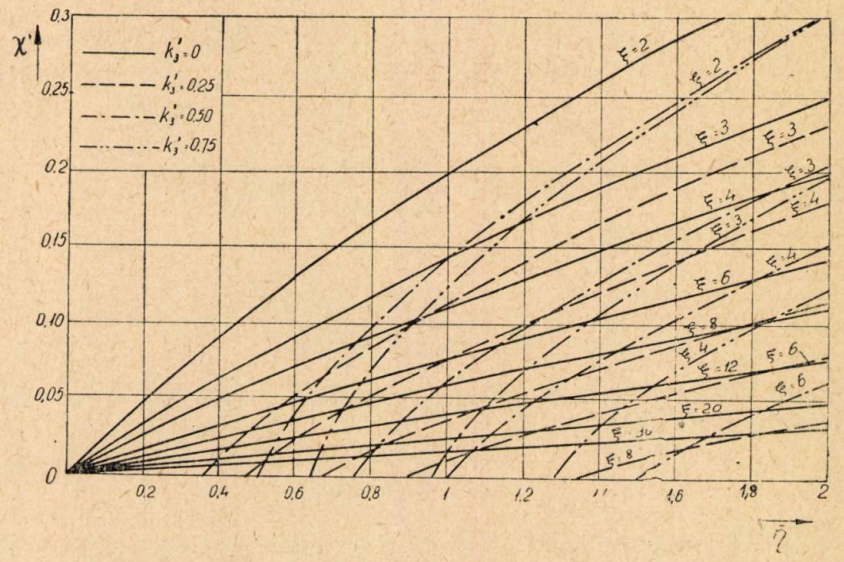


Fig. 7

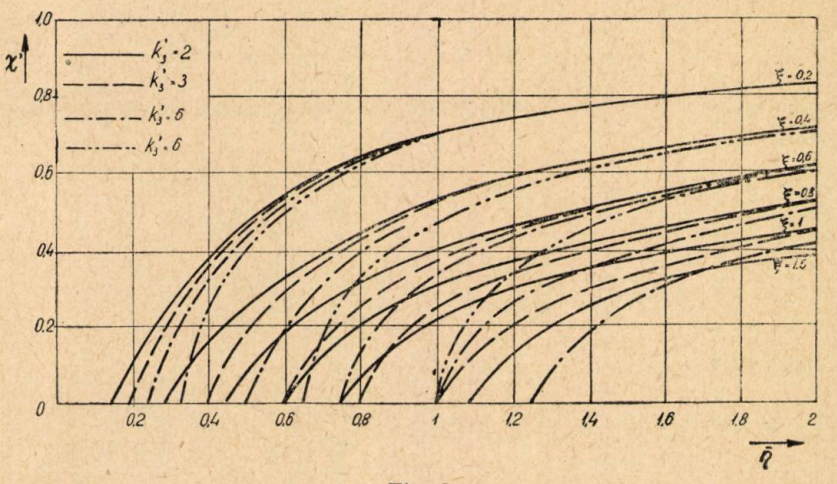


Fig. 8

Deoarece întotdeauna $K'_1 > 0$ (40) rezultă că întotdeauna rădăcinile (44) sînt reale. Cu alte cuvinte, în această zonă nu mai avem de-a face cu două genuri de soluții pentru ecuația diferențială (42) separate de un regim critic, cum se întîmplă în porțiunea convergentă AB.

În aceste condiţii, notînd cu

$$K_3' = \frac{2K_1'}{\xi}, \tag{45}$$

integrala ecuaţiei (42) este

$$[\bar{\eta} + \xi(1 - \sqrt{1+K_3'})]^{1-\frac{1}{\sqrt{1+K_3'}}} \cdot [\bar{\eta} + \xi(1 + \sqrt{1+K_3'})]^{1+\frac{1}{\sqrt{1+K_3'}}} = K_2' \bar{\delta}^2 \tag{46}$$

sau

$$\bar{\eta}^2 + 2\xi\bar{\eta} - \xi^2 K_3' = K_2' \bar{\delta}^2 \left| \frac{\bar{\eta} + \xi(1 - \sqrt{1+K_3'})}{\bar{\eta} + \xi(1 + \sqrt{1+K_3'})} \right|^{\frac{1}{\sqrt{1+K_3'}}} \tag{47}$$

Să notăm cu χ'' termenul

$$\chi'' = \left| \frac{\bar{\eta} + \xi(1 - \sqrt{1+K_3'})}{\bar{\eta} + \xi(1 + \sqrt{1+K_3'})} \right|^{\frac{1}{\sqrt{1+K_3'}}} \tag{48}$$

Variaţia acestui termen în funcţie de $\bar{\eta}$, pentru diverse valori K_3' şi ξ, este arătată în figurile 7 şi 8.

Condiţii de limită

Pentru determinarea efectivă a repartiţiei de presiuni este necesar să se determine constantele arbitrare K_2, K_2', K_3 şi K_3'. Aceste constante pot fi determinate astfel încît să fie îndeplinite condiţiile la limită ale problemei, adică la $\theta = 0$ şi $\theta = 2\pi$ respectiv la

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_1; \quad \bar{p} = 1; \quad \bar{\eta} = \bar{\delta}_1 = 1 + \alpha. \tag{49}$$

În plus trebuie să existe racordare între cele două soluţii de pe porţiunile AB şi BC, adică

$$\text{la } \delta = \delta_1; \quad p_{AB} = p_{BC} = p_0; \left(\frac{dp}{dx}\right)_{AB} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{BC} \tag{50}$$

şi

$$\text{la } \delta = \delta_2; \quad p_{AB} = p_{BC}; \quad \left(\frac{dp}{dx}\right)_{AB} = \left(\frac{dp}{dx}\right)_{BC} \tag{51}$$

sau în variabilele $\bar{\delta}$, $\bar{\eta}$:

$$\text{la } \bar{\delta} = \bar{\delta}_1 = 1 + \alpha; \quad \bar{p}_{AB} = \bar{p}_{BC} = 1; \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}}\right)_{AB} = -\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}}\right)_{BC} \tag{52}$$

şi

$$\text{la } \bar{\delta} = \bar{\delta}_2 = 1 - \alpha; \quad \frac{\bar{p}_{AB} = \bar{p}_{BC}}{(\bar{r}_{AB} = \bar{\eta}_{BC} = \bar{r}_2)}; \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}}\right)_{AB} = -\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\delta}}\right)_{BC}. \tag{53}$$

Condiţiile (50_2) şi (51_2), care impun ca la $\theta = 0$ ($\theta = 2\pi$) şi $\theta = \pi$ tangenta la curba presiunilor să fie aceeaşi (racordarea între cele două curbe să se facă fără

puncte unghiuloase), atrag imediat după ele, ţinînd seama de (4) şi de (35), condiţia

$$C_1 = C_1' \tag{54}$$

adică

$$K_1 = K_1'; \quad K_3 = K_3'. \tag{55}$$

Condiţia (54) se mai scrie

$$p_{\max}\,\delta_0 = p_{\min}\,\delta_0' \tag{56}$$

indiferent de regimul de lucru.

În cazul cînd $K_3 > 1$, condiţiile (49) se scriu

$$(\bar{\delta}_1^2 - 2\,\xi\bar{\delta}_1 + \xi^2 K_3)\,(\chi)_{\bar{\eta}=\bar{\delta}_1} = K_2\bar{\delta}_1^2 \tag{57}$$

pentru zona AB şi

$$\bar{\delta}_1^2 + 2\,\xi\bar{\delta}_1 - \xi^2 K_3 = K_2'\bar{\delta}_1^2(\chi'')_{\bar{\eta}=\bar{\delta}_1} \tag{58}$$

pentru zona BC.

Condiţiile (52_1) şi (53_1) se scriu

$$(\bar{\eta}_2^2 - 2\,\xi\,\bar{\eta}_2 + \xi^2 K_3)\,(\chi)_{\bar{\eta}=\bar{\eta}_2} = K_2\,\delta_2^2, \tag{59}$$

$$\bar{\eta}_2^2 + 2\xi\bar{\eta}_2 - \xi^2 K_3 = K_2'\bar{\delta}_2^2(\chi'')_{\bar{\eta}=\bar{\eta}_2}. \tag{60}$$

Obţinem astfel un sistem de patru ecuaţii (57), (58), (59), (60) cu patru necunoscute: K_2, K_2', K_3, η_2 ($\bar{\eta}$ la $\delta = \delta_2 = 1 - \alpha$), sistem care se reduce imediat la un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, K_3 şi $\bar{\eta}_2$, deoarece K_2 şi K_2' se deduc din relaţiile (57) şi (58):

$$\left.\begin{aligned}
K_2 &= \frac{1}{\bar{\delta}_1^2}(\bar{\delta}_1^2 - 2\xi\,\bar{\delta}_1 + \xi^2 K_3)\,(\chi)_{\bar{\eta}=\bar{\delta}_1}\\
K_2' &= \frac{(\bar{\delta}_1^2 + 2\xi\,\bar{\delta}_1 - \xi^2 K_3)}{\bar{\delta}_1^2(\chi'')_{\bar{\eta}=\bar{\delta}_1}}\\
(\bar{\eta}_2^2 - 2\xi\,\bar{\eta}_2 + \xi^2 K_3)\,(\chi)_{\bar{\eta}=\bar{\eta}_2} &= K_2\,\bar{\delta}_2^2\\
\bar{\eta}_2^2 + 2\xi\,\bar{\eta}_2 - \xi^2 K_3 &= K_2'\,\bar{\delta}_2^2\,(\chi'')_{\bar{\eta}=\bar{\eta}_2}
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

sistem care se poate rezolva fără dificultăţi prin încercări sau grafic, pentru fiecare caz în parte.

În mod analog, în cazul cînd $K_3 < 1$, sistemul de ecuaţii care determină pe K_2, K_2', K_3 şi $\bar{\eta}_2'$ este

$$\left.\begin{aligned}
K_2 &= \frac{\bar{\delta}_1^2 - 2\xi\,\bar{\delta}_1 + \xi^2 K_3}{\bar{\delta}_1^2\,(\chi')_{\bar{\eta}=\bar{\delta}_1}}\\
K_2' &= \frac{\bar{\delta}_1^2 + 2\xi\,\bar{\delta}_1 - \xi^2 K_3}{\bar{\delta}_1^2\,(\chi'')_{\bar{\eta}=\bar{\delta}_1}}\\
\bar{\eta}_2^2 - 2\xi\,\bar{\eta}_2 + \xi^2 K_3 &= K_2\,\bar{\delta}_2^2\,(\chi')_{\bar{\eta}=\bar{\eta}_2}\\
\bar{\eta}_2^2 + 2\xi\,\bar{\eta}_2 - \xi^2 K_3 &= K_2'\,\bar{\delta}_2\,(\chi'')_{\bar{\eta}=\bar{\eta}_2}
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Sistemul (61) sau (62) se rezolvă mai ușor dacă se dau diferite valori lui K_3 și se calculează K_2, K_2' și cele două valori $\bar{\eta}_2$ care corespund. Soluția sistemului este pentru acea valoare a lui K_3 pentru care cele două valori $\bar{\eta}_2$, ce se obțin din (61_3) și (61_4) respectiv din (62_3) și (62_4), sînt egale.

Metode de aproximare

Metoda de determinare a repartiției de presiuni expusă mai sus, nu este riguros exactă, ci aproximativă, aproximația constînd în faptul că variația reală a grosimii δ, a fost înlocuită cu o variație liniară. Este interesant deci să se determine cel puțin calitativ natura acestei aproximații, lucru ce se poate efectua cu ușurință.

Într-adevăr să notăm presiunea și grosimea filmului de lubrifiant calculate cu p_c și δ_c, presiunea și grosimea reală cu p și δ, iar diferențele între valorile reale și calculate cu Δp și respectiv $\Delta\delta$, adică

$$\left.\begin{aligned} p_c &= p + \Delta p \\ \delta_c &= \delta + \Delta\delta \end{aligned}\right| \tag{63}$$

Considerînd că valorile p_c și δ_c satisfac în mod aproximativ și ecuația diferențială (4) se poate scrie

$$\frac{d(p+\Delta p)}{dx} = 6\mu V\left[\frac{1}{(\delta+\Delta\delta)^2} - \frac{C_1}{(\delta+\Delta\delta)^3(p+\Delta p)}\right]. \tag{64}$$

Integrînd în ambii membri de la 0 la x obținem

$$p+\Delta p = 6\mu V\int_0^x\left[\frac{1}{(\delta+\Delta\delta)^2} - \frac{C_1}{(\delta+\Delta\delta)^3(p+\Delta p)}\right]dx \tag{65}$$

și cum $\frac{\Delta\delta}{\delta}$ și $\frac{\Delta p}{p}$ sînt mici

$$p+\Delta p \cong 6\mu V\int_0^x\left[\frac{1}{\delta^2}\left(1-2\frac{\Delta\delta}{\delta}\right) - \frac{C_1}{\delta^3 p}\left(1-3\frac{\Delta\delta}{\delta}\right)\left(1-\frac{\Delta p}{p}\right)\right]dx. \tag{66}$$

Neglijînd încă o dată infinițiii mici de ordin superior și ținînd seamă că

$$p = 6\mu V\int_0^x\left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{C_1}{\delta^3 p}\right)dx \tag{67}$$

se obține imediat

$$\Delta p = -6\mu V\int_0^x\left[2\frac{\Delta\delta}{\delta^3} - 3C_1\frac{\Delta\delta}{\delta^4 p}\right]dx - 6\mu V C_1\int_0^x\frac{\Delta p}{\delta^4 p^2}dx. \tag{68}$$

Deoarece interesează eroarea Δp făcută în special în zona presiunilor maxime, unde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, vom despărți integralele din membrul al doilea, în cîte o integrală de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ și una de la $\frac{\pi}{2}$ la π. În intervalul $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\Delta\delta < 0$, iar δ este mare în comparație cu δ în intervalul $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ care interesează ($\bar{\delta} = 1 +$

$+ \alpha \mid \cos\theta \mid$ față de $\bar{\delta} = 1 - \alpha \mid \cos\theta \mid$). În aceste condiții integralele de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ pot fi neglijate în prima aproximație. De asemenea, termenii care conțin pe p la numitor pot fi neglijați și deoarece pentru $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\Delta\delta > 0$ rezultă că în zona presiunilor maxime

$$\Delta p < 0 \tag{69}$$

sau, cu alte cuvinte,

$$p_c < p \qquad \text{pentru} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \tag{70}$$

adică presiunile calculate sînt, în zona presiunilor maxime, mai mici decît cele exacte.

Procedînd analog se poate arăta că:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{pentru} & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} & ; \quad \Delta p > 0 & ; \quad p_c > p \\ \text{pentru} & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi & ; \quad \Delta p < 0 & ; \quad p_c < p \\ \text{pentru} & \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} & ; \quad \Delta p > 0 & ; \quad p_c > p \\ \text{pentru} & \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi & ; \quad \Delta p < 0 & ; \quad p_c < p \end{array}\right\} . \tag{71}$$

Rezultă deci că aproximația făcută nu va influența sensibil mărimea sarcinii, modificînd doar într-o oarecare măsură poziția ei.

Raționamentele de mai sus sînt desigur numai calitative și făcute în ipoteza că constanta C_1 rămîne aceeași. În realitate constanta C_1 calculată diferă de cea reală, și, în consecință, intervalele (71) nu vor fi riguroase. Rezultatele rămîn însă calitativ valabile.

Erorile relative $\frac{\Delta p}{p}$ cresc în excentricitatea α deoarece crește $\frac{\Delta\delta}{\delta}$ și scad pe măsură ce crește viteza de rotație (deoarece în acest caz presiunile cresc).

Presiunile se mai pot calcula în modul următor: calculîndu-se η_c din relațiile (25) sau (29) și (47), în loc să se împartă η_c cu δ_c, să se înlocuiască variația liniară cu variația reală δ. Se obține astfel în fiecare punct o presiune:

$$p'_c = \frac{\eta_c}{\delta} = p_c \frac{\delta_c}{\delta} = p_c \left(1 + \frac{\Delta\delta}{\delta}\right). \tag{72}$$

Cum am văzut (71), că Δp are semnul contrar semnului lui $\Delta\delta$, rezultă din (72) că atunci cînd $p_c < p$, $p'_c > p_c$ și invers. Dacă punem

$$p'_c = p + \Delta p' \tag{73}$$

rămîne să vedem dacă $\mid \Delta p' \mid < \mid \Delta p \mid$ sau invers. În primul caz aproximația făcută rămîne de aceeași natură (în minus în zona presiunilor maxime), iar dacă $\mid \Delta p' \mid > \mid \Delta p \mid$, aproximația schimbă de semn (în particular este în exces în zona presiunilor maxime).

Pentru aceasta să observăm că

$$\eta_c = \delta_c p_c = (\delta + \Delta\delta)(p + \Delta p) \tag{74}$$

și că

$$p'_c = p + \Delta p' = \frac{\delta_c p_c}{\delta} = p\left(1 + \frac{\Delta\delta}{\delta}\right)\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) \tag{75}$$

și neglijînd produsul $\Delta\delta\,\Delta p$:

$$\frac{\Delta p'}{p} = \frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta p}{p}. \tag{76}$$

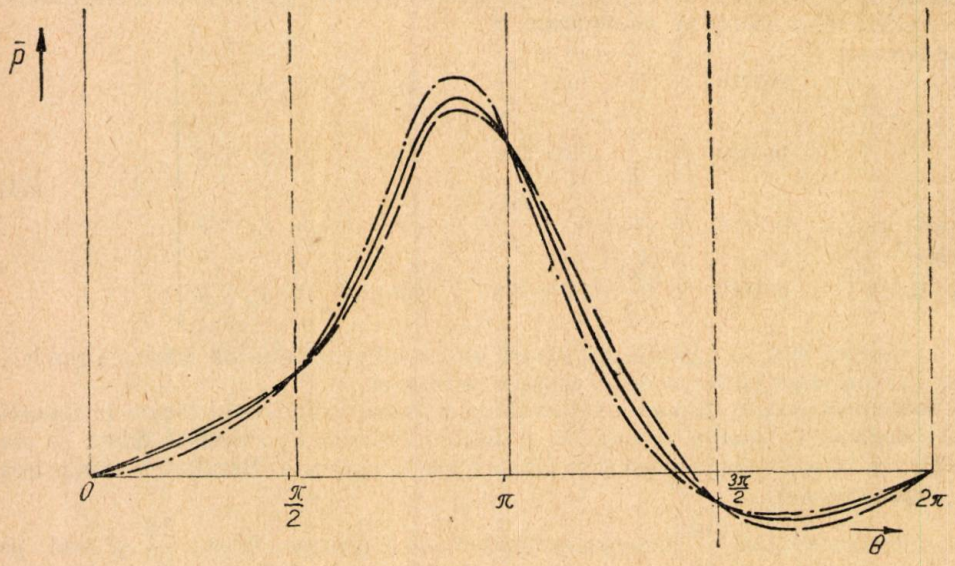


Fig. 9

În calculele efectuate (a se vedea de exemplu fig. 18) rezultă că în toate cazurile $\left|\frac{\Delta p}{p}\right| < \left|\frac{\Delta\delta}{\delta}\right|$. În acest caz $\Delta p'$ are semnul lui $\Delta\delta$, adică invers semnului lui Δp. Prin urmare în regiunile unde prima metodă dă o aproximaţie în lipsă, a doua metodă dă o aproximaţie în exces şi invers.

Rezultă deci că dacă am cunoaşte soluţia exactă, cele două soluţii aproximative propuse s-ar prezenta ca în figura 9. Utilitatea consideraţiilor făcute constă tocmai în faptul că necunoscînd soluţia exactă, avem totuşi posibilitatea să ştim calitativ sensul erorii făcute. De asemenea acest calcul arată că o medie a celor două soluţii în fiecare punct este mai apropiată de soluţia exactă decît fiecare dintre soluţii, după cum se poate constata imediat din figura 9.

În sfîrşit mai există o metodă de calcul a repartiţiei de presiuni, care dă în anumite cazuri erori ceva mai mari, însă care are în schimb avantajul unei forme mai simple şi mai uşor de utilizat în calcule.

În consideraţiile precedente am studiat variaţia expresiilor

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \exp\left[\frac{2}{\sqrt{K_3-1}}\operatorname{arctg}\frac{\bar\eta-\xi}{\xi\sqrt{K_3-1}}\right] && (K_3>1)\\ \chi' &= \left[\frac{\bar\eta-\xi(1-\sqrt{1-K_3})}{\bar\eta-\xi(1+\sqrt{1-K_3})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1-K_3}}} && (0<K_3<1)\\ \chi'' &= \left[\frac{\bar\eta+\xi(1-\sqrt{1+K_3})}{\bar\eta+\xi(1+\sqrt{1+K_3})}\right]^{\frac{1}{\sqrt{1+K_3}}} && (K_3>0) \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

în funcţie de $\bar\eta$, avînd ξ şi K_3 drept parametri. S-a văzut cu această ocazie că în intervalul $0<\bar\eta<2$, care este intervalul posibil de variaţie a lui $\bar\eta$, variaţia acestor expresii se apropie de o linie dreaptă, dacă K_3 nu are o valoare prea apropiată de cea critică ($K_3=1$). În aceste condiţii se poate scrie

$$\left.\begin{aligned} \chi &\cong a\bar\eta + b\\ \chi' &\cong a'\bar\eta + b'\\ \chi'' &\cong a''\bar\eta + b'' \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

unde pentru a cunoaşte valorile coeficienţilor a, b, este suficient să cunoaştem valorile exacte ale lui χ în două puncte χ_1, χ_2 corespunzătoare la două valori pentru $\bar\eta$: $\bar\eta_1$ şi $\bar\eta_2$. În acest caz

$$a=\frac{\chi_2-\chi_1}{\bar\eta_2-\bar\eta_1}\ ;\quad b=\frac{\chi_2\bar\eta_1-\chi_1\bar\eta_2}{\bar\eta_2-\bar\eta_1} \qquad (79)$$

există relaţii analoge şi pentru coeficienţii a', b' şi a'', b''.

Atunci relaţiile, care dau repartiţia de presiuni, vor fi, ţinînd seama de (25), (29), (47) şi (78):

pentru zona AB

$$(\bar\eta^2-2\xi\bar\eta+\xi^2K_3)(a\bar\eta+b)=K_2\bar\delta^2,\ (K_3>1) \qquad (80)$$

$$\bar\eta^2-2\xi\bar\eta+\xi^2K_3=K_2\bar\delta^2(a'\bar\eta+b'),\ (K_3<1), \qquad (81)$$

şi pentru zona BC

$$\bar\eta^2+2\xi\bar\eta-\xi^2K_3=K_2'\bar\delta^2(a''\bar\eta+b'') \qquad (82)$$

adică pe zona AB, pentru $K_3>1$ rezultă o ecuaţie de gradul trei:

$$a\bar\eta^3+(b-2a\xi)\bar\eta^2+(a\xi^2K_3-2\xi b)\bar\eta+b\xi^2K_3-K_2\bar\delta^2=0, \qquad (83)$$

de unde se poate explicita $\bar\eta$, rezolvînd această ecuaţie (păstrînd rădăcina care este pozitivă şi cuprinsă între $1+\alpha$ şi $1-\alpha$).

Pentru zona AB în cazul $K_3<1$ şi pentru zona BC în toate cazurile rezultă cîte o ecuaţie de gradul doi:

$$\bar\eta^2-2\left(\xi+a'\frac{K_2\bar\delta^2}{2}\right)\bar\eta+\xi^2K_3-K_2\bar\delta^2b'=0, \qquad (84)$$

$$\bar\eta^2+2\left(\xi-a''\frac{K_2'\bar\delta_2}{2}\right)\bar\eta-\xi^2K_3-K_2\delta^2b''=0 \qquad (85)$$

de unde presiunea va fi

$$\bar{p} = \frac{1}{\delta}\left[\xi + a'\frac{K_2\bar{\delta}^2}{2} + \sqrt{\left(\xi + a'\frac{K_2\bar{\delta}^2}{2}\right)^2 - (\xi^2 K_3 - K_2\bar{\delta}^2 b')}\right] \tag{86}$$

pentru zona AB și

$$\bar{p} = \frac{1}{\delta}\left[a''\frac{K_2'\bar{\delta}^2}{2} - \xi + \sqrt{\left(a''\frac{K_2'\bar{\delta}^2}{2} - \xi\right)^2 + \xi^2 K_3 + K_2'\bar{\delta}^2 b''}\right] \tag{87}$$

pentru zona BC.

Constantele K_2, K_2', K_3 se pot găsi fie utilizînd sistemul (61) respectiv (62), fie utilizînd relațiile (83) respectiv (86) și (87) obținute. În primul caz se recomandă ca valorile $\bar{\eta}_1$ și $\bar{\eta}_2$ (79) utilizate pentru găsirea constantelor a și b să fie luate egale cu valorile lui $\bar{\eta}$ în punctele extreme ($\theta = 0$ și $\theta = \pi$), adică $\bar{\eta}_1 = 1+\alpha$, $\bar{\eta}_2 = (\bar{\eta})_{\bar{\delta}_2 = 1-\alpha}$. În acest caz constantele K_2, K_2', K_3 vor fi cele exacte. Dacă se utilizează relațiile (83) sau (86) și (87) pentru găsirea constantelor, este recomandabil să se ia $\eta_1 = 1+\alpha$ și $\bar{\eta}_2 = 1-\alpha$ într-o primă aproximație, urmînd ca după găsirea lui K_2, K_2', K_3 să se reia calculul, punînd pentru $\bar{\eta}_2$ valoarea lui $\bar{\eta}$ obținută la $\bar{\delta}_2 = 1-\alpha$.

Eroarea ce se face asupra presiunilor este acum ceva mai mare, și anume în exces în zona AB pentru $K_3 < 1$ și alternativ în zona AB pentru $K_3 > 1$ și în zona BC, concluzii ce rezultă imediat din variația expresiilor χ, χ', χ'' (fig. 4, 5, 7, 8) și din relațiile (25), (29), (47).

De data aceasta introducerea valorii reale a lui δ ar introduce o aproximație în exces suplimentară în zona presiunilor maxime, așa că nu este recomandabilă.

Regimul critic

Anterior s-a arătat că repartiția de presiuni în zona convergentă AB a filmului de lubrifiant este guvernată de legi diferite, după cum $K_3 > 1$ sau $K_3 < 1$. Regimul pentru care $K_3 = 1$ a fost numit « regim critic ».

Acest fenomen prezintă o analogie cu scurgerile subsonice și supersonice ale gazelor, regimul $K_3 > 1$ fiind analog cu regimul $M < 1$ (M fiind numărul Mach al scurgerii), regimul $K_3 < 1$ fiind analog cu regimul $M > 1$ și în fine regimul critic $K_3 = 1$ prezentînd analogie cu regimul $M = 1$.

Într-adevăr s-a arătat că pentru o excentricitate relativă α dată, regimul critic se va produce pentru o anumită valoare a parametrului adimensional ξ, care caracterizează (împreună cu α) funcționarea lagărului, $\xi = \xi_c$. Pentru $\xi < \xi_c$, $K_3 > 1$ și pentru $\xi > \xi_c$ (pentru același α), $K_3 < 1$. Cum însă (13)

$$\xi = \frac{3\pi\mu\Omega}{2\alpha p_0 \psi^2} \tag{88}$$

rezultă că pentru un lagăr dat (ψ constant), menținînd aceleași condiții (p_0, μ) și aceeași excentricitate α, pe măsură ce crește ξ, Ω crește luînd toate valorile de la 0 la ∞, pentru $\xi = \xi_c$ corespunzînd $\Omega = \Omega_c$.

Deci pe măsură ce crește ξ, crește și Ω. Pentru $\Omega < \Omega_c$ (analog cu $M < 1$, $V < a$, a fiind viteza sunetului) avem $K_3 > 1$, la $\Omega = \Omega_c$ ($M = 1$, $V = a$) avem $K_3 = 1$ și pentru $\Omega > \Omega_c$ ($M > 1$, $V > a$) avem $K_3 < 1$.

Din relaţiile (25) şi (29) se constată că, pe măsură ce K_3 se apropie de 1, aceste relaţii utilizabile pentru respectiv $\Omega < \Omega_c$ şi $\Omega > \Omega_c$ nu se mai pot întrebuinţa, luînd forme nedeterminate $\left(0 \times \infty \text{ respectiv } \frac{\infty}{\infty}\right)$. Pentru $K_3 = 1$ este valabilă relaţia (32).

De aceea este interesant să ştim, care este valoarea lui ξ_c, cum variază ξ_c în funcţie de α, şi alura repartiţiei de presiuni la $\xi = \xi_c$.

Pentru calculul lui ξ_c să scriem condiţiile la limită (47), (50) şi (51). Obţinem astfel sistemul

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{\bar{\delta}_1}(\xi_c - \bar{\epsilon}_1)\exp\left(\frac{\xi_c}{\xi_c - \bar{\delta}_1}\right) \quad (\bar{\delta}_1 = 1+\alpha) \\ K_2' &= \frac{\bar{\delta}_1^2 + 2\xi_c\bar{\delta}_1 - \xi_c^2}{\bar{\delta}_1^2} \cdot \left[\frac{\bar{\delta}_1 + \xi_c(\sqrt{2}+1)}{\bar{\delta}_1 - \xi_c(\sqrt{2}-1)}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ (\xi_c - \bar{\eta}_2)\exp\left(\frac{\xi_c}{\xi_c - \bar{\eta}_2}\right) &= K_2\bar{\delta}_2 \\ (\bar{\eta}_2^2 + 2\xi_c\bar{\eta}_2 - \xi_c^2)\left[\frac{\bar{\eta}_2 + \xi_c(\sqrt{2}+1)}{\bar{\eta}_2 - \xi_c(\sqrt{2}-1)}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= K_2'\bar{\delta}_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

care este un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute: K_2, K_2', $\bar{\eta}_2$ şi ξ_c. Rezolvînd acest sistem pentru diverse valori α, obţinem valorile din tabloul de mai jos.

α	0	0,03	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	1
ξ_c	1,995	1,995	1,996	2	2,005	2,045	2,087	2,146	2,21	0,254	2,255	2,255	2

(90)

În figura 10 este reprezentată această variaţie în funcţie de α. Este interesant de remarcat faptul că la $\alpha = 0$, ξ_c este finit, ceea ce înseamnă, ţinînd seama de relaţia (88), că $\Omega_c = \infty$.

În figura 11 s-au reprezentat repartiţiile de presiuni la regimul critic pentru $\alpha = 0{,}25$, 0,5, 0,75 şi în figura 12 s-au reprezentat aceleaşi repartiţii, considerînd însă a doua metodă aproximativă arătată în paragraful anterior (p_c').

Din aceste repartiţii se constată că nu trebuie să se înţeleagă prin regim critic, un regim în care presiunea ar prezenta anomalii sau discontinuităţi. Regimul critic este un regim care, ca şi în multe fenomene, reprezintă o trecere calitativă de la anumite legi care variază fenomenul, la alte legi.

Se mai constată că presiunile cresc cu excentricitatea, după cum era de aşteptat. Mărimea presiunilor la regimul critic este însă foarte redusă (suprapresiuni de 0,1 ... 4 kg/cm^2). Rezultă deci că şi sarcinile corespunzătoare sînt foarte mici. Cu alte cuvinte funcţionarea la regimuri sub cele critice nu este recomandabilă, deoarece conduce la excentricităţi apropiate de $\alpha = 1$, care practic, din cauza grosimilor δ foarte mici şi a eventualelor impreciziuni ale suprafeţei, conduc la frecare metal pe metal. De aici se vede, încă o dată, că pentru ca un lagăr cu aer să funcţioneze în bune condiţii, trebuie să fie antrenat cu viteze unghiulare foarte mari.

Aceste calcule confirmă de asemenea consideraţiile făcute în paragraful precedent cu privire la natura aproximaţiilor introduse, şi la faptul că pe măsură ce creşte excentricitatea, valoarea erorii făcute este mai mare.

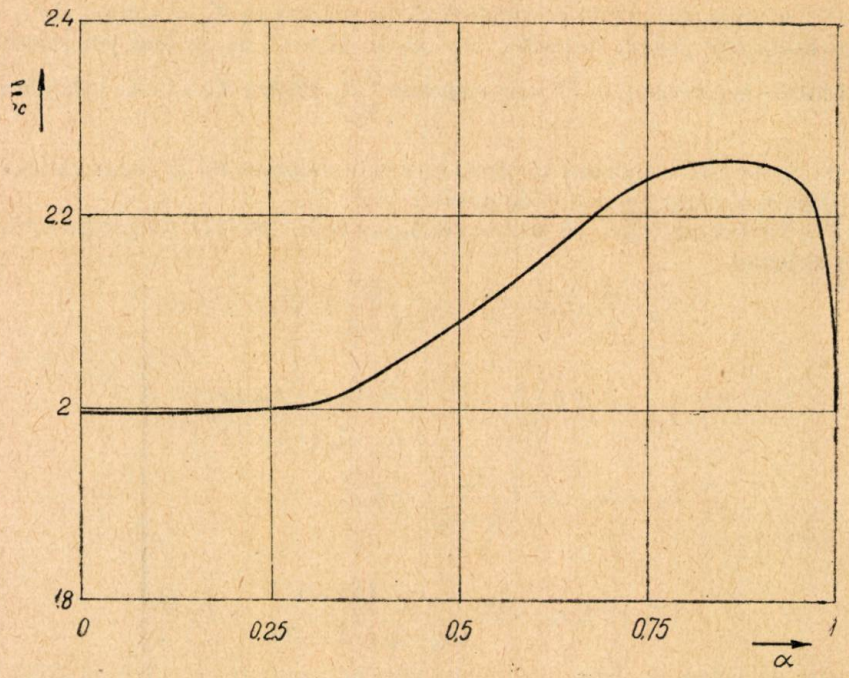

2.4
2.2
2
1.8
0
0.25
0.5
0.75
1
α

Fig. 10

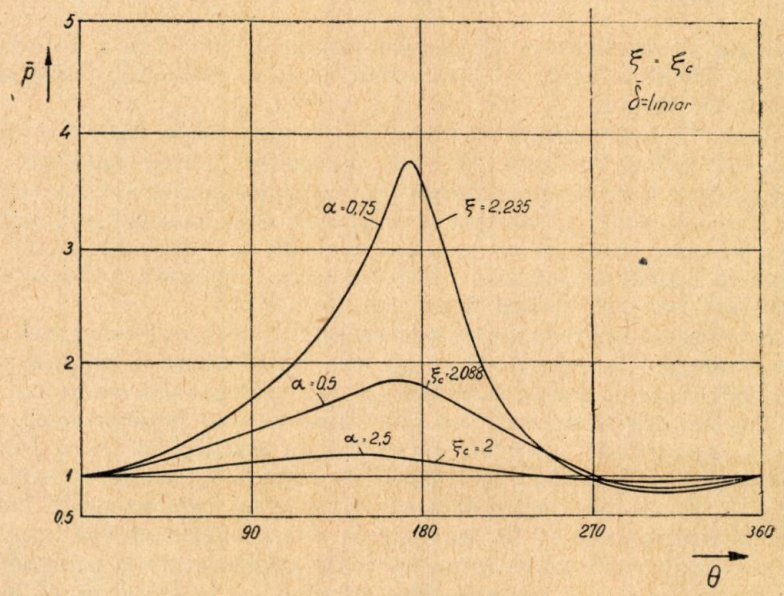

5
4
3
2
1
0.5
90
180
270
360
θ
ξ = ξc
δ=liniar
α=0.75
ξ=2.235
α=0.5
ξc=2.086
α=2.5
ξc=2

Fig. 11

Calculul efectiv al repartiției de presiuni

Calculul efectiv al repartiției de presiuni pentru ξ și α date este mai simplu decît pare la prima vedere pentru oricare din metodele propuse.

Într-adevăr toată dificultatea constă în găsirea constantelor K_2, K_2', K_3, adică în rezolvarea sistemului (65) sau (66) după caz (respectiv după cum $\xi < \xi_c$, sau $\xi > \xi_c$, ξ_c fiind luat din diagrama din figura 10), sistem care, după cum s-a arătat, se rezolvă destul de ușor prin încercări.

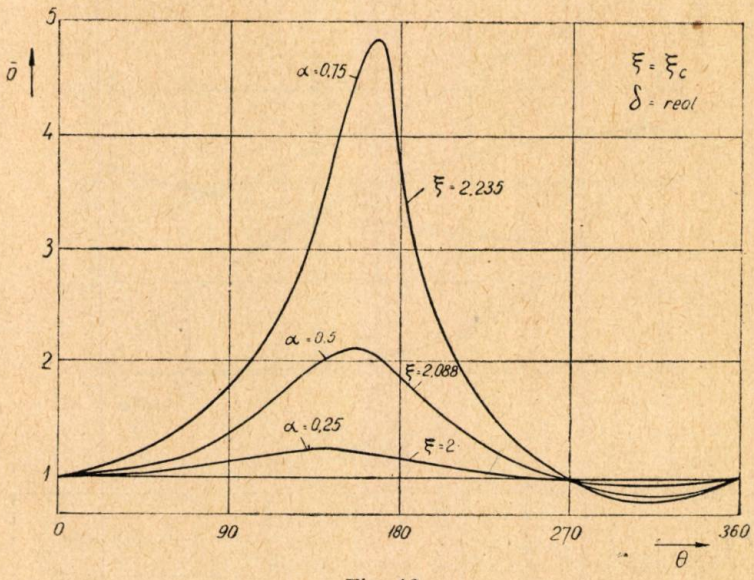


Fig. 12

Odată cunoscute constantele K_2, K_2', K_3, utilizînd ecuațiile (25) sau (29) și (47), se poate găsi pentru diverse valori $\bar{\eta}$, valorile $\bar{\delta}$ corespunzătoare și din relația

$$\bar{p} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{\delta}} \tag{91}$$

presiunea respectivă. Unghiul θ corespunzător grosimii δ calculate se obține din relațiile (3) și (33) adică

$$\theta = \frac{\pi(\bar{\delta}_1 - \bar{\delta})}{2\alpha}, \quad \text{(zona } AB\text{)} \tag{92}$$

și

$$\theta = \frac{\pi(\bar{\delta} + \bar{\delta}_1 - 2\bar{\delta}_2)}{2\alpha}, \quad \text{(zona } BC\text{)}. \tag{93}$$

Valorile reale, în aceste puncte, pentru $\bar{\delta}$ se pot calcula cu ajutorul relației

$$\bar{\delta} = 1 + \alpha \cos\theta. \tag{94}$$

Vom da ca exemplu de calcul, găsirea repartiției de presiuni pentru un regim cu $\xi < \xi_c$ și pentru un regim $\xi > \xi_c$. Valorile obținute le vom compara cu rezultatele

teoretice obținute în aceleași cazuri practice de către Scheinberg [2], care dă o metodă numerică de rezolvare a ecuației diferențiale (4) printr-o integrare grafică a ei.

Exemplul 1: $\xi = 0{,}523$; $\alpha = 0{,}33$. Cum, pentru $\alpha = 0{,}33$, $\xi_c = 2{,}01$ (fig. 10) rezultă deci că $\xi < \xi_c$ și $K_3 > 1$.

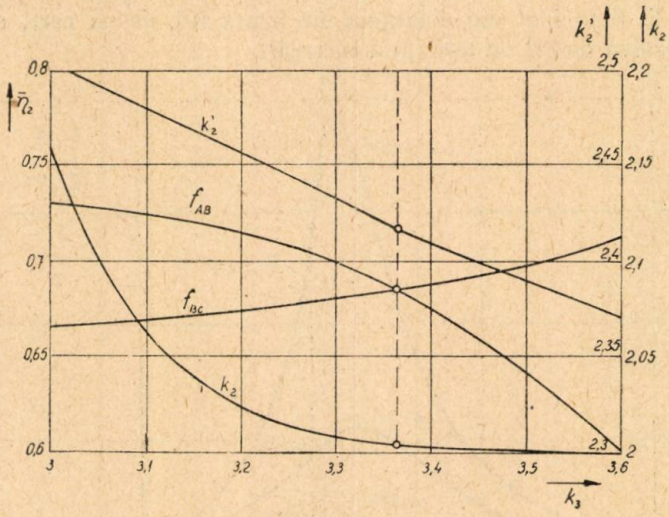


Fig. 13

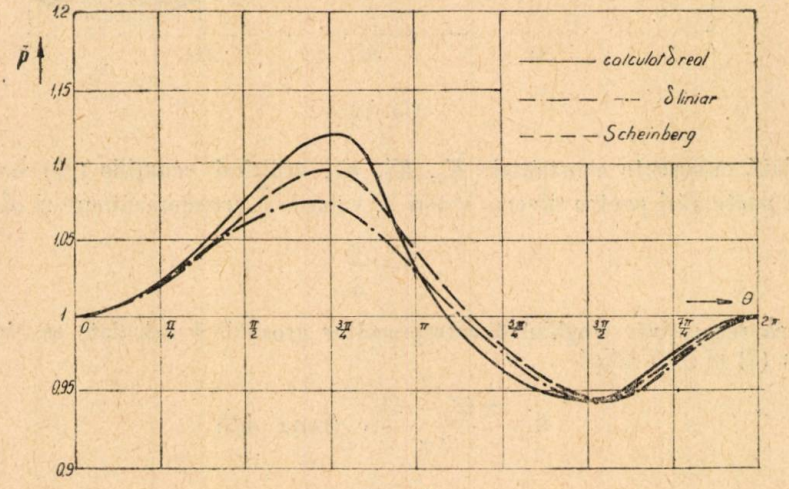


Fig. 14

Vom utiliza deci sistemul (61) în care vom calcula K_2, K_2', $(\eta_2)_{AB}$, $(\eta)_{BC}$ pentru succesiv $K_3 = 3$, 3,3 și 3,5. Variația acestor mărimi în funcție de K_3 este arătată în figura 13.

Din această diagramă se vede că $(\eta_2)_{AB} = (\eta_2)_{BC}$, se obține pentru $K_3 = 3{,}365$, la care corespunde $K_2 = 1{,}916$, $K_2' = 2{,}54$ și $\eta_2 = 0{,}684$. Valoarea lui K_3 calculată de Scheinberg este $K_3 = 3{,}28$. Diferența este deci de 2,6 %.

Calculăm în continuare $\bar{\delta}_{AB}(\bar{\eta})$ și $\bar{\delta}_{BC}(\bar{\eta})$ pentru $\bar{\eta} = 0{,}684$; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2; 1,3; și 1,33 și unghiul θ corespunzător, ca și valoarea $\bar{p}$ (94). În figura 14 este reprezentată repartiția de presiuni. Curba —·—· corespunde utilizării variației liniare pentru $\bar{\delta}$, curba ——— utilizării variației reale pentru $\bar{\delta}$, iar curba – – – – reprezintă repartiția de presiuni calculată de Scheinberg.

Din figura 14 se vede că diferențele sînt mici, eroarea asupra mărimii presiunilor nu depășește 0,02 %. Se confirmă de asemenea considerațiile anterioare asupra erorii făcute. În sfîrșit, dacă facem media valorilor obținute prin cele două căi arătate, curba obținută coincide aproape cu curba calculată de Scheinberg.

Exemplul 2: $\xi = 2{,}53$; $\alpha = 0{,}33$. Pentru $\alpha = 0{,}33$ (fig. 10), rezultă că $\xi = 2{,}01$ și deci $\xi > \xi_c$, $K_3 < 1$. Vom utiliza sistemul (62) în care vom calcula K_2, K_2', $(\bar{\eta}_2)_{AB}$, $(\bar{\eta}_2)_{BC}$ pentru succesiv $K_3 = 0{,}8$; 0,82; 0,84. Variația acestor mărimi în funcție de K_3 este arătată în figura 15.

Pentru $(\bar{\eta}_2)_{AB} = (\bar{\eta}_2)_{BC}$ corespunde (fig. 15), $K_3 = 0{,}825$ și $K_2 = 142$, $K_2' = 14{,}5$, $\bar{\eta}_2 = 0{,}9$. Valoarea lui K_3 după calculele lui Scheinberg este de 0,819, adică o diferență de 0,7 %.

Repartiția de presiuni este arătată în figura 16.

Și în acest caz aproximația este foarte bună, abaterile nedepășind 3,6 %. Media celor două metode coincide aproape cu curba reală, ca și în cazul precedent.

Repartiția de presiuni dedusă în ipoteza că χ' și χ'' variază liniar cu $\bar{\eta}$, dă abateri ceva mai mari, sub 10% însă, rezultat destul de bun dacă ținem seamă că exemplul de față este pentru K_3 aproape de 1. In cazurile cînd K_3 este mult depărtat de 1 abaterile sînt mult mai mici.

Din exemplele de mai sus rezultă că metoda analitică de calcul propusă permite găsirea repartiției de presiuni în lagărele circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze, cu o bună aproximație și fără calcule complicate.

Pentru a ușura calculul constantelor K_2, K_2', K_3, micșorînd numărul de încercări, dăm în figura 17 cu titlu de orientare, variația coeficentului K_3 în funcție de ξ, la diverse excentricități α.

Cazul vitezelor mari de rotație

S-a arătat că un lagăr cu aer funcționează în mai bune condiții, cînd vitezele de rotație sînt mai mari, respectiv cînd $\xi \gg \xi_c$.

Vom examina mai întîi cazul cînd $\Omega \to \infty$. În această situație $\xi \to \infty$ și $K_3 \to 0$ (19). Atunci relația (29) care dă repartiția de presiuni în zona AB se reduce la

$$\bar{\eta} - 2\xi = C_2 \bar{\delta}, \tag{95}$$

iar relația (47), care dă repartiția de presiuni în zona BC, se reduce la

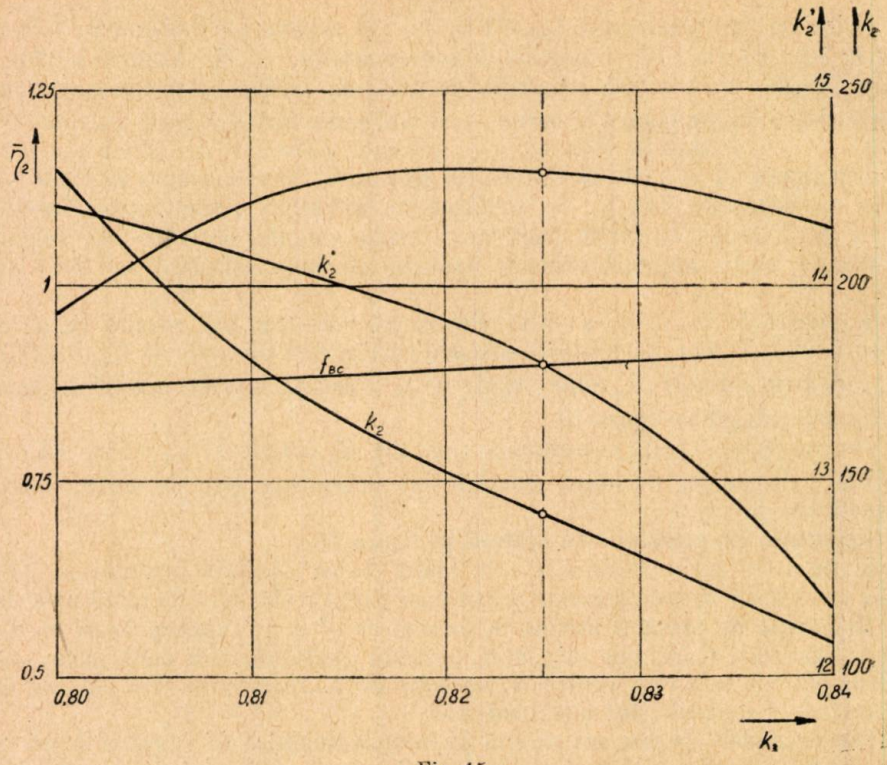
$$\bar{\eta} + 2\xi = C_2' \bar{\delta}, \tag{96}$$

relații care se mai pot scrie sub forma

$$\bar{\eta} = C_2 \bar{\delta} + 2\xi \tag{97}$$

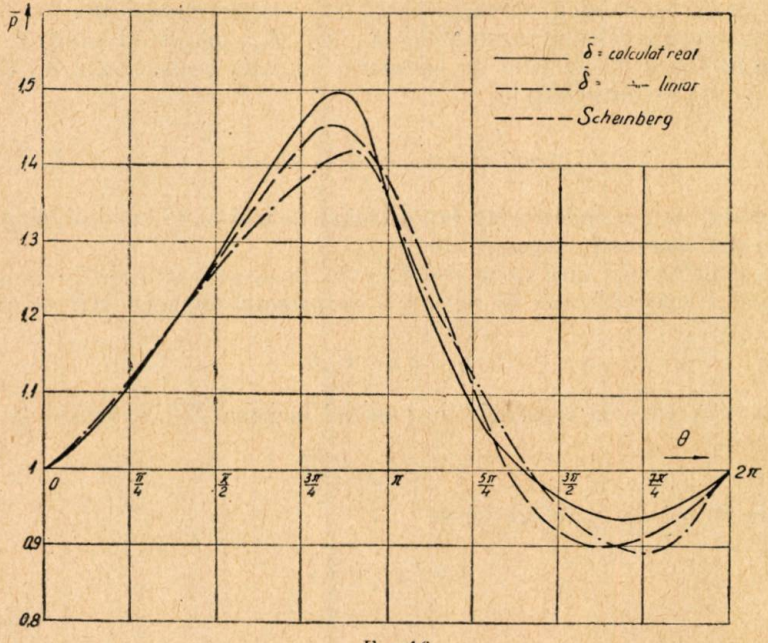
și

$$\bar{\eta} = C_2' \bar{\delta} - 2\xi. \tag{98}$$



k_2'
k_2
1,25
1
0,75
0,5
15
14
13
12
250
200
150
100
$\bar{\eta}_2$
k_2'
f_{BC}
k_2
0,80
0,81
0,82
0,83
0,84
k_2

Fig. 15



$\bar{p}$
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0,9
0,8
$\bar{\delta}$ = calculat real
$\bar{\delta}$ = " liniar
Scheinberg
θ
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$
2π

Fig. 16

Deoarece la viteze foarte mari $\xi \to \infty$ și cum se poate presupune că $\bar{\eta}$ rămîne finit, fapt verificat și experimental pentru vitezele de rotație foarte mari, rezultă că C_2 și C_2' tind către $-\infty$ și respectiv $+\infty$ în așa fel încît limita membrilor secunzi (97) și (98) să fie finită și egală (soluțiile trebuie să se racordeze), deci

$$\bar{\eta} = \bar{p}\bar{\delta} = \text{const.} \tag{99}$$

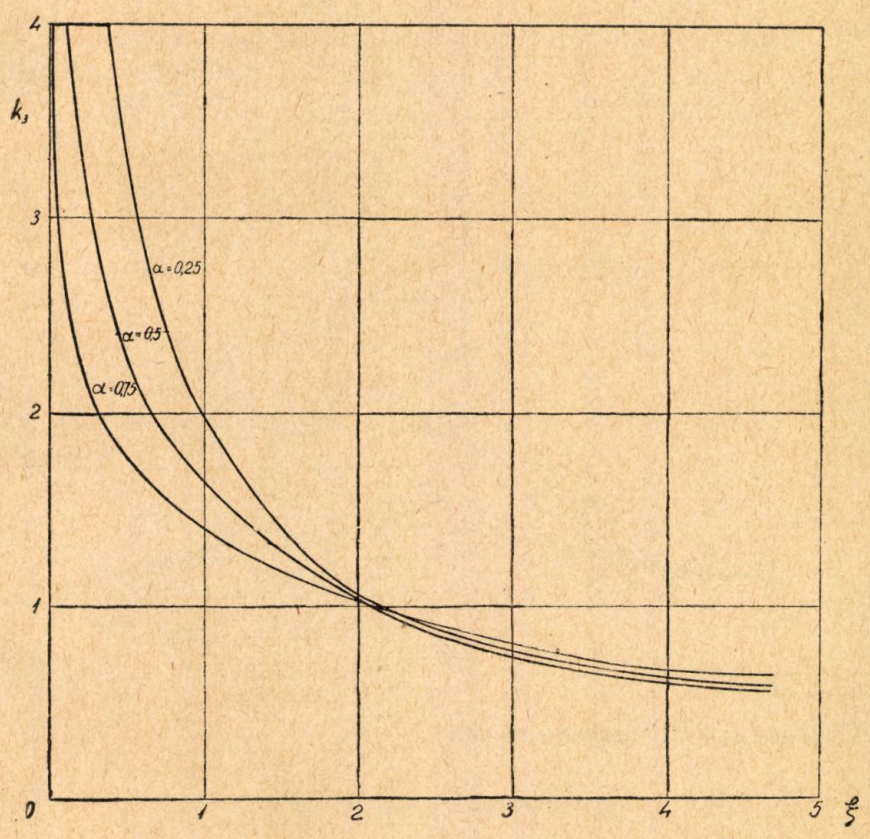


Fig. 17

Relația (99) a fost găsită și de alți autori [2]; ea se poate deduce de altfel imediat și din ecuația diferențială a mișcării

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{\delta^2}\left(1 - \frac{C_1}{p\delta}\right). \tag{100}$$

Într-adevăr, cînd $V \to \infty$, menținînd aceleași ipoteze $\frac{dp}{dx}$, trebuie să fie finit, rezultă deci

$$1 - \frac{C_1}{p\delta} = 0, \tag{101}$$

adică $\bar{p}\bar{\delta} = \text{const.}$

Un rezultat analog se obține și în cazul general, cînd evoluția gazului nu este izotermică, ci o politropă oarecare de exponent $\varkappa$. În acest caz ecuația diferențială a mișcării este [1]

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{\delta^2}\left(1 - \frac{C_1}{\delta p^{\frac{1}{\varkappa}}}\right) \tag{102}$$

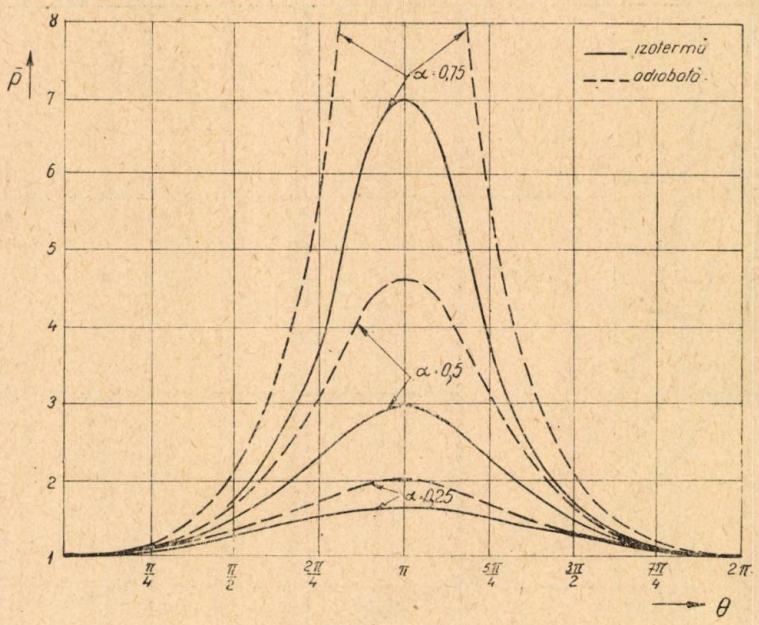


Fig. 18

și făcînd aceleași raționamente rezultă

$$\delta p^{\frac{1}{\varkappa}} = \text{const.} = \Delta(1+\alpha)\, p_0^{\frac{1}{\varkappa}}. \tag{103}$$

Relațiile (99) și (103) permit să se facă o comparație imediată a naturii aproximației introduse prin faptul că s-a considerat o evoluție izotermică. Astfel în figura 18 s-a trasat repartiția presiunilor pentru $\xi = \infty$, la diverse excentricități, în ipoteza unei evoluții izotermice ($\varkappa = 1$) și în ipoteza unei evoluții adiabatice ($\varkappa = 1{,}4$).

Se vede că la excentricități α mari diferențele sînt mari. Evident în realitate $1 < \varkappa < 1{,}4$, deci curba reală va fi cuprinsă între aceste limite. Rezultă totuși că în realitate presiunile vor fi totuși mai mari decît cele calculate în ipoteza $\varkappa = 1$. Oricum, s-a arătat că metoda de calcul propusă (considerînd în final variația reală pentru δ) dă valori mai mari decît cele exacte, rezultatele vor fi mai aproape de realitate decît dacă ar fi fost calculate exact. Cum din figura 18 se vede că această diferență crește cu α și cum s-a arătat că eroarea Δp făcută în exces crește cu α, rezultă că metoda propusă se poate aplica pentru excentricități mai mari cu mai bune rezultate decît o metodă exactă sau un calcul grafic exact.

★

La viteze mari de rotație, repartiția de presiuni poate fi găsită aproximativ, însă de o manieră rapidă și ușoară în felul următor. În ecuația care dă repartiția de presiuni în zona AB (29) se consideră

$$K_3 = 1 - \left(1 - \frac{\bar{\delta}_1}{\xi}\right)^2, \tag{104}$$

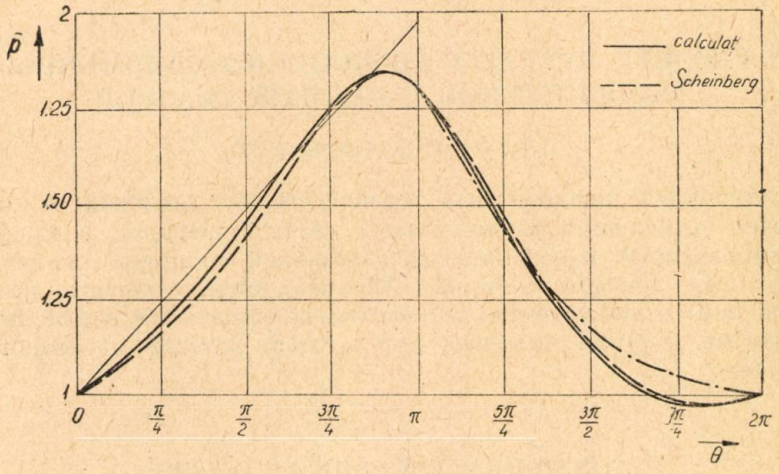


Fig. 19

fapt care corespunde la

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_1 = \bar{\delta}_1 = 1 + \alpha = \text{const.} \tag{105}$$

Cu valoarea lui K_3 dată de relația (104) se calculează repartiția de presiuni pe zona BC în modul obișnuit. Repartiția de presiuni se obține racordînd linia de pe zona AB cu curba presiunilor de pe zona BC.

Se consideră ca presiune de racordare în punctul $\theta = \pi$, media presiunilor obținute în acest punct, de pe zonele AB și BC, adică

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2} + \frac{\bar{\eta}_{2BC}}{\bar{\delta}_2}\right) = \frac{\bar{\delta}_1 + \bar{\eta}_{2BC}}{2\,\bar{\delta}_2}. \tag{106}$$

Ecuația (105) este un arc de hiperbolă, pentru cazul cînd se consideră o variație liniară pentru $\bar{\delta}$, și o curbă mai complicată pentru cazul cînd se consideră variația reală a grosimii δ. Deoarece s-a arătat că o medie a valorilor obținute pe aceste două căi este mai aproape de realitate decît fiecare din ele, se poate considera, în acest caz, în locul relației (105), relația

$$\bar{p} = 1 + \frac{2\alpha}{\pi\,(1+\alpha)}\,\theta. \tag{107}$$

Această metodă permite să se calculeze rapid și destul de exact repartiția de presiuni la viteze mari (de exemplu pentru $\xi > 5$), după cum se poate constata din figura 19, unde s-a trasat repartiția de presiuni în acest mod pentru $\xi = 7{,}86$, și $\alpha = 0{,}33$.

Constanta K_3, calculată astfel, este egală cu $K_3 = 0{,}3$ (față de $K_3 = 0{,}318$ după calculele lui Scheinberg), iar diferențele dintre repartiția de presiuni astfel calculată și cea găsită de Scheinberg nu sînt mari.

(Continuarea lucrării va fi publicată în numărul următor al acestei reviste)

К РАСЧЕТУ КРУГЛЫХ БЕСКОНЕЧНО УДЛИНЕННЫХ ПОДШИПНИКОВ С ГАЗОВОЙ СМАЗКОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Определяется аналитически распределение давлений в круглом бесконечно удлиненном подшипнике с газовой смазкой, с приближенным приравнением изменения действительной толщины смазывающего слоя к двум прямым линиям. Анализируется сущность введенных приближений, а полученные результаты сравниваются с результатами, полученными другими авторами при помощи методов численного интегрирования.

CONSIDÉRATIONS SUR LE CALCUL DES PALIERS CIRCULAIRES D'ALLONGEMENT INFINI, LUBRIFIÉS AUX GAZ

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie du travail, l'Auteur détermine analytiquement la répartition des pressions dans un palier circulaire, d'allongement infini, lubrifié aux gaz; il fait une approximation de la variation réelle de l'épaisseur du film de lubrifiant avec deux droites. Il analyse la nature des approximations introduites et les résultats sont comparés à ceux obtenus par d'autres Auteurs au moyen des méthodes d'intégration numérique.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Repartiția de presiuni în lagărele de alungire infinită lubrifiate cu gaze.* Comunicările Academiei R.P.R., t. V, nr. 2, februarie 1955, p. 377.
2. S. A. Scheinberg, *Grazovaia smazka podșipnikov skoljenia. Trenie i iznos v mașinah.* Izd. AN SSSR, 1953, t. VIII, p. 107.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

CLASIFICAREA LUBRIFIANŢILOR DE MOTOARE DUPĂ CRITERIUL VISCOZITĂŢII

DE

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU

§ 1. Generalităţi

Una din principalele caracteristici, care servesc pentru clasificarea şi caracterizarea lubrifianţilor pentru motoare, este viscozitatea.

Practica a dovedit însă că criteriile actuale pentru exprimarea proprietăţilor de viscozitate nu sînt întotdeauna adecvate şi de fapt nu permit cunoaşterea comportării lubrifianţilor în condiţii reale de exploatare.

În lucrarea de faţă se analizează condiţiile cărora trebuie să le facă faţă lubrifianţii în exploatare şi posibilităţile de caracterizare a proprietăţilor lor de viscozitate pentru a satisface aceste condiţii.

De asemenea se caută unele căi noi pentru alegerea lubrifianţilor de motoare după criteriul viscozităţii, în funcţie de locul şi condiţiile de utilizare.

★

Viscozitatea lubrifiantului este interesantă nu numai pentru a asigura un regim de funcţionare cît mai perfect hidrodinamic, ci şi pentru a obţine o performanţă optimă a motoarelor, o viaţă cît mai lungă şi o pornire cît mai uşoară. De aceea proprietăţile de viscozitate trebuie privite sub mai multe aspecte, exprimarea cantitativă a acestor proprietăţi făcîndu-se astfel, ca să corespundă acelor condiţii care interesează pentru exploatare.

Astfel privită problema, ies în evidenţă două categorii de condiţii — bine cunoscute de altfel:

— condiţiile la pornire;

— condiţiile în regim.

Situaţia actuală în această privinţă este dată în tabloul nr. 1.

Cu alte cuvinte sînt interesante cîteva valori particulare ale viscozităţii şi ale temperaturii, dar se cunosc — fiind înscrise în buletinele de analiză — alte valori, de asemenea, particulare, care au o legătură destul de ocolită cu primele. În afară de acestea, se cunoaşte relaţia lui Walter-Ubbelohde cu ajutorul căreia se poate afla viscozitatea la orice temperatură prin calcul, dacă se cunosc coeficienţii a, b şi c, şi grafic dacă se cunosc viscozităţile la două temperaturi oarecare.

Cercetarea proprietăţilor de viscozitate trebuie deci să se facă pe baza necesităţilor reale ale organelor de frecare ale motoarelor, în condiţiile cele mai semnificative pentru funcţionarea acestor organe.

Tabloul nr. 1

Caracteristicile de viscozitate care interesează în practică	Caracteristicile de viscozitate înscrise în buletinele de analiză	Observaţii
1) Viscozitatea dinamică a lubrifiantului la temperatura de intrare în lagăr	5) Viscozitate convenţională sau cinematică a lubrifiantului la 50°C sau 100 °C	Legătura între punctele 1) şi 5) este numai calitativă deoarece nivelele de temperatură diferă
2) Temperatura corespunzătoare viscozităţii la care lubrifiantul începe să obtureze conductele instalaţiei de ungere	6) Temperatura de congelare	Pentru consideraţii care se vor dezvolta există factori care împiedică stabilirea unei legături între punctele 2) şi 6)
3) Viscozitatea maximă la care debitul pompei nu este încă influenţat periculos	7) În unele prescripţii viscozitatea la 20 °C sau la 37,8 °C, în altele, indici sau cifre caracterizînd curba viscozitate-temperatură	Legătura între punctele 3) şi 7) se face prin interpretare
4) Viscozitate maximă la care, la pornire, motorul mai poate fi rotit cu suficientă viteză de către electromotorul de pornire	Aceleaşi ca la punctul 7)	Există unele date experimentale care definesc relaţia între punctele 4) şi 7)

§ 2. Analiza principalelor organe de frecare ale motorului

Lubrifiantul este necesar pentru buna funcţionare a multor organe de frecare. Solicitarea acestor organe este însă diferită, ceea ce face ca unele să necesite lubrifianţi superiori, îndeplinind condiţii speciale, în timp ce pentru altele, orice lubrifiant este destul de bun. Organele mai sever solicitate, se uzează mai rapid, uneori chiar se distrug şi întotdeauna limitează durata de exploatare a motoarelor.

Prin urmare, alegerea lubrifianţilor şi caracterizarea lor trebuie să se facă în funcţie de acele organe, care sînt cele mai sensibile la calitatea lubrifiantului, se uzează repede şi, prin aceasta, reduc durata de exploatare a motoarelor.

În această privinţă se ştie că între toate organele de frecare ale motorului, cel mai rapid se uzează:

— ansamblu cilindru-piston;
— lagărele de bielă;
— lagărele paliere.

Ordinea este chiar cea indicată. În cele ce urmează se va analiza în ce măsură viscozitatea lubrifiantului influenţează comportarea acestor elemente de maşini.

Ansamblul cilindru-piston. Cu toate că se pune un mare accent pe rolul lubrifiantului la ungerea ansamblului cilindru-piston şi cu toate că o bună parte din metodele de încercare a uleiurilor de motoare se bazează pe constatări făcute

la acest ansamblu de frecare, sînt foarte puține dovezi că viscozitatea lubrifiantului este principala caracteristică, care îi influențează funcționarea.

Dimpotrivă, numeroase observații conduc la concluzia că — cel puțin în cazul motoarelor în bună stare tehnică — rolul viscozității lubrifiantului, chiar dacă există, este minor.

Printre cele mai importante argumente, care se pot aduce în favoarea acestei concluzii, se pot cita următoarele:

— În general, uzura maximă a cilindrilor se produce într-o zonă de temperatură unde (fig. 1 — reprezentare exagerată) diferența între viscozitatea unui ulei fluid la temperatura obișnuită și viscozitatea unui ulei vîscos la temperatura obișnuită este aproape imperceptibilă; rezultă de aici că există alți factori mai importanți decît viscozitatea, care determină uzura ansamblului cilindru-piston.

— Viteza de alunecare este atît de mică în zona de uzură maximă, încît practic nu se poate vorbi de ungere în regim hidrodinamic, deci de viscozitatea lubrifiantului, ci de anumite proprietăți limită ale peliculei lubrifiante.

În cazul pompelor de injecții de la motoarele Diesel, al căror regim de funcționare este foarte asemănător celui de la sistemul cilindru-piston, se constată că nu există o relație sistematică între viscozitatea combustibilului și uzura plonjorilor [1].

— Consumul de ulei este atît de mic — se poate calcula că în general reprezintă cam 0,003 g ulei pe cursă a pistonului (pentru un motor auto obișnuit) — încît pelicula de lubrifiant raclată de pe pereții cilindrului unui motor cu uzură minimă este de ordinul 100 Å, ceea ce pune în discuție comportarea primelor 3—4 straturi moleculare, despre care nu se poate afirma că manifestă comportare vîscoasă.

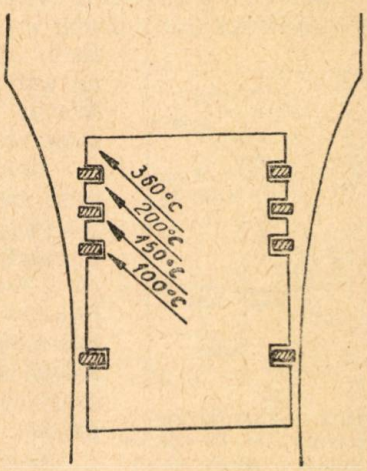


Fig. 1. — Modul aproximativ în care se uzează cămășile de cilindru.

— Ungerea cilindrilor se face, în general, prin ceață de ulei. Aceasta este realizată mai ușor și mai abundent de uleiurile fluide deoarece fragmentarea uleiului în particule — pentru a forma ceață — depinde de coeziunea moleculară care este mai mică la uleiurile fluide.

— E. R. Rereșcenko afirmă (citat după [2]) că un motor de avion, care a funcționat 100 de ore cu ulei MK+12,5 % benzină, a dat uzuri mai mici ale ansamblului cilindru-piston, decît un motor care a funcționat cu ulei MK nediluat.

— În exploatare se întîlnesc uneori motoare care funcționează cu uleiuri foarte contaminate cu combustibili fără nici un neajuns. Se citează chiar [3] cazul unui motor cu aprindere prin compresie, al cărui lubrifiant era diluat cu 70 % motorină, fără a se constata o creștere a uzurii.

— S-a demonstrat experimental [4] că regimul de ungere la interfața cilindru-piston nu se modifică la o variație a presiunii între 0,7 și 4 kg/cm². Efectul presiunii este funcție de viscozitate. Lipsa efectului presiunii denotă că nu viscozitatea este determinantă pentru regimul de ungere la acest ansamblu de frecare.

— S-a demonstrat experimental [5] că la pornirea motorului, la ansamblul cilindru-piston, resturile de lubrifiant de la funcționarea anterioară asigură ungerea

normală timp de 2 — 3 minute (fig. 2) respectiv cîteva mii de ture. Este sigur că în stratul foarte subţire cu care se poate face ungerea în cursul unei rotaţii în aceste condiţii, viscozitatea uleiului joacă un rol cu totul neînsemnat.

— Cele mai bune rezultate, în ceea ce priveşte reducerea uzurii la ansamblul cilindru-piston, se obţin acţionînd nu asupra lubrifiantului, ci asupra naturii suprafeţelor de frecare [6] sau asupra însuşi materialului din care sînt confecţionate organele de frecare ale maşinii [7].

— S-a constatat experimental că un motor în bună stare tehnică nu consumă mai mult ulei fluid decît ulei vîscos [8] şi unii cercetători [9] au ajuns chiar la concluzia că uleiurile vîscoase nu formează pelicule de lubrifiant apreciabil mai groase decît uleiurile fluide.

Din toate aceste date, observaţii şi experienţe este posibil să se tragă concluzia că *viscozitatea lubrifiantului nu este un factor esenţial pentru funcţionarea ansamblului cilindru-piston*, în cazul motoarelor în 4 timpi şi cu atît mai mult în cazul motoarelor în 2 timpi, indiferent dacă sînt cu aprindere prin scînteie sau prin compresie.

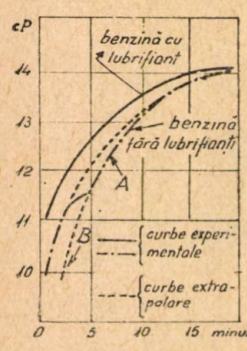


Fig. 2. — Variaţia puterii motorului în funcţie de regimul de ungere a ansamblului cilindru-piston.

Lagăre. Lagărele cele mai sever solicitate ale motorului sînt cele de palier şi de bielă, care de altfel constituie şi organele cele mai susceptibile la uzură. Susceptibilitatea la uzură a acestor organe este confirmată de altfel de faptul că în timp ce majoritatea deficienţelor mecanice sînt în legătură cu calitatea materialului şi în parte evitabile, uzura lagărelor nu a putut fi evitată; ea constituie o consecinţă inevitabilă a exploatării şi se remediază ca şi uzura ansamblului cilindru-piston prin reparaţii periodice, planificate.

Conform cunoştinţelor actuale [10], [11] ungerea lagărelor motorului se poate şi trebuie să se facă în regim hidrodinamic. Trecerea de la regimul hidrodinamic la un regim mixt sau onctuos atrage după sine uzura rapidă a acestor organe şi eventual chiar accidente grave.

Ungerea în regim hidrodinamic impune condiţii determinate de joc şi viscozitate pentru a asigura o peliculă lubrifiantă de dimensiuni convenabile.

Îndeplinirea acestor condiţii este însă limitată de anumite consideraţii practice, care se impun ca necesităţi ale producţiei în serie, ale raţionalizării sortimentelor sau chiar ale exploatării.

Pentru cercetarea de faţă trebuie precizat, care dintre lagărul palier şi lagărul de bielă este cel mai interesant, respectiv care este mai sensibil faţă de calitatea lubrifiantului.

Pentru aceasta trebuie să se aibă în vedere:

— mărimea forţei care solicită lagărul;

— suprafaţa pe care se repartizează această forţă (suprafaţa proiectată);

— particularităţile de ungere ale lagărului.

În ceea ce priveşte mărimea forţei, în general, se admite că ordinul de mărime este acelaşi pentru ambele tipuri de lagăre.

În literatură [12] se arată că presiunea specifică admisă pe manetoane este mai mare decît aceea admisă pe fusurile paliere, în primul rînd pentru motivul că diametrul lagărelor paliere este mai mare decît diametrul lagărelor de bielă.

Pe manetoane, în general, se admite o presiune specifică pînă la 110 kg/cm², iar pe fusurile paliere, 80—100 kg/cm².

La fel de avantajoasă se prezintă situația lagărelor paliere și în ceea ce privește ungerea. Într-adevăr acestea sînt unse cu ulei, care ajunge în cantități suficiente direct din rampă în lagăr.

Debitul în acest punct este maxim deoarece poziția orificiului de ulei fiind corect aleasă, presiunea la punctul de intrare este minimă. Dimpotrivă lagărele de bielă nu sînt unse direct (fig. 3), nu au orificiul de alimentare în permanență la presiunea minimă, iar uleiul de admisie are o temperatură mai ridicată. Totuși, dacă poziția orificiului de alimentare din maneton este corect aleasă pentru a corespunde în ciclul unei zone de încărcare moderată, deosebirea între cele două lagăre poate fi apreciabil redusă. Tot în acest sens acționează și schimbarea permanentă a direcției forței pe maneton, ceea ce duce la o uniformizare a temperaturii în lagăr și totodată la o mai redusă ovalizare. În condițiile actuale de proiectare, acestui aspect al problemei nu i s-a acordat însă o atenție deosebită, astfel că prin practică este probabil că s-a ajuns numai la o situație aproximativ corectă, deci nu optimă pentru lagărele de bielă.

De altfel aceste concluzii sînt confirmate din plin de constatarea că accidentele produse la lagărele de bielă sînt mai frecvente decît la lagărele palier. De asemenea s-a dovedit în cursul altei cercetări [13] că influența unui ulei necorespunzător se manifestă mult mai prompt la lagărele de bielă decît la lagărele paliere.

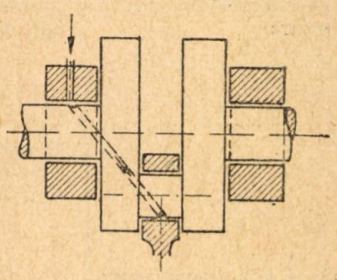


Fig. 3. — Accesul lubrifiantului la lagărul de bielă.

Din considerațiile de mai sus rezultă că lagărul de bielă este organul de motor cel mai susceptibil la variații ale regimului de ungere și implicit la viscozitatea necorespunzătoare a uleiului la temperatura de regim.

Pentru acest motiv, cercetarea s-a axat pe fenomenele și modificările care se petrec la lagărele de bielă, acestea fiind considerate elemente semnificative de apreciere și caracterizare a lubrifianților, în condiții în care viscozitatea are rolul hotărîtor.

În paragrafele următoare se va analiza aspectul cantitativ al comportării lubrifianților, în ceea ce privește viscozitatea, la temperaturi joase (la pornire) și la temperaturi ridicate (în regim).

§ 3. Comportarea la temperaturi joase

Spre deosebire de impresia generală că majoritatea uleiurilor prezintă o variație a viscozității cu temperatura, aproximată de ecuația empirică stabilită de Walter și Ubbelohde, în practică, în cazul uleiurilor insuficient sau de loc deparafinate, trebuie să se aibă în vedere cinci stări fizice, după cum se vede în tabloul nr. 2.

Buletinul de analiză indică pentru temperaturi joase o singură caracteristică, temperatura de congelare. În mod normal, starea de congelare ar trebui să corespundă unei anumite viscozități, care, în condițiile de determinare dă aparență de imobilitate. În realitate, starea de congelare este determinată de o foarte fragilă rețea cristalină [14], [15], care poate fi distrusă cu tensiuni uneori neînsemnate,

Tabloul nr. 2

Temperatura efectivă	Starea fizică	Comportarea
Superioară temperaturii de tulburare	1) Lichid newtonian	Corespunzătoare proprietăţilor de viscozitate exprimate prin caracteristicile convenţionale
La şi imediat sub temperatura de tulburare	2) Suspensie	Inferioară cu puţin proprietăţilor componentului de bază, care serveşte ca mediu de dispersie şi mult inferioară proprietăţilor, care s-ar deduce prin extrapolarea caracteristicilor de viscozitate ale amestecului deasupra temperaturii de tulburare
Superioară dar aproape de temperatura de congelare	3) Suspensie parţial orientată, cu caracter de mediu anizotrop	Corespunzătoare componentului de calitate inferioară, care constituie mediul de dispersie, înrăutăţită de particulele de parafină în suspensie şi de tensiunile interne care preced starea de congelare structurală
La şi sub temperatura de congelare	4) Imobilă. Mediu fluid imobilizat de o reţea cristalină fragilă	Corespunzătoare complexului constituit din componentul rămas fluid şi reţeaua cristalină pînă la tensiunea minimă de distrugere a structurii. După distrugerea structurii comportarea este aceea a stării de suspensie parţial orientată la temperatura respectivă
	5) Aparent imobilă în condiţiile determinării; în realitate lichid foarte vîscos	Corespunzătoare viscozităţii foarte mari a mediului fluid omogen, aşa cum rezultă prin extrapolarea caracteristicilor convenţionale, pînă la temperatura de congelare

după cum se arată în tabloul nr. 3. După distrugerea structurii, viscozitatea uleiului este foarte mică, chiar de numai cîteva mii de centipoise, în timp ce, în cazul uleiurilor deparafinate, viscozitatea la temperatura de congelare este de ~ 150 000 cP [16].

Tabloul nr. 3

Uleiul	Presiunea necesară pentru împingerea printr-o ţeavă a unui dop de ulei congelat, de 1 m lungime şi 8 mm diametru la 16 °C, în at.	Viscozitatea uleiului cu structura distrusă, la 20 °C, în cSt	Temperatura de congelare, în °C.
118/8,6			
+ 5 % parafină	0,8	3 140	+ 20
+ 10 % parafină	3,4	9 650	+ 28
106/4			
+ 5 % parafină	0,3	900 *)	+ 17,5
+ 10 % parafină	1,4	1 700	+ 25

*) Viscozitatea uleiului 106/4 + 5 % parafină cu structura distrusă s-a determinat la 17,5° C (temperatura de congelare).

Prezența parafinei în ulei are consecințe defavorabile, pentru că înrăutățește comportarea lubrifiantului la temperaturi joase, făcînd ca două caracteristici din buletinul de analiză, congelarea și indicele de viscozitate, să-și piardă semnificația.

Într-adevăr, introducînd parafină în ulei (tabloul nr. 4) deși calitatea se înrăutățește în unele privințe, indicele de viscozitate poate crește apreciabil, trecînd

Tabloul nr. 4

Uleiul	Parafină dizolvată	Temperatura de congelare, în °C	R.V.	I.V.	Creșterea R.V.	Creșterea în %, a I.V.
106/4	—	—	3,67	14,8	0	0
	2,5	+ 14	3,12	27,0	15	82,5
	5,0	+ 17,5	3,01	31,0	18,2	111,0
	10,0	+ 25	2,92	35,0	20,4	136,4
118/8,6	—	—	8,15	20,4	0	0
	2,5	+ 15	6,36	32,0	22,1	59
	5,0	+ 20	5,65	36,5	30,6	79,3
	10,0	+ 28	5,10	41,4	37,4	103

chiar uleiul dintr-o grupă, în alta superioară. Această concluzie este valabilă ori de cîte ori temperatura de congelare a uleiului este mai ridicată decît aceea corespunzătoare viscozității de ~ 150 000 cP, ceea ce, după cum se vede în tabloul nr. 5, este un caz destul de frecvent.

Tabloul nr. 5

Uleiul	Temperatura de congelare calculată pentru I.V. corespunzător	Viscozitatea la congelare	Congelare efectivă STAS	Viscozitate extrapolată la temperatura de congelare STAS
309	— 30 °C	150 000 cSt	— 15 °C	15 000 cSt
408	— 35 °C	150 000 cSt	— 12 °C	5 000 cSt
312	— 23 °C	150 000 cSt	— 10 °C	20 000 cSt
413	— 25 °C	150 000 cSt	— 8 °C	12 000 cSt

Se poate demonstra destul de ușor că introducerea aditivilor a redus considerabil semnificația buletinului de analiză convențional, prin modificarea unilaterală a unor caracteristici ale uleiului, fără ca prin aceasta să se modifice în mod corespunzător și proprietățile de exploatare, pe care acele caracteristici le exprimau.

În ceea ce privește comportarea la temperaturi joase (la pornire) este necesar să se precizeze o condiție de viscozitate maximă sau de stare fizică compatibilă cu pornirea sau funcționarea normală a motorului.

Această condiție este determinată: de dependența debitului pompei cu agregate de viscozitate, de la o anumită valoare a acesteia, de dependența debitului uleiului prin conducte de viscozitate și de momentul rezistent al motorului din cauza viscozității excesive a lubrifiantului.

Pe baza datelor experimentale, publicate în literatura de specialitate [4], [13], [17], [18], [19], [20] etc., se pot indica valorile maxime adimisibile ale viscozităţii (tabloul nr. 6).

Deoarece în practică trebuie să se ţină seama de condiţia cea mai severă, se va admite ca viscozitate maximă a uleiului la pornire, valoarea de 4 000 cSt.

Tabloul nr. 6

Condiţii de viscozitate	Valoarea maximă admisă
1) Viscozitatea de la care randamentul volumetric al pompei cu angrenaje devine funcţie de viscozitate	4 000 cSt
2) Viscozitatea maximă la care presiunea pompei cu angrenaje mai poate distruge structura	10 000 cSt
3) Viscozitatea maximă la care electromotorul de pornire poate învîrti motorul cu o turaţie de 20—60 rot/min considerată minima necesară pentru pornire	20 000 cSt

Deoarece această valoare se află într-o zonă, în care nu se manifestă prea puternic anomaliile de viscozitate datorită prezenţei parafinei separabile, ne putem dispensa de alte condiţii ca de exemplu temperatura de congelare, viscozitatea la 0 °C, indicele sau raportul de viscozitate etc. Pentru fiecare ulei se va indica deci o temperatură minimă de utilizare (t_m), corespunzătoare viscozităţii maxime admise, respectiv 4 000 cSt.

§ 4. Comportarea în regim

În ceea ce priveşte condiţia de viscozitate în regim, situaţia se prezintă în acelaşi timp mai simplă şi mai greu de rezolvat.

Într-adevăr, folosind ecuaţiile lubrificaţiei lagărelor cu încărcare variabilă [10], [11], se poate indica destul de exact viscozitatea necesară pentru funcţionarea în regim hidrodinamic a celui mai sensibil ansamblu de frecare, care s-a arătat că este lagărul de bielă.

Pentru a prescrie însă uleiul, care să satisfacă condiţia de viscozitate stabilită prin calcul, trebuie să se cunoască temperatura la care funcţionează acel lagăr, ceea ce este mult mai greu. În acelaşi timp, datele publicate în literatură sînt mai puţin numeroase şi mai puţin categorice.

În această situaţie nu se poate obţine decît o imagine cu totul aproximativă asupra fenomenelor în acest domeniu.

Calitativ, situaţia se prezintă astfel: temperatura uleiului din carter este inferioară temperaturii uleiului care se scurge din lagăr, datorită contactului permanent al carterului cu exteriorul. În conducta care transportă uleiul la cuzineţii palier, uleiul este mai cald decît în carter, din cauza încălzirii în interiorul pompei cu angrenaje şi apoi prin schimb de căldură cu atmosfera din spaţiul carterului (a cărui temperatură este mai ridicată din cauza scăpărilor de gaze fierbinţi şi din cauza masei metalice care primeşte căldură direct de la piesele mai calde ale moto-

rului). În lagăr temperatura continuă să crească, de data aceasta după o lege care constituie una din ipotezele fundamentale ale lubrificației în regim hidrodinamic. Din spațiul lagărului palier, prin arborele cotit, uleiul ajunge în lagărul de bielă, unde continuă să se încălzească ca și în lagărul palier.

Această imagine poate fi considerată ca reală, deoarece a fost reprodusă experimental [21] într-un viscozimetru rotativ (fig. 4) de construcție specială. Pentru a obține și o imagine cantitativă a fenomenului se pot folosi datele experimentale publicate de S. N. Kuțaiev (citat după [2]) și A. K. Diacikov (citat după [22]). Din aceste date rezultă că la intrarea în lagărul de bielă (aceasta interesează în calcule) temperatura uleiului este cu 30 °C mai ridicată decît în carter.

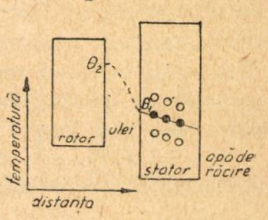


Fig. 4. — Variația temperaturii în interiorul unui viscozimetru rotativ.

Deoarece această cifră prezintă o oarecare incertitudine, este necesar să se aprecieze influența erorilor, care se pot produce din cauza adoptării în calcule a unei temperaturi diferite de cea reală.

Ca termen de comparație pentru aprecierea erorilor, s-a adoptat cîmpul de toleranțe de fabricație; considerînd că diferența posibilă între temperatura reală și temperatura presupusă este de $\pm 5 - \pm 10$ °C, se deduce că eroarea posibilă este 20—50 % din eroarea provocată de cîmpul de toleranțe. De altfel, în special în cazul unei diferențe de ± 5 °C, eroarea aceasta nu determină trecerea de la o clasă de precizie la alta, ceea ce înseamnă că este perfect admisibil să se adopte ca temperatură la intrarea în lagărul de bielă, o temperatură cu 30 °C mai ridicată decît cea din carter.

§ 5. Caracterizarea lubrifianților după criteriul viscozității

Caracterizarea lubrifianților după criteriul viscozității se face astăzi prin indicarea viscozității la una sau două temperaturi, completată cu o cifră care reprezintă indicele de viscozitate sau raportul de viscozitate. Temperaturile la care

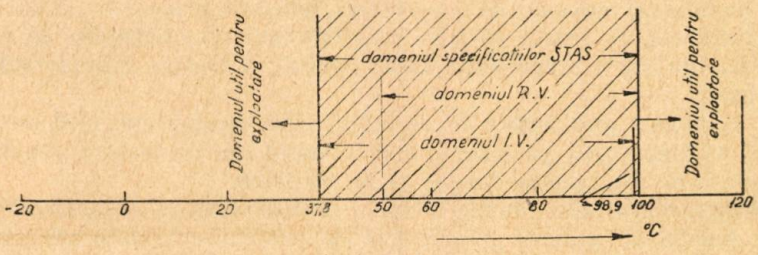


Fig. 5. — Domeniul de temperaturi utile pentru exploatare și domeniul de temperaturi folosite în specificațiile oficiale pentru caracterizarea lubrifianților.

se determină de obicei viscozitățile sînt: 50 °C și 100 °C. Indicii auxiliari exprimă legea de variație a viscozității în intervalul 37,8 °C — 98,9 °C sau 50 °C — 100 °C.

Considerînd că temperatura uleiului din carter la motoarele moderne este 80 °C — 100 °C, urmează că temperatura la intrarea în lagărele de bielă este 110 °C — 130 °C, deci mai mare decît aceea la care se indică viscozitatea. De asemenea este evident că pornirea motoarelor se face la temperaturi sub 37,8 °C. Situația se prezintă ca în figura 5.

Se vede din diagramă că domeniul prescripţiilor STAS (37,8 °C — 100 °C), domeniul indicelui de viscozitate (37,8 °C — 98,9 °C) şi domeniul raportului de viscozitate (50 °C — 100 °C) se află în afara domeniului temperaturilor utile pentru exploatare.

Este adevărat că în ultimă instanţă indicele de viscozitate se bazează pe relaţia Walter-Ubbelohde, dar curbele de viscozitate, pentru un anumit indice de viscozitate, au fost combinate atît de arbitrar, pentru a înlătura anumite nepotriviri practice constatate, încît nu au mai constituit un sistem semnificativ. În plus, după cum s-a remarcat şi în alte lucrări [3], [9], [16], [23], [24], [25] şi [26], caracterizarea lubrifianţilor prin astfel de indici prezintă multe neajunsuri printre care cele mai importante sînt:

— La I. V. mai mare decît 100, două uleiuri de aceeaşi viscozitate la 37,8 °C şi viscozităţi foarte diferite la 98,9 °C, pot avea aproximativ acelaşi I. V. Exemplu:

1) $\nu_{98,9°C} = 16,6$ cSt, $\nu_{37,8°C} = 89,7$ cSt I.V. = 148,

2) $\nu_{98,9°C} = 38,6$ cSt, $\nu_{37,8°C} = 90,9$ cSt I.V. = 150,5.

— Două uleiuri pot avea aceeaşi viscozitate la 37,8 °C şi 98,9 °C, dar curbe viscozitate-temperatură diferite.

— Se bazează pe criterii arbitrare, pentru curbe cu I.V. = constant, folosindu-se trei formule diferite, valabile pe porţiuni diferite ale aceleiaşi curbe.

— I.V. variază mai mult cu valorile viscozităţii în zona inferioară decît în zona superioară, adică pentru I.V. cuprins între 0 şi 10, deosebiri neînsemnate ale curbelor de viscozitate dau variaţii mari ale I.V., iar pentru I.V. cuprins între 90 şi 100, deosebiri mari ale curbelor de viscozitate dau variaţii neînsemnate ale I.V.

—Nu are semnificaţie la valori negative ale I.V.

Raportul de viscozitate exprimă o relaţie foarte aproximativă a curbei de viscozitate şi nu are semnificaţie decît în legătură cu valoarea viscozităţii uleiului.

În ultimul timp, în U.R.S.S. s-a introdus la unele uleiuri un criteriu de apreciere, care cuprinde viscozităţile la 0 °C, 50 °C şi 100 °C. Cu toate că acest criteriu cuprinde un interval mai mare de temperaturi, totuşi nu se poate considera problema complet rezolvată, în sensul că cifra care exprimă caracteristicile de viscozitate ale uleiurilor nu are o semnificaţie fizică precisă, ci trebuie interpretată, ceea ce nu este uşor.

Deşi se cunosc aproximativ 30 de indici, cifre, moduli etc., nici unul nu este în măsură să lămurească pe technicianul interesat din exploatare, asupra datelor de viscozitate pe care acesta doreşte să le cunoască.

În esenţă, dificultatea provine de acolo că se încearcă să se caracterizeze lubrifianţii în funcţie de anumite puncte fixe de temperatură luate arbitrar. Dar la acele puncte de temperatură, proprietăţile de viscozitate ale diferitelor uleiuri sînt în acelaşi timp diferite şi necunoscute. Este drept că ele se pot eventual deduce din datele cunoscute, dar pentru aceasta ar trebui folosită o metodă laborioasă, care de altfel nici nu a fost indicată.

Problema se cere deci rezolvată invers. Cu alte cuvinte caracterizarea lubrifianţilor după criteriul viscozităţii trebuie să se facă în funcţie de o anumită caracteristică de viscozitate a lubrifiantului, indicînd şi temperatura corespunzătoare.

Dacă se analizează cu atenţie curbele viscozitate-temperatură ale uleiurilor lubrifiante obişnuite, se constată următorul fapt interesant: dînd o mişcare de translaţie convenabilă de-a lungul axei OX, toate curbele apar că aparţin unei singure familii, funcţie de ordonată, adică de nivelul de viscozitate al uleiului.

Cercetînd mai departe curbele variației viscozității în funcție de temperatură, pentru aceste uleiuri, se constată că aceste curbe se prezintă ca hiperbole echilatere (fig. 6) care nu mai diferă după indicele de viscozitate, ci numai după nivelul de viscozitate al uleiului.

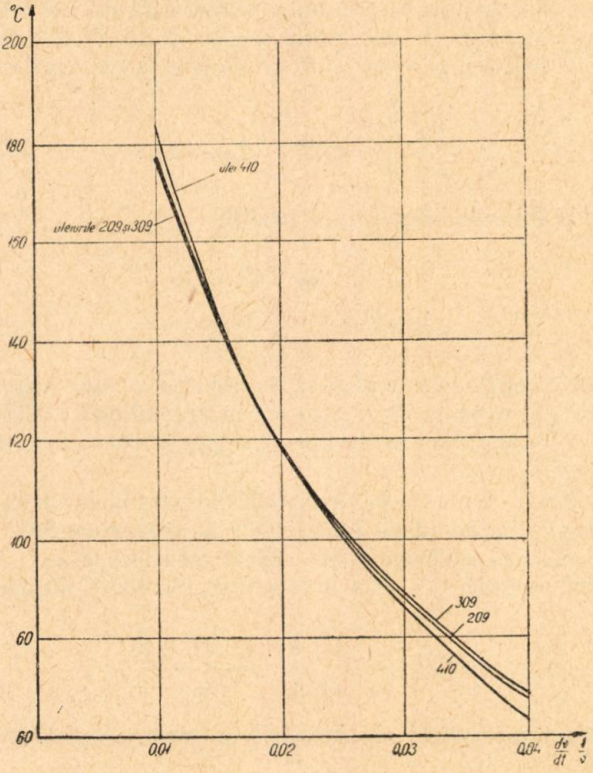


Fig. 6. — Reprezentare tipică a funcției $\frac{\nu'}{\nu} = f(t)$.

De aici a rezultat că o caracteristică semnificativă pentru exprimarea proprietăților de viscozitate este variația specifică a viscozității cu temperatura, reprezentată de relația $\frac{d\nu}{dT} \cdot \frac{1}{\nu}$.

Valoarea acestei caracteristici (pe care o vom nota C_ν) se obține ușor, derivînd ecuația lui Walter-Ubbelohde

$$\log \log (\nu + c) = a \log T + b, \tag{1}$$

de unde rezultă

$$\nu' = 2{,}3\,026 \times a \frac{(\nu + c) \cdot 10^{b - a \log T}}{T} \tag{2}$$

și mai departe

$$C_\nu = \frac{\nu'}{\nu} = 2{,}3\,026 \times a \frac{(\nu + c) - 10^{b - a \log T}}{T \cdot \nu}, \tag{3}$$

în care s-a notat cu:

ν, viscozitatea cinematică a uleiului în cSt;

T, temperatura corespunzătoare în °K;

a, b și c, constantele caracteristice fiecărui ulei.

Dacă vrem să determinăm temperatura pentru care C_ν are o anumită valoare convențională, putem porni de la aceeași ecuație a lui Walter-Ubbelohde.

În acest scop se pune $b = \log B$ și se derivează expresia rezultată obținîndu-se

$$\frac{\nu'}{\nu + C} = aBT^{a-1} L_{10} = C_\nu . \tag{4}$$

Logaritmînd și înlocuind $\log B$ cu b rezultă

$$\log T = \frac{\log \frac{C_\nu}{aL_{10}} - b}{a - 1} . \tag{5}$$

Pentru caracterizarea convenabilă a lubrifianților este avantajos ca C_ν să aibă valoarea 0,02 sau în procente, 2 %, ceea ce în fond este același lucru. O astfel de valoare se află în zona temperaturilor de regim și poate fi deci folosită comod în scopuri practice.

Față de punctul C_ν luat ca origină, deosebirile între uleiurile cu curbe de viscozitate diferite dispar, astfel că se poate trece la o reprezentare generalizată, în care să nu mai intervină coeficienții care diferă dela ulei la ulei.

Astfel, pentru curbele C_ν, prin interpolare, se poate obține o funcție $f(T)$ de forma

$$f(T) = a + \frac{b}{T + c} = \frac{d\nu}{dt} \cdot \frac{1}{\nu} . \tag{6}$$

Dacă în locul temperaturii absolute (T) se pune temperatura relativă (t), se obțin coeficienții:

$$a = -0{,}01,$$
$$b = 4{,}14,$$
$$c = 100.$$

Prin integrare se obține imediat

$$\nu = e^{a(t_c - t)} \cdot \left(\frac{t_c + c}{t + c}\right)^b \cdot \nu_c , \tag{7}$$

în care ν_c și t_c sînt coordonatele valorii convenționale (0,02) a variației specifice a viscozității cu temperatura.

Variația specifică convențională a viscozității cu temperatura exprimată prin viscozitatea caracteristică (ν_c) și temperatura caracteristică (t_c), pentru care $C_\nu = 0{,}02$, constituie o caracteristică foarte semnificativă a lubrifianților pentru următoarele motive:

— Caracterizează în mod univoc lubrifianții;

— Permite o înțelegere mai adîncă a fenomenului în sensul unei dependențe mai strînse între variația viscozității și nivelul de viscozitate al lubrifiantului;

— Permite o nouă diferențiere calitativă a lubrifianților, prin faptul că la

același nivel de viscozitate (ν_c = const.) lubrifianții au o temperatură caracteristică cu atît mai joasă, cu cît calitatea lor este mai superioară;

— Permite elaborarea de diagrame și nomograme de uz universal prin faptul că fenomenul însuși nu mai este comandat de particularitățile profunde ale fiecărui lubrifiant, exprimate prin coeficienții specifici a, b și c din relația lui Walter-Ubbelohde, ci de parametrii ν_c și t_c cu caracter fizic și semnificație precisă;

— Prezintă proprietățile de viscozitate ale lubrifianților sub o formă inteligibilă, în sensul că fiind cunoscută viscozitatea caracteristică, se știe imediat că la o temperatură, cu, de exemplu, 10 °C mai mică, viscozitatea va fi cu ~ 20% mai mare și invers;

— Permite o clasificare rațională a lubrifianților după criteriul viscozității, cu scoaterea la iveală a tuturor suprapunerilor și lipsurilor și deci cu indicarea sortimentului minim necesar și suficient pentru a acoperi tot domeniul de necesități practice;

— Dă un criteriu pentru definirea nivelului de viscozitate al fiecărui ulei, acesta fiind exprimat chiar prin ν_c.

★

Toate aceste concluzii se concretizează în figura 7 și tabloul nr. 7.

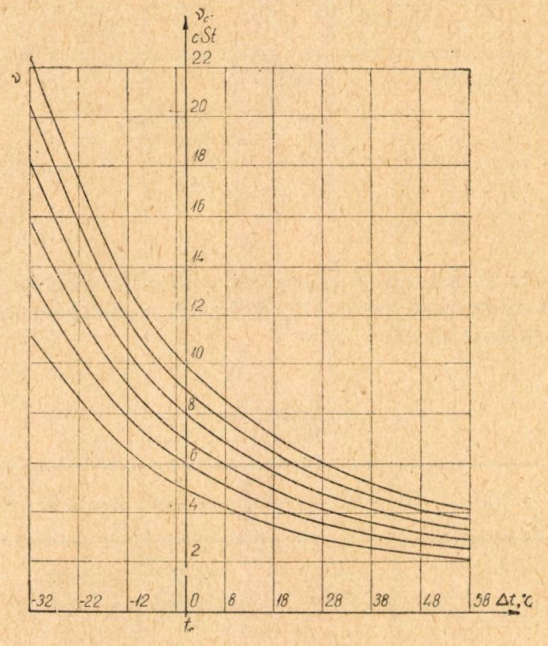


Fig. 7. — Variația viscozității cu temperatura în funcție de ν_c și t_c.

Figura 7 prezintă familia de curbe construite pe baza ecuației (7), reprezentînd variația viscozității cu temperatura pentru orice ulei mineral. Domeniul de valabilitate al ecuației (7) este (t_c—35 °C) — (t_c+65 °C).

Pentru a afla viscozitatea la o temperatură oarecare de la punctul de pe curba respectivă situat la distanţa Δt de punctul t_c, se duce o paralelă cu axa absciselor; aceasta întîlneşte axa ordonatelor (a viscozităţilor) la înălţimea corespunzătoare viscozităţii căutate.

Tabloul nr. 7 prezintă situaţia lubrifianţilor din sortimentul STAS orînduiţi în funcţie de ν_c şi t_c.

Tabloul nr. 7

t_c °C \ ν_c cSt	5,5 — 6	6 — 6,5	6,5 — 7	7 — 7,5	7,5 — 8	8 — 8,5	8,5 — 9	9 — 9,5	9,5 — 10
105			405						
110	205 305								
115	106/4				408				
120	108/5,7	209 309				410			
125			212 312			413			
130		118/8,6		216 316					419
135					220 320				423
140					228				

Dacă la aceasta se adaugă o clasificare a lubrifianţilor în funcţie de condiţia de viscozitate la temperatura minimă de utilizare, se obţine o nouă orînduire, după cum se vede în tabloul nr. 8.

Tabloul nr. 8

t_m °C	— −15	−15— −10	−10— −5	−5 −0	0— +5	+5— +10	+10 —
Uleiul	405	—	205,305 408	209,309 410,413 106/4	212,312 108/5,7	216,316 419,423	220,320 228 118/8,6

Se vede cu uşurinţă din cuprinsul tablourilor precedente că adoptarea celor trei caracteristici propuse (ν_c, t_c şi t_m), permit nu o clasificare nouă cu caracter formal, ci o imagine cuprinzătoare pe baza căreia se poate face o rodnică analiză a clasificărilor actuale în vederea raţionalizării şi reglementării sortimentelor de lubrifianţi în funcţie de necesităţile exploatării.

§ 6. Alegerea lubrifianților după criteriul viscozității

NOTAȚII FOLOSITE

F = forța care acționează asupra cuzinetului

P_m = presiunea medie pe cuzinet $= \frac{F}{2br}$

b = lățimea cuzinetului

r = raza fusului

Δ = jocul radial $= R - r$

R = raza cuzinetului

Ψ = jocul relativ $= \frac{\Delta}{r}$

$\Delta\Psi$ = variația jocului relativ în funcție de temperatură

α = excentricitatea relativă $= \frac{e}{r}$

e = excentricitatea

ψ_{cor} = jocul relativ corectat

δ_2 = grosimea minimă a peliculei de lubrifiant

θ^* = unghiul dintre linia centrelor și direcția forțelor

$\Delta\theta^*$ = variația unghiului θ^*

ω = viteza unghiulară

μ_1 = viscozitatea dinamică a lubrifiantului

λ = alungirea $= \frac{b}{2r}$.

Alegerea lubrifianților se face, pe de o parte, în funcție de proprietățile lor de viscozitate, iar pe de altă parte, în funcție de necesitățile specifice ale agregatului mecanic.

În paragrafele precedente s-a precizat noțiunea de viscozitate, așa cum această noțiune se prezintă pentru cei ce planifică și repartizează lubrifianții, precum și pentru cei care îi utilizează.

S-a arătat că lubrifianții sînt perfect caracterizați prin temperatura la care viscozitatea lor ajunge la 4 000 cSt și prin nivelul de viscozitate exprimat printr-o temperatură caracteristică și o viscozitate caracteristică.

Caracteristicile propuse prezintă însă avantajul că au semnificație fizică precisă și că permit — pe intervale de temperatură convenabile — înlocuirea relației Walter-Ubbelohde ai cărei coeficienți diferă de la ulei la ulei, cu o altă relație, valabilă însă pentru toate uleiurile, fără a necesita folosirea unor coeficienți specifici ca în relația Walter-Ubbelohde.

Pe de altă parte, s-a arătat că organul de mașină cel mai sensibil la proprietățile de viscozitate ale lubrifiantului este lagărul de bielă și că prin urmare lubrifiantul trebuie ales în funcție de necesitățile acestui organ de mașină.

Lagărul de bielă este de fapt un lagăr supus la forțe variabile, al cărui calcul nu mai prezintă dificultate.

Performanța unui lagăr de alunecare depinde de următorii parametri [10], [11]:

1) Forța care acționează asupra lagărului;
2) Suprafața proiectată a lagărului;
3) Alungirea lagărului;
4) Turația fusului;
5) Jocul radial;
6) Jocul relativ;
7) Viscozitatea lubrifiantului.

Pentru scopuri practice parametrii 1), 2), 3) și 4) pot fi considerați invariabili într-o anumită perioadă de timp. În realitate ei suferă anumite modificări prin uzura generală a motorului, dar diferențele de valoare sînt infime și nu au consecințe dezavantajoase.

În procesul de uzură parametrii 5) și 6) suferă modificări care au o influență de primul ordin asupra performanței ansamblului de frecare. În ecuații ei au caracter de variabile independente.

Dat fiind că valorile lor absolute sînt foarte mici, trebuie avută în vedere şi temperatura care îi modifică apreciabil.

Corectarea jocului relativ se face prin formule empirice, de exemplu [27]:

$$\Delta \psi = K(t - 20) \cdot 10^{-6}, \tag{8}$$

în care am notat cu $\Delta \psi$ corecţia jocului relativ, t temperatura lagărului, K constantă depinzînd de materialul antifricţiune.

Parametrul 7) este variabila dependentă a cărei determinare constituie — în acest moment — obiectivul imediat.

Pentru un lagăr dat, cunoscîndu-se parametrii 1) ... 6) inclusiv, calcularea parametrului 7) impune precizarea următorilor factori [10], [11]:

a) grosimea minimă a peliculei de lubrifiant (δ_2) pe care trebuie să o asigure lubrifiantul în condiţiile date. Condiţia admisă în general este

$$\delta_2 \geqslant 3h, \tag{9}$$

h fiind înălţimea medie a asperităţilor suprafeţelor de frecare. De aici rezultă o valoare minimă a lui δ între 0,2 μ (pentru suprafeţele rodate) şi 0,6 μ menţionată în literatura de specialitate.

Legătura cu lagărul se face prin

$$\delta_2 = \Delta(1 - \alpha) \tag{10}$$

astfel că, în general,

$$\alpha = 1 - \frac{\delta_2}{\Delta}. \tag{11}$$

Deoarece excentricitatea relativă α este funcţie de unghiul θ^*, pe care îl va face direcţia sarcinii cu linia centrelor, se ajunge la o valoare corespunzătoare a lui θ^*. Fiind vorba de o condiţie limită care trebuie satisfăcută, valorile respective se vor nota

$$\alpha_{max} \quad \text{şi} \quad \theta^*_{min}.$$

Pornind de la aceste valori trebuie să se determine valorile nominale

$$\alpha_{nom} \quad \text{şi} \quad \theta^*_{nom}$$

care ţin seama de efectele sarcinii variabile, conform ecuaţiilor cunoscute [11].

Cu alte cuvinte, trebuie să se stabilească unghiul maxim de pendulare a liniei centrelor faţă de poziţia nominală ($\Delta\theta^*$), astfel ca la nici un moment α_{max} să nu depăşească valoarea rezultată din (11).

În acest scop se folosesc ecuaţiile şi metoda de calcul indicată în lucrarea citată [11].

Valorile lui θ^* rezultă din $\theta^* = \theta^*_0 + \Delta\theta^*$, în care

$$\Delta\theta^* = \frac{1}{2}\frac{R}{l}(\sin\Omega_1 t - 1) - \frac{\Omega_1}{\Omega_3} \cdot \frac{1}{2F_{c_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_{sn} \left(\cos n\Omega_3 t - \cos n \frac{\pi}{2} \frac{\Omega_3}{\Omega_1} \right) - \right.$$

$$\left. - F_{cn} \left(\sin n\ \Omega_3 t - \sin n \frac{\pi}{2} \frac{\Omega_3}{\Omega_1} \right) \right]. \tag{12}$$

Trecerea de la θ^* la α se face cu ajutorul relaţiei

$$\alpha_{max} = \cos\theta^*_{min} \tag{13}$$

pentru valori mici ale lui θ^* și cu ajutorul relației

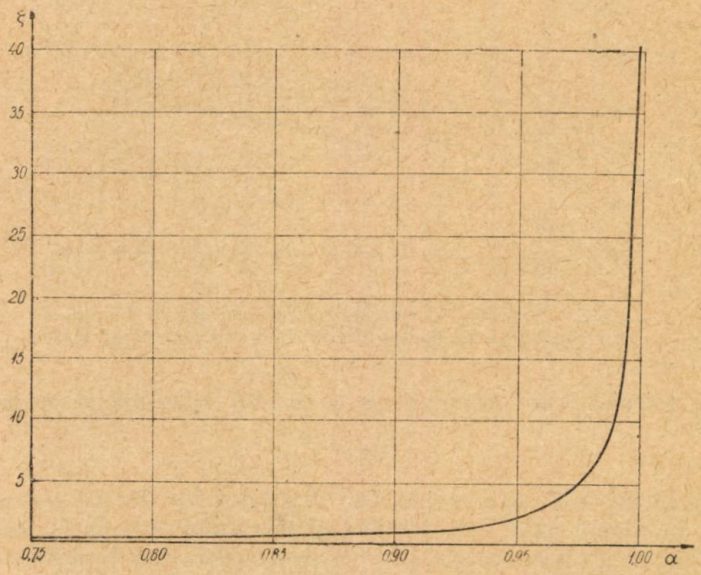
$$\operatorname{tg}\theta^* = \frac{C_n}{C_t} \tag{14}$$

sau grafic pentru valori mari ale lui θ^*.

Situația în acest moment este următoarea: se cunoaște valoarea minimă a lui θ^* (θ^*_{min}) și valoarea nominală a lui θ^* ($\theta^*_{nom} = \theta^*_{min} + \Delta\theta^*$). Astfel se dispune de valoarea lui α_{nom} de la care se trece la coeficientul de încărcare al lagărului (ζ), prin ecuația

$$\zeta = \frac{3\sqrt{C_n^2 + C_t^2}}{1 + \alpha_{nom}} \tag{15}$$

sau grafic pentru $\lambda = 0{,}5$ [10] (fig. 8).



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1968

Fig. 8. — Variația coeficientului de portanță (ζ) în funcție de excentricitatea relativă (α).

De aici se poate trece la viscozitatea lubrifiantului (μ_1) prin ecuația

$$\zeta = \frac{F\ \psi^2}{2\mu_1\,\omega\,br} \tag{16}$$

sau

$$\zeta^* = \frac{F \cdot \delta_2^2}{4\,\mu_1\,\omega\,r^4} = \lambda\,(1-\alpha)^2\,\zeta, \tag{17}$$

în care intervin și parametrii 1) — 6) inclusiv.

Această metodă este perfect aplicabilă la proiectare, cînd toate datele geometrice ale lagărului sînt cunoscute. În practică, în vederea unei comode alegeri a lubrifiantului, trebuie să se efectueze unele simplificări și generalizări.

În acest scop s-au făcut calculele descrise pentru patru motoare, foarte diferite ca performanţă şi tip, respectiv:

motor ZIS—120 cu aprindere prin scînteie;
motor M—20 cu aprindere prin scînteie;
motor D—35 cu aprindere prin compresie;
motor Horch IFA cu aprindere prin compresie.

Condiţia iniţială ca δ_2 să fie de 0,2 — 0,6 μ conduce la o variaţie destul de redusă a lui α_{max} (fig. 9) astfel că se poate adopta

$$\alpha_{max} = 0{,}990 - 0{,}994. \tag{18}$$

Acestui interval îi corespunde un interval foarte redus pentru θ^*_{min}

$$\theta^*_{min} = 8^\circ\,05' - 6^\circ\,15'. \tag{19}$$

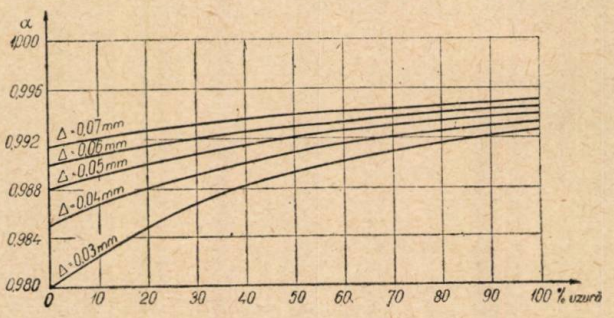


Fig. 9. — Variaţia excentricităţii relative (α) în funcţie de uzura convenţională pentru diferite valori ale jocului radial (Δ).

Pentru calculele care urmează s-a considerat admisibil să se ia

$$\theta^*_{min} = 7^\circ. \tag{20}$$

Calcularea lui $\Delta\theta^*$ se face pe baza diagramei forţelor pe maneton (fig. 10, *a*, *b*, *c*, *d*), în timpul unui ciclu complet al motorului care furnizează coeficienţii seriei Fourier, ce intră în ecuaţia (12). Se poate folosi însă şi următoarea cale:

Se scrie ecuaţia (12) sub forma

$$\Delta\theta^* = \frac{1}{2}\frac{R}{l}(\sin\Omega_1 t - 1) - \frac{\Omega_1}{2F_{c_0}}\left[\int_0^t (F - F_{c_0})\,dt - \int_0^{t_1} (F - F_{c_0})\,dt\right], \tag{21}$$

unde

$$t_1 = \frac{\pi}{2\Omega_1}.$$

În această situaţie ecuaţia (12) devine

$$\Delta\theta^* = \frac{1}{2}\frac{R}{l}(\sin\Omega_1 t - 1) - \frac{\Omega_1}{2F_{c_0}}\int_{t_1}^{t} (F - F_{c_0})\,dt + \text{const.}, \tag{22}$$

în care integrala $\int_{t_1}^{t} (F - F_{c_0})\,dt$ se poate obţine grafic prin planimetrare.

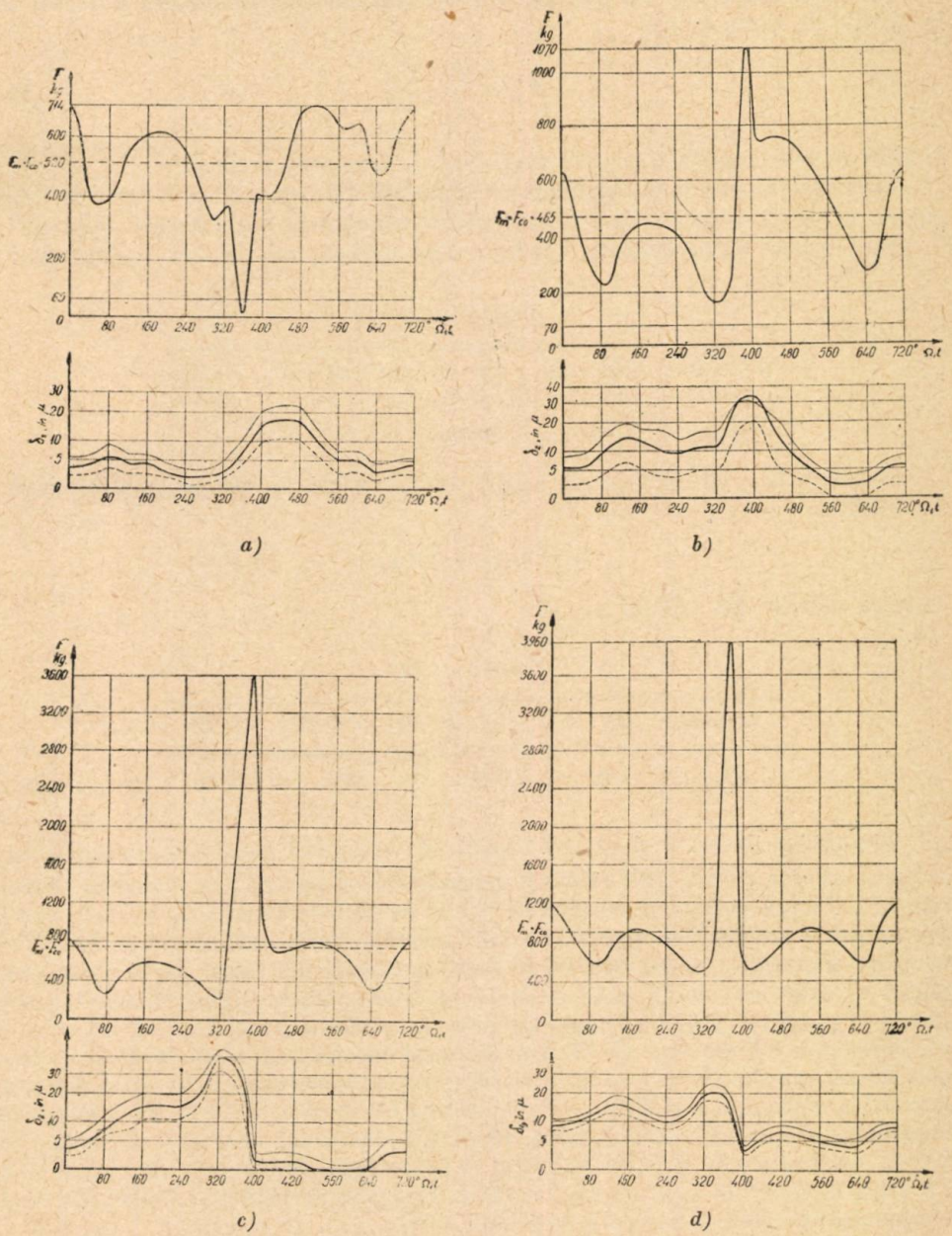


Fig. 10. — Variația grosimii peliculei de lubrifiant în timpul unui ciclu complet (720°) pentru motoarele: *a)* M—20, *b)* ZIS—120, *c)* D—35 și *d)* Horch IFA.

Pentru aceasta, ca axă de planimetrare s-a luat dreapta orizontală $y = \text{const.} = F_{c_0}$. Forţa medie F_{c_0} s-a obţinut printr-o planimetrare anterioară a curbei F în funcţie de t, din relaţia

$$F_{c_0} = \frac{S}{L}, \tag{23}$$

în care S este suprafaţa planimetrată, iar L lungimea perioadei.

S-au planimetrat apoi porţiunile de suprafaţă ale curbei F în funcţie de timp pentru valori $\Omega_1 t$ din 40° în 40°, cu ajutorul cărora s-au obţinut valorile lui $\Delta\theta^*$.

Pentru cele patru motoare încercate s-au obţinut valorile din tabloul nr. 9.

Tabloul nr. 9

Motorul	ZIS–120	M–20	HORCH IFA	D–35
$\Delta\theta^*_{max}$	30°	23°35′	22°	44°

Deoarece θ^*_{min} nu trebuie să scadă sub 7° urmează că $\theta^*_{0\,nom}$ determinat de condiţia

$$\theta^*_0 = \theta^*_{min} + \Delta\theta^*_{max}$$

va avea valorile din tabloul nr. 10.

Tabloul nr. 10

Motorul	ZIS–120	M–20	HORCH IFA	D–35
θ^*_{min}	37°	31°	29°	51°

Din tablourile nr. 9 şi nr. 10 rezultă că, exceptînd cazul motorului D—35, se poate adopta pentru $\Delta\theta^*$ valoarea generală 30° şi pentru θ^*_{nom} valoarea generală 37°. Asupra cazului motorului D—35 se poate face observaţia că şi în acest caz se poate adopta fără pericol valorile generale menţionate deoarece iniţial se foloseşte în practică un ulei mai vîscos decît ar rezulta din calcul, iar ulterior, prin faptul că uzura sistemului piston-cilindru precede uzura lagărului, pierderea compresiei şi reducerea forţei pe maneton precede creşterea jocului radial. În calcule s-a considerat că motorul D—35 funcţionează într-un regim de încărcare apropiat de cel maxim. Se ştie că prin uzură puterea motorului scade. Dacă puterea maximă a motorului a fost 38,5 CP, solicitarea lui iniţială de 90 % va corespunde unei puteri de 35 CP, dacă puterea maximă a motorului uzat este de numai 35 CP, la o solicitare de 90 % — în regim — va corespunde o putere de numai 31,5 CP ş.a.m.d. Astfel în mod treptat, rezultanta forţelor pe maneton scade şi în mod corespunzător scade şi valoarea unghiului $\Delta\theta^*$.

În cazul motorului de autovehicul de transport se pretinde o anumită performanţă, care este realizată de obicei printr-o solicitare a motorului nou în proporţie de ~ 40 %. Valoarea performanţei cerute nu se schimbă; de exemplu atît un autocamion nou, cît şi unul uzat va trebui să asigure transportul a 3 tone cu 30 km pe oră. Pentru a se obţine aceeaşi performanţă de la un autocamion uzat, va

trebui să se mărească gradul de solicitare a motorului la 50 %, 60 % ș.a.m.d. pînă la maximum 100 %, după care valoarea performanței cerute nu se va mai putea obține indiferent de solicitare.

Se vede de aici că la un motor de autovehicul de transport, $\Delta\theta^*$ rămîne practic invariabil, în timp ce la un autovechicul de tracțiune $\Delta\theta^*$ scade destul de repede odată cu uzura.

Din cele arătate rezultă că valorile generale adoptate pentru θ^*_{nom} și $\Delta\theta^*$ se pot aplica și la motoarele autovehiculelor de tracțiune, pentru care ca reprezentant s-a luat motorul D—35.

De la valoarea

$$\theta^*_{nom} = 37^\circ \tag{24}$$

s-a trecut, prin metoda arătată, la excentricitatea rélativă (α_{nom})

$$\alpha_{nom} = 0{,}875 \tag{25}$$

și de aici s-a trecut la coeficientul de portanță al lagărului (ζ), pentru a putea face legătura cu parametrii 1) — 6) inclusiv. Folosind calea arătată s-a obținut

$$\zeta_{nom} = 0{,}9. \tag{26}$$

Cunoscînd valoarea lui ζ_{nom} se poate folosi ecuația (16). (Dacă se stabilea ζ^*_{nom}, se putea folosi ecuația (17)).

În ecuația (16), pentru calcul se poate considera că F, b, r, ω, sînt invariabile pentru un motor dat, astfel că ecuația se poate reduce la forma

$$\zeta_{nom} = \text{const.} \frac{\psi^2}{\mu_1}. \tag{27}$$

Se poate arăta însă că, pentru majoritatea motoarelor uzuale, valoarea acestei constante nu diferă apreciabil, fiind în general

$$\frac{F}{2\,br\,\omega} = \text{const.} = \sim 1\,400. \tag{28}$$

Pentru calcule mai exacte se poate elabora o tabelă cu valorile acestei constante la diferite motoare larg utilizate. Pentru o rezolvare cu caracter general, valoarea din (28) este suficient de exactă.

Valoarea lui ψ se poate cunoaște la motorul nou, făcînd măsurătorile necesare. Această soluție, evident, nu este practică. O altă cale pentru aflarea lui ψ este următoarea. Din datele constructive ale motorului se cunoaște raza manetonului. De asemenea din manualele de tehnologie sau din standarde se știe că prelucrarea arborelui și a alezajului se fac la clasa de precizie, 1 sau 2.

Dat fiind că majoritatea manetoanelor au diametre cuprinse între 50 și 80 mm, se deduc

$$\Delta_{min} = 0{,}03 \text{ mm}$$

$$\Delta_{max} = 0{,}09 \text{ mm}$$

sau un joc radial nominal de 0,06 mm.

În practică se obișnuește să se recomande ca jocul radial să fie aproximativ 0,001 — 0,0015 r ceea ce permite construirea unei diagrame informative, care

prezintă valoarea corectă a jocului radial în funcţie de dimensiunile nominale ale lagărului şi de toleranţele de fabricaţie (fig. 11).

Cunoscînd pe Δ şi pe r se poate apoi uşor determina jocul relativ (ψ).

Valoarea obţinută pentru ψ este valabilă numai pentru motorul nou sau imediat după ieşirea din reparaţie generală. Ulterior, prin uzură jocul radial creşte şi deci creşte şi jocul relativ.

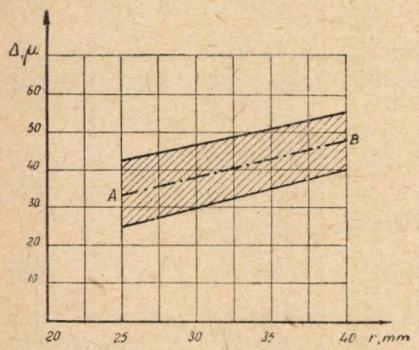


Fig. 11. — Valorile jocului radial (Δ) în funcţie de dimensiunile nominale (linia AB) şi de toleranţele de fabricaţie (zona haşurată).

La prima vedere s-ar părea că aprecierea cantitativă a procesului de uzură este imposibilă, acesta variind de la motor la motor, în funcţie de condiţiile de exploatare. Dacă se analizează datele practice cunoscute se constată însă că există posibilităţi de a stabili unele valori utile în această privinţă.

Astfel numeroşi cercetători consideră că valoarea reprezentativă a uzurii lagărelor motoarelor, care au funcţionat pînă la $\sim$ 100 000 km este de 0,03 mm la cuzineţii palier şi ceva mai mult la fusuri [28]. Aceste cifre au fost verificate la peste 90% din autovehiculele controlate. În mod asemănător, în cadrul unor încercări de teren efectuate cu tractoare, s-au obţinut uzuri diametrale de aproximativ 0,05 mm. Dată fiind echivalenţa practică între aceste timpuri de funcţionare, rezultă că uzurile sînt comparative.

Chiar dacă timpul de exploatare pînă la atingerea acestei uzuri variază în funcţie de tipul motorului şi de condiţiile de exploatare, totuşi rămîne valabilă constatarea statistică ce arată că motoarele uzate pînă la treapta următoare de reparaţie prezintă uzuri de aproximativ 0,05 mm, respectiv creşteri ale jocului radial de aproximativ 0,025 mm.

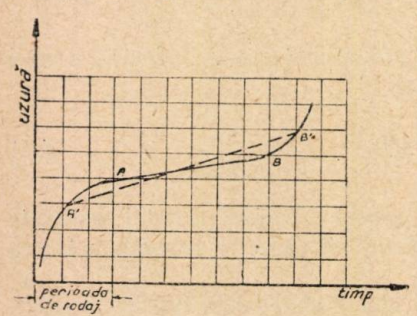


Fig. 12. — Diagrama uzurii în funcţie de timpul de funcţionare. AB — teoretic; $A'B'$ — real.

Prin urmare se poate conta pe cunoaşterea jocului radial la pornire şi la terminarea perioadei de utilizare, dar nu se cunoaşte legea de creştere a jocului radial între aceste puncte. După cum se vede însă în figura 12, se poate considera că variaţia jocului radial, se face după o lege liniară. De fapt curba din figura 12 prezintă evoluţia procesului de uzură, aşa cum se acceptă în general, cu o uzură mai rapidă în perioada de rodaj, o porţiune de uzură lentă, practic uniformă în perioada de exploatare normală şi o uzură rapidă la sfîrşit, cînd eventual se poate ajunge la accident. Dacă motorul ar fi exploatat între punctele AB, este evident că procesul de uzură ar fi uniform. În practică însă exploatarea efectivă începe înainte de a se fi desăvîrşit rodajul şi se termină mai tîrziu decît ar trebui, de exemplu între punctele A' şi B'. Se vede că între aceste puncte evoluţia nu este liniară şi că, de fapt acceptînd şi în acest caz o lege liniară, se contează pe o uzură mai mică în prima perioadă de funcţionare şi pe o uzură mai mare în a doua perioadă. Ar rezulta de aici că prin calcul se va recomanda la început o viscozitate

mai mică decît cea necesară, iar către sfîrșit o viscozitate mai mare decît cea necesară. Cantitativ eroarea nu este mare, iar în unele momente se anulează cu totul (la început, la mijloc și la sfîrșit). Pe de altă parte, în tot cazul, la început, se folosesc uleiuri mai viscoase decît recomandă calculul, iar către sfîrșit, utilizarea unui ulei puțin mai viscos reduce randamentul, dar mărește siguranța funcționării motorului excesiv uzat. Pentru aceste considerații, acceptarea unei legi liniare de variație a jocului radial este perfect admisibilă și cu atît mai corectă, cu cît exploatarea este mai strict limitată la porțiunea AB a curbei de uzură.

Această concluzie se poate exprima prin ecuația

$$\Delta_t = 0{,}025 \frac{t}{\mathfrak{T}} + \Delta_0 \text{ mm}, \tag{29}$$

în care am notat cu: Δ_t jocul radial, în mm, la timpul t; Δ_0 jocul radial, în mm, la începerea exploatării motorului (după rodaj); $\mathfrak{T}$ timpul maxim de exploatare reprezentînd uzura convențională 100 %.

Dacă în relația $\psi = \frac{\Delta}{r}$, înlocuim pe Δ prin valoarea lui din ecuația (29), obținem pentru ψ_t după un timp oarecare t

$$\psi_t = \frac{\psi_0}{\Delta_0}\left(0{,}025 \frac{t}{\mathfrak{T}} + \Delta_0\right), \tag{30}$$

în care ψ_t reprezintă jocul relativ la timpul t; iar ψ_0 jocul relativ la începerea exploatării motorului (după rodaj).

Cu alte cuvinte, curba care reprezintă variația lui ψ_t în funcție de $\frac{c}{\mathfrak{T}}\ t$ este o dreaptă cu ordonata la originea ψ_0 (fig. 13). Panta dreptei va fi evident

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\psi_0}{\Delta_0} = \frac{1}{r_0}. \tag{31}$$

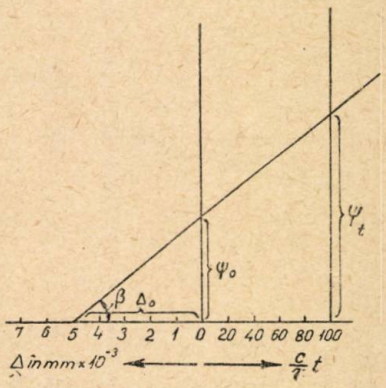


Fig. 13. — Variația jocului relativ (Ψ) în funcție de jocul radial (Δ) și uzură.

Se poate demonstra ușor că variația lui ψ cu timpul (sau % uzură convențională) este proporțională cu valoarea efectivă a lui ψ_0 (inițial). Cu alte cuvinte uzura este cu atît mai lentă, cu cît raza fusului este mai mare.

Dat fiind că regimul de funcționare a lagărului este mai puternic influențat de variația lui ψ decît de variația celorlalți parametri, rezultă că în timp, *lagărele mici și ,în general, ansamblurile de frecare de dimensiuni reduse se vor uza mai repede decît cele de dimensiuni mari.* Această concluzie, care a fost de altfel confirmată de numeroase observații experimentale, a fost dedusă și pe alte căi [13].

★

Rearanjînd ecuația (27) și introducînd valoarea din (26) se obține pentru viscozitatea lubrifiantului,

$$\mu_1 = \psi^2 \frac{\text{const.}}{0{,}9} = 1\,560\ \psi^2. \tag{32}$$

Ecuația (32) poate fi reprezentată grafic după cum se arată în figura 14.

Combinînd diagramele din figurile 13 şi 14 se obţine nomograma din figura 15.

Pentru folosirea acestei nomograme servesc valorile lui Δ_0 şi ψ_0, deduse în modul arătat, şi gradul de uzură convenţională.

Asupra acestei ultime noţiuni trebuie să se facă unele precizări.

Factorul uzură variază apreciabil de la caz la caz şi este practic imposibil să se stabilească un criteriu strict valabil pentru toate condiţiile. Cu toate acestea conducătorul autovehiculului respectiv ştie dacă exploatarea este mai blîndă sau mai severă, prin urmare dacă limita de uzură (100 % uzură convenţională) va fi atinsă mai repede sau mai încet. Cu alte cuvinte, la un automobil exploatat pe şosele bune, în condiţii optime, un parcurs de 100 000 km nu va corespunde nici măcar unei uzuri de 50 % din cea medie statistică, în timp ce pentru un camion exploatat pe un şantier de construcţii sau la o carieră, limita de uzură va fi atinsă după numai 50 000 km sau chiar mai puţin. Indiferent că se produce după 50 000 km sau după 300 000 km, uzura convenţională 100 % reprezintă timpul între două reparaţii capitale, timp care este cunoscut atît de planificatorul acestor reparaţii, cît şi de conducătorul auto respectiv.

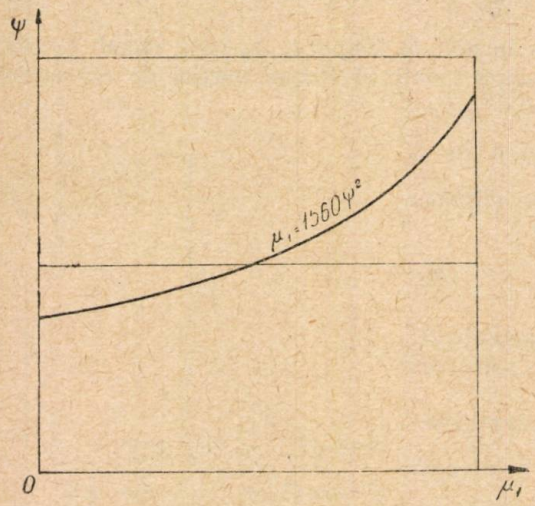


Fig. 14. — Variaţia viscozităţii lubrifiantului (μ_1) în funcţie de jocul relativ (Ψ) pentru $\mu_1 = 1\,560\,\Psi^2$.

★

Folosirea nomogramei din figura 15, conform schemei de utilizare, se face în modul următor: prin punctul Δ_0 (nominal), de pe axa orizontală, se duce o dreaptă care intersectează axa $O\psi$ în punctul ψ_0 (nominal). Această dreaptă va întretăia verticala, care trece prin punctul t corespunzător uzurii respective în %, raportată la 100 % uzura convenţională. De la punctul rezultat se duce o orizontală pînă la curba funcţiei $\mu_1 = 1\,560\ \psi^2$. Din punctul de intersecţie cu această curbă se coboară o verticală, care va întîlni abscisa în punctul μ_1, căutat. Pentru uşurinţă, viscozitatea a fost exprimată în unităţile care se folosesc în mod obişnuit în buletinele de analiză, respectiv în grade convenţionale Engler, şi în centistockes, admiţînd că densitatea relativă la 20 °C este 0,920, ceea ce duce la erori de aproximativ 2 %.

★

Analizînd precizia nomogramei se observă că folosirea exclusivă a funcţiei $\mu_1 = 1\,560\ \psi^2$ duce — printr-o generalizare excesivă — la restrîngerea condiţiilor. Corect ar fi fost ca în partea dreaptă a nomogramei să se afle mai mult curbe reprezentînd diferite alte valori ale constantei, de exemplu $\mu_1 = 1\,200\ \psi^2$; $\mu_1 = 1\,800\ \psi^2$ ş.a.m.d. Consideraţii asemănătoare se pot face asupra celorlalte ipoteze simplificatoare.

În practică, simplificarea operată asupra nomogramei se dovedeşte justificată deoarece cazurile întîlnite în mod obişnuit se încadrează perfect în ipotezele făcute.

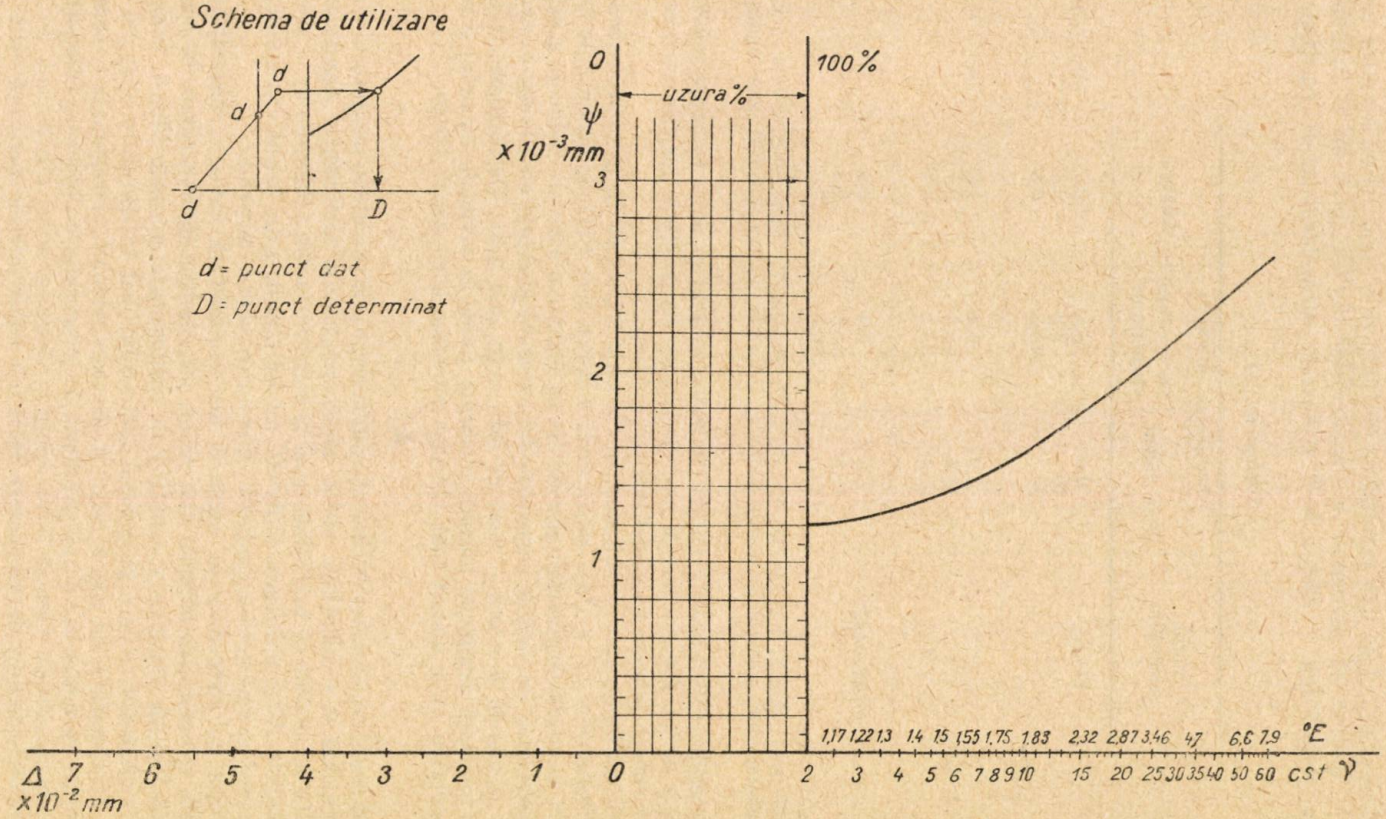


Fig. 15. — Nomogramă pentru determinarea viscozității lubrifiantului în funcție de uzură.

În tabloul nr. 11 se dau rezultatele obţinute prin calcul şi cu ajutorul nomogramei, în ipoteza că motoarele autovehiculelor de transport au comparativ o uzură mai redusă (cu ~ 20 %) decît motoarele autovehiculelor de tracţiune.

Tabloul nr. 11

Tipul motorului	Viscozitatea în cSt *)		Abatere
	Prin calcul	Cu ajutorul nomogramei	
D—35	3,6	3,5	0,1
	10	9,9	0,1
	20	19,5	0,5
M—20	3,6	4,4	1.2
	15,6	15,5	0,1
	35,5	35,3	0,2
ZIS—120	3,3	3,4	0,1
	12,6	12,3	0,3
	26,0	26,0	0,0

*) Cele trei valori indicate pentru fiecare motor reprezintă viscozitatea uleiului stabilită pentru motorul nou, motorul cu uzură medie şi respectiv pentru motorul uzat 100%.

Diferenţele sînt sezisabile numai la jocuri extrem de mici, la limita inferioară a abaterilor de fabricaţie. Chiar şi în acest caz ele nu depăşesc 1,2 cSt, ceea ce din punct de vedere practic nu constituie un neajuns.

Datele tabloului nr. 11 mai scot în evidenţă faptul că în prezent *recomandările de lubrifianţi se fac pe baza stării medii a motoarelor*. Faţă de necesităţile motorului de la începutul exploatării aceasta are ca urmare o oarecare reducere a performanţei motorului, iar *faţă de necesităţile lui cu uzură avansată aceasta are ca urmare o creştere accelerată a uzurii* — ceea ce este mult mai grav. De asemenea tabloul scoate în evidenţă avantajul folosirii uleiurilor fluide în perioada de rodaj şi necesitatea utilizării unor uleiuri mai vîscoase pe măsură ce uzura creşte.

★

După stabilirea caracteristicilor uleiului necesar prin calcul sau cu ajutorul nomogramei urmează să se identifice uleiul corespunzător din sortimentul standardizat.

Pentru acest scop se poate face apel la clasificarea din tablourile nr. 7 şi nr. 8 şi la metodele de determinare indirectă a viscozităţii, prin calcul sau grafic, la temperaturile semnificative, indicate într-un paragraf anterior.

Condiţia de viscozitate în regim a fost considerată valoarea viscozităţii la 30 °C peste temperatura uleiului din carter, iar condiţia de viscozitate la pornire a fost considerată valoarea viscozităţii la temperatura minimă zilnică, deoarece pornirea motoarelor se face în general dimineaţa cînd temperatura este cea mai scăzută. Temperatura de regim este cu oarecare abateri neînsemnate — caracteristică pentru un motor dat şi independentă de temperatura ambiantă. Dimpotrivă, temperatura la pornire variază după anotimp, lunar şi chiar săptămînal. În mod corespunzător, condiţia de viscozitate în regim va fi funcţie numai de uzură, în timp ce condiţia de viscozitate la pornire va fi funcţie periodică de anotimp, lună şi săptămînă, aşa cum se arată în figura 16.

Pentru necesități de planificare, producție și repartiție trebuie să se cunoască temperaturile minime medii pe tot timpul anului. În acest scop se prezintă în tabloul nr. 12 temperaturile minime lunare din R.P.R., considerate ca medii ale

Tabloul nr. 12

Luna	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Temperatura minimă medie °C	−18	−15	−9	−2,5	+4	+8	+10	+9	+3	−2	−8	−14

înregistrărilor făcute pe o perioadă de 35 de ani (date furnizate de Direcția generală a meteorologiei și hidrologiei).

Din cele arătate rezultă că soluția cu valabilitate generală este aceea de a utiliza în toate anotimpurile numai uleiul de iarnă corespunzător, așa cum s-a arătat de altfel de alți cercetători [29]. Deoarece uleiul de iarnă cere un plus de prelucrare și o materie primă superioară, utilizarea lui permanentă este dezavantajoasă din punct de vedere economic, Soluția optimă sub aspect economic este aceea de a utiliza la fiecare moment uleiul cu t_m cît mai aproape de temperatura minimă respectivă.

Pe baza tuturor acestor date stabilirea uleiului necesar nu mai prezintă dificultate.

Pentru utilizarea practică s-a construit o nomogramă (fig. 17) cu caracter general, cu ajutorul căreia, alegerea uleiului potrivit, pe baza viscozității necesare la temperatura de pornire, se simplifică foarte mult.

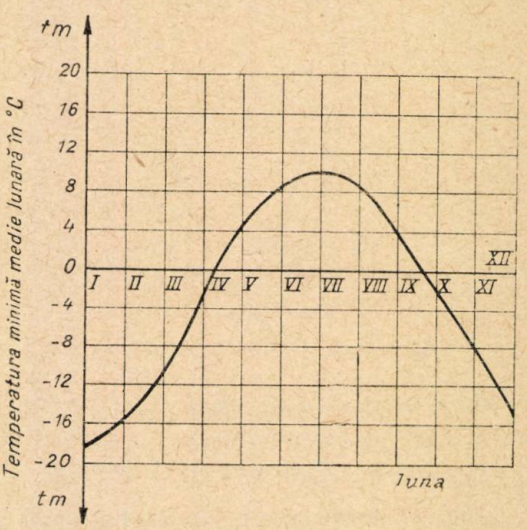


Fig. 16.— Variația temperaturii minime medii lunare în R.P.R., în cursul anului (media înregistrărilor oficiale pe ultimii 35 ani).

Precizia nomogramei este relativ mare, la verificările făcute obținîndu-se rezultate diferite cu maximum 3,5 % față de cele stabilite experimental. Nomograma se bazează pe faptul că la scările logaritmice adoptate, liniile, care unesc orice temperatură cu viscozitatea corespunzătoare pentru fiecare ulei din grupele standardizate, se intersectează într-un punct caracteristic pentru uleiul respectiv. Locul geometric al punctelor de intersecție ale diferitelor uleiuri se situează pe o linie dreaptă cuprinsă între scările ν și t.

În acest mod, dacă se dorește ca uleiul să aibă o anumită viscozitate la o temperatură de regim dată, se unesc punctele respective rezultînd o linie care va intersecta linia ajutătoare în punctul caracteristic al uleiului, dacă există un astfel de ulei. Pe de altă parte uleiul trebuie să îndeplinească și o condiție de viscozitate maximă la temperaturile joase ce se pot întîlni în exploatare, adică uleiul trebuie

să fie caracterizat printr-o temperatură minimă de utilizare (t_m). Pentru uleiurile din sortimentul standardizat, temperaturile (t_m) sînt înscrise în nomogramă în două scări, una în stînga pentru $t_m < 0\,°C$ şi una în dreapta pentru $t_m > 0\,°C$.

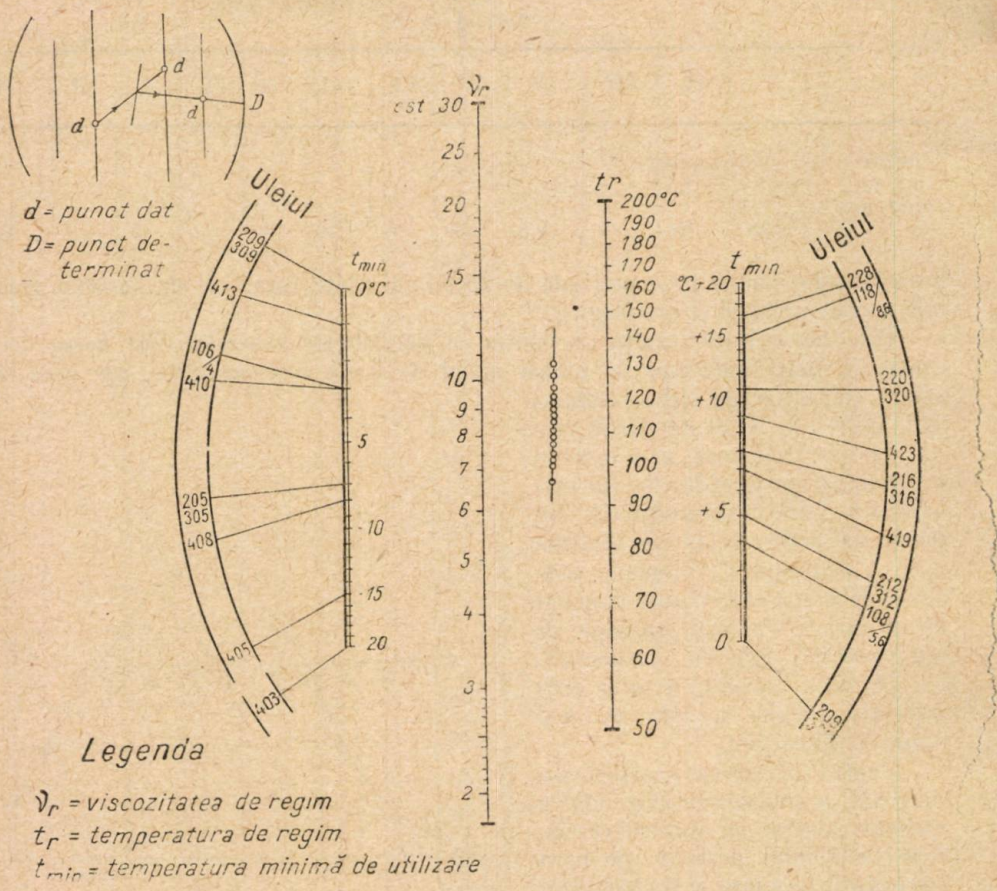


Fig. 17. — Nomogramă pentru identificarea lubrifianţilor în sortimentul STAS, după criteriul viscozităţii (în funcţie de ν_c, t_c, t_m).

Pe două sectoare simetrice situate în continuare sînt trecute uleiurile din sortimentul standardizat, care îndeplinesc condiţia de viscozitate în regim, prin faptul că se află pe linia ajutătoare dintre scările logaritmice ν, t şi îndeplinesc condiţia de temperatură minimă de utilizare, prin faptul că se află prin scările t_m la valoarea corespunzătoare.

Cu alte cuvinte dacă se prelungeşte linia care uneşte punctul de intersecţie al liniei ajutătoare cu linia ν_r, t_r (condiţii date: viscozitatea şi respectiv temperatura de regim) cu punctul dat de pe scara t_m, această prelungire va indica pe sectorul alăturat, uleiul standardizat care îndeplineşte condiţiile impuse. Uneori, dreapta nu va indica pe sector nici un ulei, pentru că poate nu există un ulei care să îndeplinească acele condiţii; în astfel de cazuri se va căuta un alt ulei apropiat, după cum este posibilă variaţia lui ν_r, t_r sau a lui t_m.

CONCLUZII

Concluziile principale, la care s-a ajuns în cursul lucrării prezentate, sînt:

1) Posibilitatea exprimării proprietăților de viscozitate ale lubrifianților prin numai două condiții, cuprinzînd trei valori numerice: ν_c, t_c și t_m.

2) Temperatura de congelare nu este o caracteristică semnificativă pentru utilizare decît în cazul uleiurilor adînc deparafinate.

3) Indicele de viscozitate nu exprimă proprietățile de exploatare ale uleiurilor minerale decît — și numai în oarecare măsură — dacă acestea sînt adînc deparafinate și lipsite de aditivi.

4) Clasificarea actuală a uleiurilor de motoare standardizate în R.P.R. poate fi reglementată și ameliorată.

5) Alegerea lubrifianților în conformitate cu ecuațiile lubrificației, în funcție de tipul motorului, gradul de uzură și anotimp, se poate face cu ajutorul a două nomograme, suficient de exacte pentru utilizarea practică.

КЛАССИФИКАЦИЯ СМАЗОЧНЫХ ВЕЩЕСТВ ДЛЯ ДВИГАТЕЛЕЙ ПО ПРИЗНАКУ ВЯЗКОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящее время характеристика смазочных веществ производится ошибочно и в отрыве от нужд эксплуатации.

Настоящее положение может быть исправлено, если будут определяться данные, касающиеся эксплуатации, и если эти данные будут приводиться соответствующим образом в бюллетенях анализов смазочных веществ.

Путем анализа состояния различных деталей двигателей, на которые влияет качество смазки, а также и условий, которым она должна отвечать для обеспечения нормальной работы двигателей, были установлены следующие элементы, которые интересуют эксплуатацию:

— минимальная температура, при которой можно применять смазочные вещества и, соответственно, температура, при которой вязкость смазки доходит до 4 000 *cSt*;

— вязкость при рабочей температуре, которая приблизительно на 30° выше температуры масла в картере.

Для выражения условий вязкости в рабочем режиме установлены вязкость и температура, при которой вариация вязкости $\left(\frac{\nu'}{\nu} \times 100\right)$ равна 2%.

Указания, представляемые этим способом определения характеристик, точны, имеют физический смысл и могут заменить показатели, отношения и модули, применяемые в настоящее время для характеризования свойств смазочных веществ по вязкости и температуре.

В последней части рассматриваются значения, установленные для характеристик вязкости и разрабатываются две номограммы для выбора смазочных веществ для двигателей, в зависимости от первоначального радиального зазора и от условного износа двигателя.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Приблизительный вид износа цилиндровых втулок.

Рис. 2. — Изменение мощности двигателя, в зависимости от режима смазки узла: цилиндр-поршень.

Рис. 3. — Поступление в подшипник шатуна.

Рис. 4. — Изменение температуры внутри вращающегося вискозиметра.

Рис. 5. — Область полезных для эксплуатации температур и область температур, применяемых в опубликованных спесификациях для характеристики смазочных веществ.

Рис. 6. — Типичный вид функции $\frac{\nu'}{\nu} = f(t)$.

Рис. 7. — Изменение вязкости с температурой, в зависимости от ν_c и t_c.

Рис. 8. — Изменение коэффициента (несущей) силы (ξ), в зависимости от относительной эксцентричности (α).

Рис. 9. — Изменение относительной эксцентричности (α), в зависимости от условного износа для различных значений радиального зазора (Δ).

Рис. 10. — Изменение толщины пленки смазки в течение полного цикла (720°) для двигателей: *a)* М 20; *b)* ЗИС — 120; *c)* Д-35 и *d)* Хорш IFA.

Рис. 11. — Значения радиального зазора (Δ), в зависимости от номинальных размеров (линия AB) и от допусков при фабрикации (заштрихованная линия).

Рис. 12. — Диаграмма износа, в зависимости от продолжительности работы AB — теоретически; $A'B'$ — эффективно.

Рис. 13. — Изменение относительно зазора (Ψ), в зависимости от радиального зазора (Δ) и износа.

Рис 14. — Изменение вязкости смазки (μ_1), в зависимости от относительного зазора (Ψ) при $\mu_1 = 1560\ \Psi^2$.

Рис. 15. — Номограмма для определения вязкости смазки, в зависимости от износа.

Рис. 16. — Вариация минимальной средней ежемесячной температуры в РНР в течение года (средняя оффициальных сводок за последние 35 лет).

Рис. 17. — Номограмма для определения смазочных веществ из сортиментов СТАС по критерию вязкости (в зависимости от ν_c, t_c, t_m).

CLASSIFICATION DES LUBRIFIANTS DES MOTEURS D'APRÈS LE CRITÉRIUM DE LA VISCOSITÉ

(RÉSUMÉ)

La caractérisation des lubrifiants se fait actuellement d'une façon défectueuse, étant donné que les critériums de caractérisation ont peu de rapport avec les nécessités de l'exploitation.

La situation actuelle peut être remédiée, si l'on établit les données qui intéressent l'exploitation et si ces données peuvent s'exprimer d'une façon adéquate dans les bulletins d'analyse des lubrifiants.

L'analyse de la situation des divers organes des moteurs, influencés par la qualité du lubrifiant et des conditions qu'il doit remplir pour assurer un fonctionnement normal de ceux-ci, a établi que ce qui intéresse l'exploitation c'est:

— la température minimum à laquelle peut être utilisé le lubrifiant, c'est-à-dire, la température à laquelle la viscosité du lubrifiant atteint 4000 *St*.

— la viscosité à la température de régime, qui est approximativement de 30 °C plus grande que la température de l'huile du carter.

Pour exprimer la condition de viscosité en régime, on a adopté la viscosité et la température au point où la variation procentuelle de la viscosité $\left(\frac{\nu'}{\nu} \times 100\right)$ est de 2 %.

Les indications que ce mode de caractérisation offre sont précises; elles ont un sens physique et peuvent remplacer les indices, les rapports et les modules utilisés actuellement pour caractériser les propriétés viscosité-température des lubrifiants.

Dans la dernière partie de l'article, on a analysé les valeurs que doivent avoir les caractéristiques de viscosité et on a élaboré deux nomogrammes pour le choix des lubrifiants pour moteurs, en fonction du jeu radial initial et de l'usure conventionnelle du moteur.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Mode approximatif d'usure des chemises intérieures du cylindre.

Fig. 2. — Variation de la puissance du moteur en fonction du régime de graissage de l'ensemble cylindre-piston.

Fig. 3. — Accès du lubrifiant sur le palier de la bielle.

Fig. 4. — Variation de la température à l'intérieur d'un viscosimètre rotatif.

Fig. 5. — Domaine des températures utiles pour l'exploitation et domaine des températures utilisées dans les spécifications officielles pour la caractérisation des lubrifiants.

Fig. 6. — Représentation typique de la fonction $\frac{\nu'}{\nu} = f(t)$.

Fig. 7. — Variation de la viscosité et de la température en fonction de ν_c et t_c.

Fig. 8. — Variation du coefficient de portance (ξ) en fonction de l'excentricité relative (α).

Fig. 9. — Variation de l'excentricité relative (α) en fonction de l'usure conventionnelle pour différentes valeurs du jeu radial (Δ).

Fig. 10. — Variation de la grosseur de la pellicule de lubrifiant pendant un cycle complet (720°), pour les moteurs: *a)* M–20; *b)* ZIS–120; *c)* D–35 et *d)* Horch IFA.

Fig. 11. — Valeurs du jeu radial (Δ) en fonction des dimensions nominales (ligne A B) et des tolérances de fabrication (zone hachurée).

Fig. 12. — Diagramme de l'usure en fonction de la durée du fonctionnement. A B — théorique; *A' B'* — réelle.

Fig. 13. — Variation du jeu relatif (Ψ) en fonction du jeu radial (Δ) et de l'usure.

Fig. 14. — Variation de la viscosité du lubrifiant (μ_1) en fonction du jeu relatif (Ψ) pour $\zeta\,\mu_1 = 1560\,\Psi^2$.

Fig. 15. — Nomogramme pour la détermination de la viscosité du lubrifiant en fonction de l'usure.

Fig. 16. — Variation de la température minimum moyenne mensuelle dans la R.P.R., pendant l'année (moyenne des enregistrements officiels des 35 dernières années).

Fig. 17. — Nomogramme pour l'identification des lubrifiants d'après la classification STAS, selon le critérium de la viscosité (en fonction de ν_c, t_c, t_m).

BIBLIOGRAFIE

1. N. G. Pucikov, *Dizelnîe topliva.* Gostoptehizdat, Moscova–Leningrad, 1953.
2. K. K. Papok i E. E. Semenido, *Motornîe topliva, masla i jidkosti.* Gostoptehizdat, Moscova–Leningrad, 1953.
3. A. T. Wilford, *L'état des huiles lubrifiantes dégradées après l'utilisation dans les moteurs rapides* (II Congrès Mondial de Pétrole), Paris, 1937.
4. *** *Science of Petroleum.* Londra, 1952, vol. IV.
5. *** *L'Industrie du Petrole,* martie 1948.
6. A. M. Brenneke, *Engineer's Forum on Diesel Piston-Ring and Cylinder Wear.* S.A.E. Journ., aprilie 1950.
7. *** *Progress in Engine Lubrication.* S.A.E. Journ., martie 1952.
8. A. Georgi, *Motor Oils and Engine Lubrication.* Ed. Reinhold Publishing Co., New York, 1951.
9. H. H. Zuidema, *Performance of Lubricating Oils.* Ed. Reinhold Publishing Co, New York, 1952.
10. N. Tipei, *Considerații asupra calculului lagărelor prin alunecare.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secțiunea de ştiințe tehnice şi chimice, t. IV, nr. 3–4, iulie–decembrie 1952, p. 29.

11. N. Tipei, *Calculul lagărelor cu alunecare supuse la forţe variabile.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 125.
12. E. J. Gagarin i S. V. Rudneev, *Teplovîe dvigateli.* Maşghizdat, Moscova, 1949.
13. L. Rozeanu şi O. Preoţescu, *Cîteva aspecte ale utilizării uleiurilor lubrifiante din grupe standardizate inferioare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. IV, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1955, p. 107.
14. V. L. Valdman i A. M. Fomino, *K voprosu o fizikomehaniceskih svoistvah smazocinîh masel pri temperature v zasîvanie.* Kolloidnîi jurnal, 1950, t. XII, nr. 5, p. 342.
15. S. G. Daniel, *The Viscosity of Aero-Engine Oils at Low Temperatures.* Journ. of the Institute of Petroleum, 1949, nr. 308, p. 516.
16. B. V. Losikov i I. P. Lukasevici, *Neftianoe tovarovedenie.* Moscova—Leningrad, 1950.
17. H. L. West, *Major Developments in Synthetic Lubricants and Additives in Germany.* Journ. of the Institute of Petroleum, nr. 356, octombrie 1954.
18. E. H. Kadmer, *Schmierstoffe und Maschinenschmierung.* Berlin, 1941.
19. Rudolff Haler, *Über das Pompverhalten von Autoölen bei tiefen Temperaturen.* Brennstoff Chemie, 1950, nr. 7—8.
20. S. L. Peisarmodina, R. N. Smeirova i G. S. Tarmanian, *Factors Affecting the Pompability of Aero Engines Lubricating Oils at Low Temperatures.* Petroleum, 1948, nr. 9.
21. *** *Viscosity of Lubricating Oils at High Rates of Shear.* Journ. of Applied Physics, 1950, (Supliment la nr. 1).
22. *** *Trenie i iznos v maşinah.* Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1949, t. IV.
23. N. I. Cernojukov, *Himia mineralnîh masel.* Gosoptehizdat, Moscova—Leningrad, 1950.
24. I. H. Ramser, Ind. & Engng. Chem., 1949, nr. 9.
25. M. M. Kusakov, *Viscosity-Temperature Characteristics of Lubricants.* Petroleum, 1949, nr. 7.
26. Blatta Verver, *Methods for Expressing the Viscosity-Temperature Relationship of Lubricating Oils.* Journ. of the Inst. of Petroleum, 1952, nr. 4
27. J. Czegi, *Siklacsapágy Kézikönyv.* Nehéziparikönyv, Budapesta, 1953, vol. I.
28. M. M. Tenenbreum, *K metodike izpîtania podşipnikovîh materialov na iznos.* Trenie i iznos v maşinah, Akad. Nauk SSSR, 1953, t. VII.
29. Al. Stratilescu, *Contribuţii la unificarea uleiurilor pentru autovehicule.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953, p. 145.
30. N. I. Cernojukov i K. E. Krein, *Okisliaemosti mineralnîh masel.* Gostoptehizdat, Moscova—Leningrad, 1946.
31. G. M. Barnett, *Extending the Expectation Life of Diesel Engines.* Scientific Lubrication, 1954, nr. 9.
32. B. I. Ghiţburg, *O kriteriah iznosa i dolgovecinosti dvigatelei vnutrennego sgorania.* Vestnic Maşinostroenie, 1950, nr. 7, p. 23.
33. M. H. Karapetiant, *Primerî i zadaci po himiceskoi termodinamike.* Goshimizdat, Moscova—Leningrad, 1953.
34. E. F. Macksand a M. C. Shaw, *Analysis and Lubrication of Bearinys.* Mc. Grow-Hill, New York — Londra, 1949.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

VIBRAŢII

ASUPRA FUNDAŢIILOR CU PĂTURI ELASTICE INTERMEDIARE ALE MAŞINILOR GENERATOARE DE ŞOCURI ŞI TREPIDAŢII PERIODICE

DE

L. HAMBURGER

1. Experienţa a arătat că la maşinile care generează perturbaţii impulsive periodice nu este recomandabil să se aşeze blocul de fundaţie direct pe sol şi că este necesar să se interpună o pătură elastică, avînd de scop să atenueze loviturile.

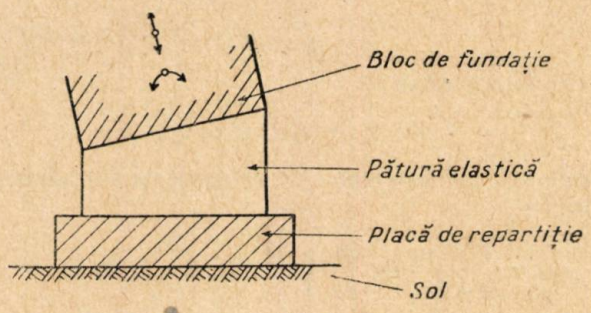


Fig. 1

În acest scop, pe sol se execută o placă de repartiţie, de grosime şi suprafaţă suficiente, peste ea se aşază pătura elastică intermediară şi abia peste aceasta se execută blocul propriu-zis al fundaţiei (fig. 1).

Fără a intra în detaliile executării, apare clar că rigiditatea blocului de fundaţie şi aceea a plăcii de repartiţie sînt considerabil mai mari decît rigiditatea păturii intermediare.

Această constatare simplă duce la concluzia că în prima aproximaţie cele două feţe orizontale ale păturii elastice *vor rămîne plane* în tot timpul funcţionării.

De aici decurg condiţii de limită noi, pe care le vom introduce în calculul ce urmează.

2. Pentru simplitate considerăm că pătura elastică are forma unui paralelipiped tridreptunghic (fig. 2). O raportăm deci la un sistem triortogonal $Ox_1 x_2 x_3$, axa Ox_3 fiind verticală.

Fie a_1, a_2, a_3 laturile acestui paralelipiped. Considerăm că pe fundație lucrează un sistem de forțe verticale P care prin intermediul blocului superior se repartizează continuu pe fața de sus a păturii elastice sub forma unei presiuni p_{33}, a unui moment de răsturnare M_1 în jurul axei Ox_1 și a unui al doilea moment de răsturnare M_2 în jurul axei Ox_2. În sfîrșit se poate introduce și o solicitare de răsucire printr-un moment M_3 cu axa verticală.

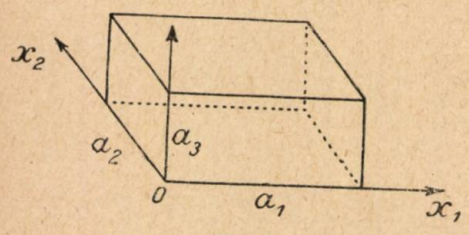


Fig. 2

Vom avea relațiile

$$\begin{aligned} P &= \iint p_{33}\, dx_1\, dx_2, \\ M_1 &= \iint x_2\, p_{33}\, dx_1\, dx_2, \\ M_2 &= \iint x_1\, p_{33}\, dx_1\, dx_2, \end{aligned} \tag{1}$$

integrarea făcîndu-se pe fața superioară a păturii elastice.

Între modulul lui Young E, modulul de alunecare G și coeficientul lui Poisson μ, există după cum se știe relația

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Considerăm vectorul deformațiilor

$$\bar{u} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2 + u_3 \bar{e}_3, \tag{2}$$

unde $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ sînt versorii sistemului de referință și introducem:

— *deformațiile specifice*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3); \tag{3}$$

— *tensiunile interne*

$$\| \sigma_{ij} \| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}). \tag{4}$$

Fie de asemenea

ρ, densitatea materialului păturii elastice și

Q_i, componentele forțelor de volum din pătura elastică.

Vom putea scrie ecuațiile:

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho Q_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Între tensiunile σ_{ij} și deformațiile specifice ε_{ij} există relațiile provenite din legea lui Hooke generalizată

$$\sigma_{ij} = 2G\left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{\mu}{1-2\mu}\delta_{ij}\,\varepsilon \right\}, \tag{6}$$

unde am pus $\varepsilon = \sum_{ij=1}^{3} \delta_{ij}\,\varepsilon_{ij}$

iar $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ cînd } i = j \\ 0 \text{ cînd } i \neq j \end{cases}$ reprezintă tensorul lui Kronecker.

Din aceste ecuații se deduc, prin eliminarea tensiunilor σ_{ij}, ecuațiile

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{G}\left\{ -\rho Q_i + \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right\}, \tag{7}$$

care sumate vectorial se scriu sub forma

$$\nabla^2 \overline{u} + \frac{1}{1-2\mu}\,\text{grad div}\,\overline{u} = \frac{1}{G}\left(-\rho\overline{Q} + \rho\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} \right). \tag{8}$$

În cele ce urmează vom neglija forțele de volum ale păturii elastice, deci

$$\overline{Q} = 0$$

și în consecință

$$\nabla^2 \overline{u} + \frac{1}{1-2\mu}\,\text{grad div}\,\overline{u} = \frac{\rho}{G}\cdot\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Pentru integrare punem

$$\overline{u} = \overline{u}_\rho + \overline{u}_s,$$

unde

$$\begin{cases} \overline{u}_\rho = \text{grad}\,\varphi \\ \overline{u}_s = \text{rot}\,\overline{A}. \end{cases} \tag{10}$$

Cu aceste valori ecuația (9) se scindează în

$$\begin{cases} \rho\cdot\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \dfrac{2(1-\mu)}{1-2\mu} G\,\nabla^2 \varphi \\ \rho\cdot\dfrac{\partial^2 \overline{A}}{\partial t^2} = G\cdot\nabla^2 \overline{A}. \end{cases} \tag{11}$$

Prima reprezintă vibrațiile longitudinale cu viteze de propagare

$$V_l = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\cdot\frac{G}{\rho}},$$

iar a doua vibrațiile transversale cu viteza de propagare

$$V_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

3. În calculul ce urmează vom căuta să ţinem seama de frecările interne ale păturii elastice. În acest scop, vom folosi în locul ipotezelor clasice care constau fie în a introduce un termen

$$-h\frac{\partial u}{\partial t},$$

fie în a înlocui modulii de elasticitate după cum urmează

$$E \to E_0\left(1 + x\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$G \to G_0\left(1 + x\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

metoda coeficienţilor complecşi propusă de E. S. Sorokin

$$E \to E_0\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right),$$

$$G \to G_0\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right),$$

unde ψ reprezintă un coeficient de disipaţie proporţional cu bucla de histerezis a materialului cercetat.

Cu aceste modificări ecuaţiile (11) devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= v_l^2\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right)\nabla^2 \varphi \\ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= v_t^2\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right)\nabla^2 \overline{A}. \end{aligned} \tag{12}$$

Am arătat la început că feţele inferioară şi superioară ale păturii elastice *rămîn plane tot timpul* şi că aceasta constituie una din noile condiţii la limită propuse.

Aşa fiind planul $x_3 = 0$ este staţionar, dacă neglijăm deplasarea plăcii de repartiţie de sub pătura elastică. În această ipoteză undele de deformare vor fi *staţionare, cu noduri în planul* $x_3 = 0$.

Putem deci scrie

$$\begin{cases} \varphi = f(t) \cdot F(x_1, x_2, x_3) \\ \overline{A} = f(t) \cdot \overline{H}(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{13}$$

şi introducînd aceste valori în (12)

$$\begin{cases} f'' \cdot F = v_l^2\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right) f \cdot \nabla^2 F \\ f'' \cdot \overline{H} = v_l^2\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right) f \cdot \nabla^2 \overline{H}. \end{cases} \tag{14}$$

În aceste relații $f(t)$ este periodică, cu pulsațiile ω. Putem deci pune, în conformitate cu ipoteza lui Sorokin,

$$f'' + \omega_0^2\left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right) f = 0$$

și obținem ecuațiile fără parametrul temporal

$$\begin{cases} \nabla^2 F + \dfrac{\omega_0^2}{v_l^2} F = 0 \\ \nabla^2 \overline{H} + \dfrac{\omega_0^2}{v_l^2} \overline{H} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Condițiile de integrare pentru acest sistem de ecuații sînt următoarele:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0 \text{ și } x_1 = a_1 && \sigma_{11} = 0 \\ &x_2 = 0 \text{ și } x_2 = a_2 && \sigma_{22} = 0 \\ &x_3 = 0 && u_3 = 0 \\ &x_3 = a_3 && u_3 = f(t).\ (A_0 x_1 + B_0 x_2 + C_0) \\ &x_3 = a_3 && \sigma_{33} = -p_{33}. \end{aligned} \tag{15'}$$

Vom încerca soluții formale de tipul

$$F = \sin\frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{m\pi x_2}{a_2} \cdot \operatorname{ch}\frac{n\pi x_3}{a_3} \tag{16}$$

cu l, m, numere întregi. Ecuația caracteristică

$$\frac{l^2}{a_1^2} + \frac{m^2}{a_2^2} - \frac{n^2}{a_3^2} = \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2} \tag{16'}$$

permite să se determine coeficientul n dacă l și m sînt cunoscuți.

Am introdus factorul $\operatorname{ch}\dfrac{n\pi x_3}{a_3}$ pentru a obține $u_3 = 0$ pentru $x_3 = 0$.

Soluția generală va fi

$$F = \sum A_{lm} \sin\frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{m\pi x_2}{a_2} \cdot \operatorname{ch}\frac{n\pi x_3}{a_3}. \tag{17}$$

Pentru a simplifica scrierea vom pune

$$\begin{cases} u_i = f(t)\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = f(t) \cdot v_i \\ \sigma_{ij} = f(t) \cdot S_{ij}\,; \quad \varepsilon_{ij} = f(t) \cdot e_{ij}, \end{cases} \tag{18}$$

astfel încît

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial F}{\partial x_1} = \sum A_{lm} \frac{l\pi}{a_1} \cdot \cos \frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin \frac{m\pi x_2}{a_2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x_3}{a_3} \\ v_2 &= \frac{\partial F}{\partial x_2} = \sum A_{lm} \frac{m\pi}{a_2} \cdot \sin \frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \cos \frac{m\pi x_2}{a_2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x_3}{a_3} \\ v_3 &= \frac{\partial F}{\partial x_3} = \sum A_{lm} \frac{n\pi}{a_3} \cdot \sin \frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin \frac{m\pi x_2}{a_2} \operatorname{ch} \frac{n\pi x_3}{a_3} \cdot \end{aligned}\right. \tag{19}$$

De asemenea

$$\left\{\begin{aligned} e_{ii} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_k} \cdot \end{aligned}\right. \tag{20}$$

De aici rezultă

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \nabla^2 F = -\frac{\omega_0^2}{v_l^2} \cdot F$$

în baza ecuației (15_1).

În mod analog obținem

$$\left\{\begin{aligned} S_{ii} &= 2G\left(e_{ii} + \frac{\mu}{1-2\mu} e\right) = 2G\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} - \frac{\omega_0^2}{v_l^2} \cdot F\right\} \\ S_{ij} &= 2G\, e_{ij} = 2G \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} \cdot \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Se verifică ușor că pentru $x_1 = 0$ și $x_1 = a_1$, $S_{11} = 0$
și pentru $x_2 = 0$ și $x_2 = a_2$, $S_{22} = 0$.

În același timp pentru $x_3 = 0$ și $x_3 = a_3$, $S_{33} \neq 0$.

Trecem acum la ecuația vectorială (15_2). Cum prin ipoteză am considerat că momentul de răsucire are direcția axei Ox_3, putem pune

$$\overline{H} = \overline{i}_3 h(x_1, x_2, x_3)$$

și deci

$$\nabla^2 h + \frac{\omega_0^2}{v_t^2} \cdot h = 0 \tag{22}$$

care este o ecuație de tipul (15).

Fără a intra în detaliul integrării, observăm că în baza relației (10_2)

$$\overline{u}_s = \operatorname{rot} \overline{A} = f(t) \cdot \operatorname{rot}(\overline{e}_3 h)$$

și punînd și aici

$$\overline{u}_s = f(t) \cdot \overline{v}_s$$

vom avea

$$\begin{cases} v_{s1} = \mathrm{rot}_1 (\bar{i}_3 h) = -\dfrac{\partial h}{\partial x_2} \\ v_{s2} = \mathrm{rot}_2 (\bar{i}_3 h) = \dfrac{\partial h}{\partial x_1} \\ v_{s3} = \mathrm{rot}_3 (\bar{i}_3 h) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Ultima relație satisface condiția $u_3 = 0$ pentru $x_3 = 0$.

Din relațiile (23) rezultă

$$\begin{cases} e_{11} = -\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \; ; \; e_{22} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \; ; \; e_{33} = 0; \\ e_{12} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \; ; \; e_{13} = -\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \; ; \; e_{23} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} . \end{cases} \tag{24}$$

Cu aceste valori, obținem

$$e = \Sigma e_{ii} = 0,$$

ceea ce era de așteptat. Pentru tensiunile S_{ij} avem

$$\begin{cases} S_{11} = 2G e_{11} = -2G \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ S_{22} = 2G \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ S_{33} = 0 \\ S_{12} = 2G e_{12} = 2G \left\{ \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right\} \\ S_{13} = -2G \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ S_{23} = 2G \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} . \end{cases} \tag{25}$$

Pentru ca să fie îndeplinite condițiile de integrare (15′), trebuie ca pentru

$$x_1 = 0 \; , \; x_1 = a_1 \; ; \; x_2 = 0 \; , \; x_2 = a_2$$

să avem

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \tag{26}$$

4. Sumînd efectele celor doi vectori $\bar{u}_\varphi$ și $\bar{u}_s$ vom avea

$$\begin{cases} S_{11} = 2G \left\{ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \dfrac{\omega_0^2}{v_l^2} \cdot F - \dfrac{\partial^2 h}{\delta x_1 \partial x_2} \right\} \\ S_{22} = 2G \left\{ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{v_l^2} \cdot F + \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \right\} \\ S_{33} = 2G \left\{ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} - \dfrac{\omega_0^2}{v_l^2} - F \right\} \end{cases} \tag{27}$$

și în mod analog

$$\left\{\begin{aligned} S_{12} &= 2G\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}\right\}\\ S_{13} &= 2G\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_3}-\frac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3}\right\}\\ S_{23} &= 2G\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3}-\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{27'}$$

Se vede clar că momentul de răsucire nu influențează asupra deformațiilor u_{33} și tensiunilor normale σ_{33}.

Una din condițiile de integrare era

$$x_3 = a_3 \quad ; \quad v_3 = A_0\,x_1 + B_0\,x_2 + C_0\,.$$

Dacă pentru simplificare punem

$$\mathfrak{X}_{33} = f(t).\ r_{33}\,,$$

obținem pentru tensiuni

$$S_{33} = -r_{33}\,. \tag{28}$$

Pe lîngă aceste condiții mai avem e ident și

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0 \qquad \text{pentru} \begin{cases} x_1 = 0\ , & x_1 = a_1,\\ x_2 = 0\ , & x_2 = a_2. \end{cases} \tag{26}$$

Aceasta conduce la o expresie de forma

$$h = \sum_{\alpha,\beta} \beta_{\alpha\beta} \cos\frac{\alpha\pi x_1}{a_1}\cdot\cos\frac{\beta\pi x_2}{a_2}\cdot \operatorname{ch}\frac{\gamma\pi x_3}{a_3} \tag{29}$$

cu relația de condiție

$$\frac{\alpha^2}{a_1^2}+\frac{\beta^2}{a_2^2}-\frac{\gamma^2}{a_3^2} = \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}\,, \tag{29'}$$

unde α și β sînt numere întregi iar γ se deduce din (29').

5. Revenim la funcția F și o obligăm să satisfacă condițiile la limită pentru $x_3 = a_3$

$$\left\{\begin{aligned} v_3 &= \frac{\partial F_3(a_3)}{\partial x_3} = \Sigma\, A_{lm}\frac{\pi n}{a_3}\cdot\sin\frac{l\pi x_1}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi x_2}{a_2}\operatorname{ch}\cdot\frac{n\pi x_3}{a_3} =\\ &\qquad = A_0\,x_1 + B_0\,x_2 + C_0\\ S_{33}(a_3) &= -r_{33}\,. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Ultima relație scrisă explicit este

$$\begin{aligned} 2G\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}-\frac{\omega_0^2}{v_l^2}F\right\} &= -r_{33}(x_1, x_2) =\\ &= 2G\,\Sigma\, A_{lm}\left(\frac{n^2\pi^2}{a_3^2}-\frac{\omega_0^2}{v_l^2}\right)\sin\frac{l\pi x_1}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi x_2}{a_2}\operatorname{ch} n\pi \end{aligned} \tag{30'}$$

și punînd

$$\frac{n^2}{a_3^2} = \frac{l^2}{a_1^2} + \frac{m^2}{a_2^2} - \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2} \tag{31}$$

se obține

$$-r_{33} = 2G\Sigma A_{lm}\left\{\frac{l^2\pi^2}{a_1^2} + \frac{m^2\pi^2}{a_2^2} - 2\frac{\omega_0^2}{v_l^2}\right\}\sin\frac{l\pi x_1}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi x_2}{a_2}\operatorname{ch} n\pi. \tag{32}$$

Coeficienții A_{lm} se obțin cu ajutorul notației lui Fourier,

$$A_{lm} = \frac{4a_3}{a_1 a_2 n\pi \operatorname{sh} n\pi}\int_0^{a_1}\int_0^{a_2}(A_0 x_1 + B_0 x_2 + C_0)\sin\frac{l\pi x_1}{a_1}\cdot\sin\frac{m\pi x_2}{a_2}dx_1\,dx_2 =$$

$$= \frac{4a_3}{\pi^3 lm n \operatorname{sh} n\pi}\{A_0 a_1[(-1)^l[(-1)^m - 1] + B_0 a_2(-1)^m[(-1)^l - 1] +$$

$$+ C_0[(-1)^l - 1][(-1)^m - 1]\}. \tag{33}$$

În consecință, pentru

$$a)\quad l = 2p+1;\ m = 2q+1;\ \frac{n^2}{a_3^2} = \frac{(2p+1)^2}{a_1^2} + \frac{(2q+1)^2}{a_2^2} - \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2},$$

$$A_{(2p+1,2q+1)} = \frac{8a_3(A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0)}{\pi\,(2p+1)(2q+1)\,n\operatorname{sh} n\pi}; \tag{33'}$$

$$b)\quad l = 2p,\ m = 2q+1;\ \frac{n^2}{a_3^2} = \frac{4p^2}{a_1^2} + \frac{(2q+1)^2}{a_2^2} - \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2},$$

$$A_{(2p,2q+1)} = \frac{8a_1 a_3 A_0}{\pi^3\, 2p\,(2q+1)\,n\operatorname{sh} n\pi}; \tag{33''}$$

$$c)\quad l = 2p+1,\ m = 2q;\ \frac{n^2}{a_3^2} = \frac{(2p+1)^2}{a_1^2} + \frac{4q^2}{a_2^2} - \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2},$$

$$A_{(2p+1,2q)} = \frac{8a_2 a_3 A_0}{\pi^3\,(2p+1)\,2q\cdot n\operatorname{sh} n\pi}; \tag{33'''}$$

$$d)\quad l = 2p,\ m = 2q,$$

$$A_{(2p,2q)} = 0. \tag{33''''}$$

Aceste valori introduse în (32) conduc la trei ecuații liniare neomogene în A_0, B_0, C_0, care astfel sînt determinați.

Coeficienții A_{lm} descresc pe măsură ce l, m cresc și deci concomitent și n. Cum $n^2 > 0$ ca să avem linii hiperbolice, rezultă că punctele (l, m) se află în planul (l, m) în afara elipsei

$$\frac{l^2}{a_1^2} + \frac{m^2}{a_2^2} = \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2},$$

unde ocupă toate punctele cu coordonate numere întregi, cu excepția cazului cînd l și m sînt ambele pare. Seria care reprezintă pe r_{33} este rapid convergentă întrucît coeficienții descresc ca termenii seriei

$$\sum_l \frac{1}{l^3}.$$

Ne putem deci mărgini la puțini termeni. Cu titlul de exemplu facem calculul pentru primii trei termeni, care iau valorile

$$\begin{cases} A_{11} = \dfrac{8a_3}{\pi^3} \cdot \dfrac{A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0}{n_{11} \operatorname{sh} n_{11}\pi} \\ n_{11} = a_3 \sqrt{\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}}. \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} A_{12} = \dfrac{8a_3}{\pi^3} \cdot \dfrac{a_2 B_0}{2n_{12} \operatorname{sh} n_{12}\pi} \\ n_{12} = a_3 \sqrt{\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{4}{a_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}}, \end{cases} \tag{34'}$$

$$\begin{cases} A_{21} = \dfrac{8a_3}{\pi^3} \cdot \dfrac{a_1 A_0}{2n_{21} \operatorname{sh} n_{21}\pi} \\ n_{21} = a_3 \sqrt{\dfrac{4}{a_1^2} - \dfrac{1}{a_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}}. \end{cases} \tag{34''}$$

Păturile elastice fiind relativ subțiri

$$\operatorname{sh} n\pi \simeq \operatorname{th} n\pi \simeq n\pi,$$

$$\operatorname{ch} n\pi \simeq 1$$

și deci

$$\begin{cases} A_{11} \simeq \dfrac{8(A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0}{\pi^4 a_3 \left[\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}\right]} = L(A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0) \\ A_{12} \simeq \dfrac{4 a_2 B_0}{\pi^4 a_3 \left[\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{4}{a_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}\right]} = N B_0 a_2 \\ A_{21} \simeq \dfrac{4 a_1 A_0}{\pi^4 a_3 \left[\dfrac{4}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} - \dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2}\right]} = M A_0 a_1. \end{cases} \tag{35}$$

Cu aceasta obținem

$$r_{33} = 2G\left\{L \sin\frac{\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{\pi x_2}{a_2}(A_0 a_1 + B_0 a_2 + C_0) + \right.$$
$$\left. + M \sin\frac{2\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{\pi x_2}{a_2} \cdot A_0 a_1 + N \sin\frac{\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{2\pi x_2}{a_2} B_0 a_2 \right\}. \tag{36}$$

Punem acum

$$P = P_0 f(t); \quad M_1 = M_{01} f(t); \quad M_2 = M_{02} f(t)$$

și avem

$$\begin{cases} P_0 = \iint r_{33}\, dx_1\, dx_2 \\ M_{01} = \iint r_{33}\, x_2\, dx_1\, dx_2 \\ M_{02} = \iint r_{33}\, x_1\, dx_1\, dx_2 \end{cases} \tag{37}$$

de unde

$$\begin{cases} A_0 a_1 + B_0 a_2 + 2C_0 = -\dfrac{P_0 \pi^2}{8GLa_1 a_2} \\ 2L(A_0 a_1 + B_0 a_2 + 2C_0) - N B_0 a_2 = -\dfrac{\pi^2 M_{01}}{2G a_1 a_2^2} \\ 2L(A_0 a_1 + B_0 a_2 + 2C_0) - M A_0 a_1 = \dfrac{\pi^2 M_{02}}{2G a_1^2 a_2}. \end{cases} \tag{38}$$

De aici rezultă imediat

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{\pi^2}{2GMa_1^2 a_2}\left\{\dfrac{M_{02}}{a_1} - \dfrac{P_0}{2}\right\} \\ B_0 = \dfrac{\pi^2}{2GNa_1 a_2^2}\left\{\dfrac{M_{01}}{a_2} - \dfrac{P_0}{2}\right\} \\ C_0 = \dfrac{\pi^2}{4G a_1 a_2}\left\{P_0\left(\dfrac{1}{2M} + \dfrac{1}{2N} - \dfrac{1}{4L}\right) - \left(\dfrac{M_{02}}{Ma_1} + \dfrac{M_{01}}{Na_2}\right)\right\}. \end{cases} \tag{39}$$

În acest mod am determinat coeficienții A_0, B_0, C_0 și deci cunoaștem și coeficienții A_{lm} ai seriilor noastre și în consecință tensiunile și deformațiile.

Ceea ce am făcut aici aproximativ se poate calcula și mai exact luînd un număr mai mare de coeficienți.

În cazul deosebit de simplu al unei forțe unice aplicate în centrul dreptunghiului $a_1 \times a_2$, avem

$$M_{01} = P_0\, a_2/2; \quad M_{02} = P_0\, a_1/2$$

şi în consecinţă

$$A_0 = 0, \qquad B_0 = 0,$$

$$C_0 = -\frac{\pi^2 P_0}{16\, G.L.\, a_1 a_2},$$

care conduce la relaţia

$$r_{33} = \frac{P_0 \pi^2}{4 a_1 a_2} \sin\frac{\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{\pi x_2}{a_2}, \tag{40}$$

adică o *distribuţie sinusoidală a presiunilor pe faţa superioară a păturii elastice.*

Se verifică uşor că

$$\iint r_{33}\, dx_1\, dx_2 = P_0,$$

ceea ce era evident de aşteptat.

6. Nu am insistat în cele ce preced asupra efectului răsucirii, însă calea ce trebuie urmată nu diferă de cea descrisă aici pentru ecuaţia vibraţiilor longitudinale.

Se poate obiecta însă că în loc de amortizare cu ecuaţia

$$f'' + \omega_0^2 \left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right) f = 0$$

putem avea numai dispersie şi deci

$$f'' + \omega_0^2 f = 0$$

şi în acelaşi timp

$$\nabla^2 F + \frac{\omega_0^2}{v_l^2 \left(1 + \frac{i\psi}{2\pi}\right)} \cdot F = 0. \tag{41}$$

Cum ψ este mic, putem scrie fără erori sensibile

$$\nabla^2 F + \frac{\omega_0^2}{v_l^2} \left(1 - \frac{i\psi}{2\pi}\right) \cdot F = 0. \tag{41'}$$

Integrala, în condiţiile la limite impuse, a acestei ecuaţii va avea termeni de forma

$$\sin\frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{m\pi x_2}{a_2} \cdot \cos\frac{n\pi x_3}{a_3}, \tag{42}$$

unde

$$n = n_1 + i n_2$$

în l, m, n satisfăcînd ecuaţia caracteristică

$$\frac{l^2}{a_1^2} + \frac{m^2}{a_2^2} + \frac{(n_1 + i n_2)^2}{a_3^2} = \frac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2} \left(1 - \frac{i\psi}{2\pi}\right). \tag{43}$$

Aceasta conduce la sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} n_1^2 - n_2^2 = a_3^2\left\{\dfrac{\omega_0^2}{\pi^2 v_l^2} - \dfrac{l^2}{a_1^2} - \dfrac{m^2}{a_2^2}\right\} \\ \\ 2n_1 n_2 = -a_3^2 \dfrac{\omega_0^2}{2\pi^3 v_l^2}\,\psi. \end{array}\right. \tag{44}$$

Cum produsul

$$n_1 n_2 < 0$$

în baza ultimei relații, vom putea totdeauna găsi perechi de mărimi reale (n_1, n_2) care să satisfacă ecuațiile (44).

Și aici integrala va avea forma unei serii

$$F = \sum A_{lm} \sin \frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin \frac{m\pi x_2}{a_2} \cdot \cos \frac{(n_1 + in_2)\,\pi x_3}{a_3} \tag{45}$$

și în consecință partea reală sau cea imaginară a acestei expresii vor da soluția problemei, bineînțeles în urma unui calcul de identificare întru totul analog celui desfășurat mai sus.

7. Calculul de mai sus permite să se calculeze și transmisivitatea păturii elastice. În adevăr, pentru $x_3 = 0$

$$S_{33}(0) = 2G \sum A_{lm} \left(\frac{l^2\pi^2}{a_l^2} + \frac{m^2\pi^2}{a_2^2} - \frac{2\omega_0^2}{v_l^2}\right) \sin \frac{l\pi x_1}{a_1} \cdot \sin \frac{m\pi x_2}{a_2} \cdot$$

Dacă integrăm pe toată fața $a_1 \times a_2$, obținem

$$Q_0 = \frac{8G\,a_1 a_2}{\pi^2} \sum \frac{A_{lm}}{l \cdot m}\left[\frac{l^2\pi^2}{a_1^2} + \frac{m^2\pi^2}{a_2^2} - \frac{2\omega_0^2}{v_l^2}\right]$$

și deci

$$\eta = \frac{\sigma_{33}(0)}{\sigma_{33}(a_3)} = \frac{Q_0}{P_0}.$$

Este însă evident că η depinde de distribuția presiunilor pe fața superioară, adică de coeficienții A_{lm}.

О ФУНДАМЕНТАХ С ЭЛАСТИЧНОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ПОСТЕЛЬЮ ДЛЯ МАШИН, У КОТОРЫХ ВОЗНИКАЮТ БИЕНИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор разрабатывает вопрос о фундаментах с промежуточной эластичной постелью для машин, у которых возникают биения и периодические колебания.

В уравнении эластичности учитывают внутренние трения, применяя метод комплексных коэффициентов, предложенный Сорокиным.

Пользуясь предельными условиями, вытекающими из способа расположения эластичной постели, определяют выражения напряжений.

Рассматривается также и случай, когда вместо затухания имеет место только дисперсия.

Вычисляется передаваемость эластичной постели.

SUR LES FONDATIONS À COUCHES ÉLASTIQUES INTERMÉDIAIRES DES MACHINES GÉNÉRATRICES DE CHOCS ET DE TRÉPIDATIONS PÉRIODIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, l'Auteur étudie le problème des fondations à couches élastiques intermédiaires des machines génératrices de chocs et de trépidations périodiques.

On tient compte, dans les équations de l'élasticité, des frottements interieurs en utilisant la méthode des coefficients complexes, proposée par Sorokine.

On trouve ensuite les expressions des tensions en utilisant les conditions à la limite, qui résultent de la façon dont est située la couche élastique.

On étudie également le cas où, au lieu d'amortissement, il n'y a que dispersion.

On calcule enfin, la transmissivité de la couche élastique.

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Barkan, *Rasciot i proectirovanie fundamentov pod maşinî s dinamicezkimi podgruzkami.* Stroizdat, Moscova, 1933.
2. R. S. Sorokin, *Issledovanie po dinamike.* Stroizdat, Moscova, 1938.
3. E. Rausch, *Maschinenfundamente und dynamische Bauaufgaben.* Berlin, 1936.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

VIBRAŢII

ASUPRA DETERMINĂRII VIBRAŢIILOR PROPRII ALE CONSTRUCŢIILOR

DE

M. MIŞICU

Pentru determinarea solicitărilor dinamice, care apar în construcţii cu un grad de nedeterminare ridicat, este necesară cunoaşterea unei părţi a spectrului de frecvenţe de vibraţie proprie şi chiar sistemele de deformare.

În majoritatea cazurilor este utilă stabilirea întregului spectru de frecvenţe, pentru a se putea preciza coeficienţii dinamici şi zonele de rezonanţă, care ar putea apare în urma unor influenţe dinamice exterioare (motoare cu mase mobile neechilibrate, şocuri de ciocan, vînt, cutremur etc.).

Procedeele de calcul indicate în literatură prezintă dificultăţi ce sporesc în cazul determinării frecvenţelor intermediare. Procedeele prin relaxare sau încercări succesive nu permit o izolare sistematică a intervalelor care cuprind frecvenţele şi nu sînt construite în vederea unor condiţii de închidere şi convergenţă suficient de rapide. În acest sens există demonstrată posibilitatea de închidere şi convergenţa pentru procedee neutilizabile în mod practic [1].

Pentru calculul unei frecvenţe de un anumit ordin se porneşte de la o stare de deformare corespunzătoare. Astfel, la o construcţie înaltă, ultimele trei frecvenţe vor corespunde, în mod aproximativ, unor deformări orizontale după un sfert de undă, o semiundă şi o undă. Aceasta revine la a considera în prima etapă de iteraţie, în ecuaţiile de vibraţie,

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \delta_{ij}\lambda)\, v_j = 0;\ i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ \delta_{jj} = 1;\ \delta_{jk} = 0;\ (j \neq k)$$

un sistem de vectori proprii $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$, care să corespundă ca mărime şi sens cu deplasările ansamblului.

Întotdeauna se pot alege, fără un calcul prealabil, două sisteme de vectori care să încadreze deplasarea reală corespunzătoare unei anumite frecvenţe [2]. Cu toate acestea nu este însă stabilit şi procedeul care duce la închiderea valorilor aproximative maximale cu cele minimale. Pentru aceasta fie soluţiile

$$\lambda_i^0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} \cdot v_j^0}{v_i^0}$$

obținute în prima etapă cu ajutorul unui vector propriu ales inițial (maximînd sau minimînd soluția).

Din spectrul de valori λ_i, corespunzătoare atît vectorului minimal, cît și celui maximal, se extrage valoarea minimă l_p și maximă l_q precum și valorile intermediare de medii M_p, M_q. Determinantul $D = |A|$ al matricei deplasărilor va fi $D = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, λ_i fiind valorile p oprii.

Sînt de considerat situațiile:

1) între l_p și l_q nu sînt valori proprii;

2) între l_p și l_q există valori proprii.

Prima situație nu este posibilă. Într-adevăr, întrucît deplasările au fost alese în așa fel încît să maximeze și să minimeze deplasările corespunzînd frecvenței căutate λ_r, astfel ca $|v^0_{i\,\min}| < |v_i| < |v^0_{i\,\max}|$, exceptînd un singur vector (arbitrar datorită ecuațiilor omogene) și anume $v^0_{l\,\min} = v_l = v^0_{l\,\max}$, vom avea

$$\lambda_r = \frac{\sum a_{lj} v_j}{v_l} < \frac{\sum a_{lj} v^0_{j\,\max}}{v_{l\,\max}} = \lambda^0_{l\,\max}.$$

Analog

$$\lambda_r = \frac{\sum a_{lj} v_j}{v_l} > \frac{\sum a_{lj} v^0_{j\,\min}}{v_{l\,\min}} = \lambda^0_{l\,\min}$$

și deci

$$\lambda_p < \lambda^0_{l\,\min} < \lambda_r < \lambda^0_{l\,\max} < \lambda_q .$$

În cea de a doua etapă de iterație se vor considera valorile:

— pentru șirul minimal

$$l'_i = \begin{cases} M_p \text{ pentru } l_i < M_p , \\ l_i \text{ pentru } l_i > M_p ; \end{cases} \qquad \left(M_p = \frac{\sum l_{i\,\min}}{n} \right);$$

— pentru șirul maximal

$$l'_i = \begin{cases} l_i \text{ pentru } l_i < M_q , \\ M_q \text{ pentru } l_i > M_q ; \end{cases} \quad M_q = \frac{\sum l_{i\,\max}}{n} < l_q < \sum a_{ii} ; \quad (l_p < M_p < M_q < l_q < \sum a_{ii}).$$

Funcția

$$\Delta (l_1 , l_2 , \ldots , l_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - l_i)$$

se anulează pentru $\lambda_i = l_i$. Dacă între l_p și l_q există o singură soluție λ_j, avem $\Delta_p \ \Delta_q \leqslant 0$. Într-adevăr, în ipoteza existenței unei singure soluții λ_r, între l_p și l_q subzistă inegalitatea

$$\Delta_p [\lambda_r (1 - \varepsilon_1), \lambda_r (1 - \varepsilon_2), \ldots] \ \Delta_q [\lambda_r (1 + \varepsilon'_1), \lambda_r (1 + \varepsilon'_2), \ldots] < 0.$$

În afară de ultima condiție (de încadrare luată prin construcție pentru închidere), cantitățile Δ_p și Δ_q trebuie să tindă monoton spre zero prin valori de semn contrar. Așadar va trebui ca

$$\frac{\delta\Delta_p}{\Delta_p} < 0; \quad \frac{\delta\Delta_q}{\Delta_q} < 0 \; ; \quad (\delta\Delta_p \cdot \delta\Delta_q < 0).$$

Să arătăm că procedeul corespunde efectiv acestor situații. Într-adevăr, dacă într-o etapă se calculează valorile

$$l_i = \frac{\Sigma\, a_{ij}\, v_j}{v_i},$$

în etapa următoare rezultă componentele vectorului propriu

$$v_i' = \frac{\Sigma\, a_{ij}\, v_j}{l_i'} = \frac{l_i}{l_i'}\, v_i$$

sau

$$\frac{v_i'}{v_i} = \frac{l_i}{l_i'}.$$

În cazul șirului minimal se obține $\frac{v_i'}{v_i} < 1$ deoarece $\frac{v_i'}{v_i} = \frac{l_i}{M_p} < 1$ pentru $l_i < M_p$; $\frac{v_i'}{v_i} = 1$ pentru $l_i > M_p$, iar în cazul șirului maximal $\frac{v_i'}{v_i} > 1$, întrucît $\frac{v_i'}{v_i} = 1$ pentru $l_i < M_q$; $\frac{v_i'}{v_i} = \frac{l_i}{M_q}$ pentru $l_i > M_q$.

Așadar componentele, în diferite etape ale unui șir (v_i, l_i), nu se suprapun cu cele din alt șir, iar, pe de altă parte, subzistă condiția de încadrare

$$M_p \leqslant M_q; \; M_p' \geqslant M_p; \; M_q' \leqslant M_q; \; v_i^p \geqslant v_i^q; \; v_i'^p \leqslant v_i^v; \; v'^q_i \geqslant v_i^q.$$

Întrucît s-a presupus un interval încadrînd o singură rădăcină, șirurile Δ_p, Δ_q vor tinde monoton către zero prin valori de semn contrar. Rămîne de precizat și convergența. Pentru aceasta trebuie să se considere eroarea

$$E = \Sigma\,(l_i - M)^2$$

și ecartul mediei între două etape

$$\Delta = M - M'.$$

Se calculează

$$E = \Sigma\,(l_i - M')^2 - 2\,\Delta\,(\Sigma l_i - n\,M') + n\,(M')^2$$

sau, în baza formulei mediei

$$E = \Sigma\,(l_i - M')^2 + n\,(M')^2.$$

Analog, eroarea în etapa următoare este

$$E' \equiv \sum (l_i' - M')^2 = \sum_1 (l_i - M')^2 + \sum_2 (M - M')^2$$

și deci ecartul erorilor devine

$$E - E' = \sum_2 (l_i - M')^2 + k\Delta^2 > \sum_2 (l_i - M')^2.$$

Pentru

$$h = (l_p - l_q)_{\max}$$

avem

$$| l_i - M' | = \left| \frac{\sum (l_j - l_i)}{n} \right| > \left| \frac{h}{n} \right|$$

și deci

$$E - E' > \left(\frac{h}{n} \right)^2.$$

Pe de altă parte, este clar că

$$E < n h^2$$

și deci, după k etape, raportul erorilor finale și inițiale este *)

$$\frac{E'}{E} < \left(1 - \frac{1}{n^3} \right)^k.$$

Rezultă deci efectiv pentru procedeul considerat că
Există o vecinătate a valorilor

$$\lambda = l_i; \; i = 1, 2, \ldots, n$$

pentru care, dacă $l_i = \lambda' + \varepsilon_i$; $|\varepsilon_i| < \varepsilon$, *avem* $\lambda_R = \lambda + 0(\varepsilon^2)$, λ_R *reprezentînd cîtul lui Rayleigh*

$$\lambda_R = \frac{\sum_i l_i v_i^2}{\sum_i v_i^2} = \frac{\sum_{ij} a_{ij} v_i v_j}{\sum_i v_i^2}.$$

Într-adevăr, dacă se consideră vectorii normați X, V astfel ca

$$\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i; \quad \sum_j a_{ij} v_j = l_i v_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

și dacă $d = \min | \lambda - \lambda_R |$ atunci se știe că [1], [3], [4]: $| X - V | = 0 \left(\frac{\varepsilon}{d} \right)$ și $\lambda_R = \lambda + 0 \; (\varepsilon^2/d^2)$.

*) Convergența este mărită folosind în locul mediilor aritmetice medii e ponderate (cîtul lui Rayleigh).

Determinarea frecvenței de ordinul 1 $\left(i \cong \frac{170+176}{2} = 173\right)$

	Șirul maximal ($M_p < M_q < S_pA$)						Șirul minimal ($M_q < M_p < S_pA$)				
	v_i		$\Sigma_j \alpha_{ij} v_j$	$l_i = \frac{\Sigma \alpha_{ij} v_j}{v_i}$	$\frac{\Sigma \alpha_{ij} v_j}{\Sigma v_i}$	l'_i	v_i	$\Sigma_j \alpha_{ij} v_j$	$l_i = \frac{\Sigma \alpha_{ij} v_j}{v'i}$	$\frac{\Sigma v_i l_i}{\Sigma v'_i}$	l_j
9	1	redus	226	226	$\frac{693,8}{5,3} = 13$	178	1	126	126	∞	126
	1,27	1	229,6	181		176	1	148,6	148,6		148,6
	1,29	1	227,27	176		176	1	158,22	158,22		158,42
	1,29	1	223,44	173			1	162,92	165,92		
8	0,9	redus	157	175	$\frac{728,47}{4,47} = 16$	175	0,4	99	24,6	$\frac{483,06}{2,67} = 180$	178
	0,9	0,71	168,4	186,5		178	0,55	113,34	205		178
	0,95	0,736	168,48	178		178	0,63	119,72	190		178
	0,95	0,736	166,58	176			0,67	122,74	186		
7	0,8	redus	114	142	$\frac{722,45}{4,28} = 169$	142	0,3	72	242	$\frac{513,35}{2,87} = 178$	178
	0,8	0,63	122,8	154		162	0,41	81,75	198		178
	0,76	0,59	121,2	159		169	0,46	85,77	185		178
	0,72	0,56	119,91	168,5			0,48	87,90	183		
6	0,7	redus	79	113	$\frac{712,08}{4,17} = 170$	131	0,2	52	260	$\frac{522,76}{2,98} = 176$	178
	0,6	0,47	83,1	140		162	0,29	54,94	190		
	0,51	0,396	81,66	160		169	0,306	57,67	187		
	0,48	0,37	80,77				0,32	58,90	183		
5	0,6	redus	53	88		131	0,1	34	340		178
	0,4	0,315	56	140		162	0,19	37,76	200		
	0,345	0,267	55,94	161		169	0,212	41,79	195		
	0,33	0,255	54,76	170			0,235	40,62	173		
4	0,5	redus	36	68		131	0	21	∞		178
	0.26	0,215	35,4	136		162	0,118	23,86	200		
	0,218	0,168	35,07	160		169	0,134	25,87	192		
	0,208	0,160	34,51	167			0,142	25,52	180		
3	0,40	redus	19	47		131	0	12	∞		178
	0,145	0,112	20,1	139		162	0,068	13,61	200		
	0,123	0.094	19,82	161		169	0,077	14,23	184		
	0,117	0,090	19,69	168			0,080	14,50	181		
2	0,250	redus	8,4	34		131	0	6	∞		178
	0,064	0,049	9,32	145		162	0,034	6,62	206		
	0,058	0,045	9,31	160		169	0,0372	7,33	196		
	0,055	0,0425	5,07	165			0,041	6,92	168		
1	0,150	redus	3,4	23		131	0	2,2	∞		178
	0,0245	0,019	3,74	153		162	0,0125	2,51	205		
	0,0230	0,017	3,70	160		169	0,0145	2,93	190		
	0,0218	0,0168	3,55	162			0,0154	2,74	181		

Sînt cazuri ca acel dat în exemplul din figură, pentru care este greu de a alege cu suficientă precizie valorile maximale și minimale v_i, astfel că în cursul iterațiilor pot apărea

Determinarea frecvenței de ordinul 2 (i=3,84)

	v_i'	$\Sigma a_{ij} v_j'$	l_i'	$M_p = \Sigma l_i/n$; $(M_p+\lambda)/2$	Σa_{ij}
9	0,775 0,74	278,6 277,82	4,9 4,1	2,69 (2,69+ 5)/2= 3,85 2,68 (2,68+ 5)/2= 3,84	279,8−5=274,8 279,8−4=275,8
8	1,05 1,08	177,15 177,8	−1,28 −0,64		183,5−5=178,5
7	1,08 1,09	132,4 132	0,65 0,26		136,72−5=131,72
6	1,10 1,10	94,88 94,44	2,37 1,99		97,26−5= 92,26
5.	1,10 1,10	61,09 60,43	2,33 1,73		63,52−5= 58,52
4	1,10 1,095	40,66 40,11	2,63 2,13		42,77−5= 37,77
3	1,10 1,08	22,77 22,53	3,72 3,95		23,64−5= 18,64
2	1,03 1,04	9,11 9,05	4,05 5,85		9,93−5= 4,93
1	 1,01	4,27 4,24	4,83 4,75		

valori l_i negative, complicînd calculele. În acest scop se iau în loc de v_i valorile $\overline{v}_i - v_0$ (v_0 cît mai mare) astfel ca v_0, l_i să fie pozitive. Vom avea sistemul

$$\sum_j a_{ij} (\overline{v}_j - v_0) = (\overline{v}_i - v_0) l_i ,$$

$$l_i \overline{v}_i = \Sigma a_{ij} \overline{v}_j - (\sum_j a_{ij} - l_i) v_0 .$$

Îl alegem pe v_0 astfel, ca $v_i \geqslant 0$ și $v_0 \gg v_i$, iar

$$0 < l_i = \frac{\Sigma a_{ij} \overline{v}_j - (\Sigma_j a_{ij} - l_i) v_0}{\overline{v}_i} < \Sigma a_{ii} - \Sigma_i \lambda_i,$$

$$v_i' = \frac{\Sigma a_{ij} (\overline{v}_j - v_0) + v_0 l_i}{l_i'},$$

$\Sigma_i \lambda_i$ reprezentînd suma rădăcinilor anterior determinate.

Pentru exemplificare vom considera cazul unui cadru etajat. Caracteristicile statice (matricea deplasărilor) se calculează prin metode de iterație cunoscute și care nu fac obiectul lucrării de față. Matricea a fost obținută considerînd 1 metru liniar de construcție cu masele aferente. Indicii din figură corespund indicilor coeficienților matricei deplasărilor.

În tablou sînt două rubrici corespunzînd calculului aproximativ al frecvențelor printr-un șir de valori care scad (maximal) și altul de valori care cresc (minimal). În prima coloană sînt trecuți indicii nodurilor la care se referă valorile de pe aceeași linie. Se pornește cu un prim șir de valori v_i de exemplu: 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,25; 0,15 pentru șirul maximal conform figurii. Se calculează valorile trecute în tablou ținînd seama de coeficienții a_{ij} ai matricei. Pentru evitarea unor calcule mai complicate se alege v_0 egal cu 1. În ultimele coloane se obțin valorile l_i, conform formulei $\Sigma a_{ij} v_j / v'_i$, ce converg, v'_i fiind deplasarea obținută în iterația următoare.

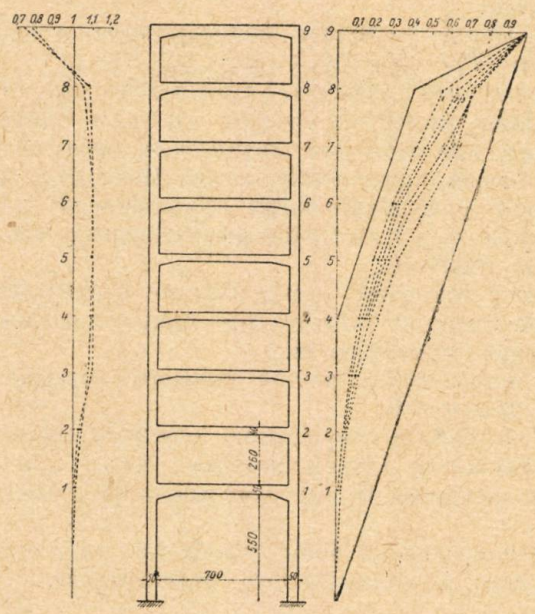


Fig. 1

În diagrama din stînga schemei cadrului (fig. 1) sînt trecute deplasările corespunzătoare frecvenței de ordinul 2. Calculele sînt efectuate conform formulelor de la sfîrșitul expunerii precedente.

S-a considerat matricea

$$A \equiv \begin{vmatrix} 75 & 66 & 50 & 33 & 25 & 15 & 9,2 & 5 & 1,6 \\ 66 & 53 & 26 & 16 & 10 & 6,7 & 3,3 & 1,60 & 0,9 \\ 50 & 26 & 25 & 15,8 & 9,3 & 6,3 & 3 & 0,82 & 0,5 \\ 33 & 16 & 15,8 & 15 & 8,3 & 5 & 2,9 & 0,71 & 0,45 \\ 25 & 10 & 9,3 & 8,3 & 5 & 3,3 & 1,7 & 0,60 & 0,32 \\ 15 & 6,7 & 6,3 & 5 & 3,3 & 3,2 & 1,6 & 0,42 & 0,25 \\ 9,2 & 3,3 & 3 & 2,9 & 1,7 & 1,6 & 1,4 & 0,35 & 0,19 \\ 5 & 1,6 & 0,82 & 0,71 & 0,6 & 0,42 & 0,35 & 0,30 & 0,13 \\ 1,6 & 0,9 & 0,50 & 0,45 & 0,32 & 0,25 & 0,19 & 0,13 & 0,10 \end{vmatrix} \times 10^{-4}\,\text{sec}^2$$

corespunzătoare deplasărilor orizontale ale sistemului din figură.

Frecvențele sînt determinate cu ajutorul relației $\omega = 1/\sqrt{\lambda'}$, λ' fiind valorile proprii ale matricei A. Întrucît s-a considerat în calcul matricea $10^3 A$ de valori proprii λ, rezultă $\omega = \sqrt{10^3/\lambda}$.

Anume s-a ales matricea A cu frecvențe depărtate, deoarece este mai dificilă de rezolvat.

Cu ajutorul calculului trecut în tablou se obțin valorile

$$\lambda_1 = 173\ \text{sec}^2,\ \lambda_2 = 3{,}84\ \text{sec}^2 \text{ sau } \omega_1 = 15{,}2/\text{sec};\ \omega_2 = 104/\text{sec}.$$

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ВИБРАЦИЙ КОНСТРУКЦИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе указывается метод вычисления собственных частот различных порядков (тонов) некоторых систем с многочисленными степенями свободы. Разные работы [1]—[11] содержат указания расчетов в этом направлении.

Изложенный метод улучшает конвергенцию итераций повторных вычислений [1] и [7].

Предполагается, что известны статические характеристики конструкций (смешения моментов, осевые силы и единичные режущие силы), необходимые при этом для статических вычислений и для вычислений, имеющих целью определение частот. Последние могут быть определены посредством последовательных приближений (алгорифм Гаусса, конечные разности и т. д.) или экспериментальных испытаний на моделях, нагруженных блоками.

По сравнению с методами, переходящими непосредственно к вычислениям частот, необходимо указать, что вышеизложенный способ представляет следующие преимущества:

1) допускает определение частот высшего порядка, на основании одних и тех же уравнений;

2) сводит вычисление к разрешению линейной системы перемещений (встречающиеся также в других методах, метод конечных разностей включительно) и нелинейной системы итераций, быстро сходящихся в одну точку;

3) позволяет определение волн колебания (вибраций) конструкций путем максимального и минимального ограничения.

SUR LA DÉTERMINATION DES VIBRATIONS PROPRES DES CONSTRUCTIONS

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'Auteur expose une méthode de calcul des fréquences propres de différents ordres des systèmes à nombreux degrés de liberté. Diverses études [1] — [11] indiquent les procédés utilisés dans ce sens.

La méthode exposée améliore la convergence des itérations de calcul [1] şi [7].

On suppose connues les caractéristiques statiques des constructions (déplacements dans les moments, efforts axiaux et efforts tranchants unitaires) qui sont du reste nécessaires pour les calculs statiques et pour les calculs de détermination des fréquences. Ces dernières peuvent être déterminées par approximations successives (algorithme de Gauss, différences finies, etc.), ou expérimentalement, sur des modèles chargés de poulies.

Le procédé décrit offre les avantages suivants sur les procédés qui passent directement au calcul des fréquences:

1. Il permet la détermination des fréquences d'ordre supérieur à l'aide des mêmes équations.

2. Il réduit le calcul à la résolution d'un système linéaire (qui apparaît aussi

dans d'autres méthodes, y compris celle des différences finies) et d'un système non linéaire, par itérations rapidement convergentes.

3. Le procédé permet la détermination des ondes de vibration des constructions par une limitation maximale et minimale.

BIBLIOGRAFIE

1. Stephen H. Crandall, *On a Relaxation Method for Eigenvalue Problems.* J. Math. Phys., vol. XXX, octombrie, 1951, p. 140–145.
2. A. F. Smirnov, *Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor.* Ed. tehnică, București, 1951, p. 61–63.
3. V. H. Wittmeyer, *Einfluss der Änderung einer Matrix auf die Lösungen des zugehörigen Gleichungssystems.* ZAMM, 1936, vol. 16, p. 287–300.
4. A. Vazsonyi, *A Numerical Method in the Theory of Vibrating Bodies.* J. Appl. Phys., 1944, vol. 15, p. 598–606.
5. F. R. Gantmaher i M. G. Krein, *Ostilaționnîie matrițî i iadra i malîe kolebania mehaniceskih sistem.* Gosud. Izdat. Tehn. Teoret. Lit., Moscova, 1950, p. 324–331.
6. F. P. Gantmacher, *Teoria matrițelor.* Tehn. Teoret. Lit., Moscova, 1953, p. 73–82.
7. L. Collatz, *Eigenwertaufgaben.* Akad. Verlag, Leipzig, 1949, p. 292.
8. K. B. Biezeno i R. Grammel, *Tehniceskaia Dinamica.* Gosud. Izdat. Tehn. Teoret. Lit., Moscova, 1950, p. 226–261.
9. R. Grammel, *Neuere Untersuchungen über kritische Zustände.* Erg. d. exakten Naturwiss., Berlin, 1932, vol. I, p. 99.
10. L. Collatz, *Einschliessungssatz für die characteristischen Zahlen von Matrizen.* Math. Zeitschr., 1942, vol. 48, p. 221–226.
11. D. K. Fadeev i I. S. Sominski, *Sbornik zadaci po vîșei algebre.* Gostehizdat, Moscova, 1949, p. 280.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

UNELE PROBLEME ALE VIBRAŢIILOR PROPRII LA CONSTRUCŢIILE CU MAI MULTE ETAJE

DE

SANDU RĂUTU şi MIHAIL IFRIM

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Pentru regiunile cu grad de seismicitate ridicat, verificarea comportării construcţiilor cu mai multe etaje la sarcini dinamice este o problemă deosebit de importantă.

Lucrarea de faţă are drept obiectiv determinarea vibraţiilor proprii ale construcţiilor înalte. Ea atacă două probleme:

— Metodica de calcul a frecvenţei vibraţiilor proprii ale construcţiilor cu mai multe etaje, avînd o singură deschidere.

— Problema influenţei forţelor axiale asupra frecvenţei vibraţiilor proprii a acestui gen de construcţii.

În lucrare sînt expuse şi rezultatele verificărilor experimentale executate în laboratorul I.M.A. în legătură cu această problemă.

★

Problema determinării frecvenţei vibraţiilor proprii a sistemelor cu mai multe grade de libertate este teoretic rezolvată. În general, calculul dinamic este simplu, necesitînd în schimb calcule statice laborioase.

Această lucrare îşi propune să dea un calcul mai simplu al unui sistem cu un număr mare de etaje, avînd însă o singură deschidere, construcţie destul de des întîlnită în practica construcţiilor cu mai multe etaje.

În acest scop vom utiliza metoda aproximaţiilor succesive. Această metodă se bazează pe ca culul deplasărilor statice ale sistemelor din două tipuri de încărcări: $(F_i)_1 = m_i y_i$ şi $(F_i)_2 = m_i \omega^2 y_i$. Raportul săgeţilor din cele două tipuri de sarcini (aplicate static) ne va da tocmai frecvenţa

$$\omega^2 = \frac{(y_i)_1}{(y_i)_2} . \tag{1.1}$$

Curba y_i nefiind cunoscută se propune de o formă oarecare. Prin aproximări succesive se ajunge la valori ale frecvenţei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$, care tind spre valoarea exactă. Se constată că 2...3 aproximaţii sînt suficiente.

Compararea deplasărilor se face în punctul unde ele ating valoarea maximă, deoarece în acest caz convergenţa seriei este mai rapidă.

În cazul de faţă s-a considerat că masele sistemului sînt concentrate în nodurile cadrului (fig. 1).

Rezolvarea statică s-a făcut folosind metoda forţelor unitare, alegîndu-se ca sistem de bază sistemul din figura 2 şi s-a căutat să se determine prima frec-

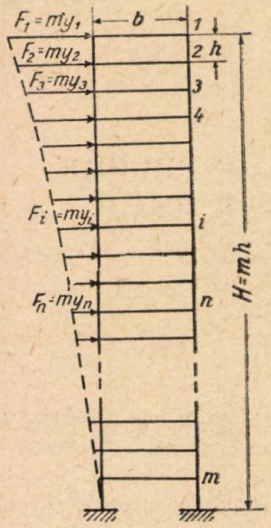


Fig. 1

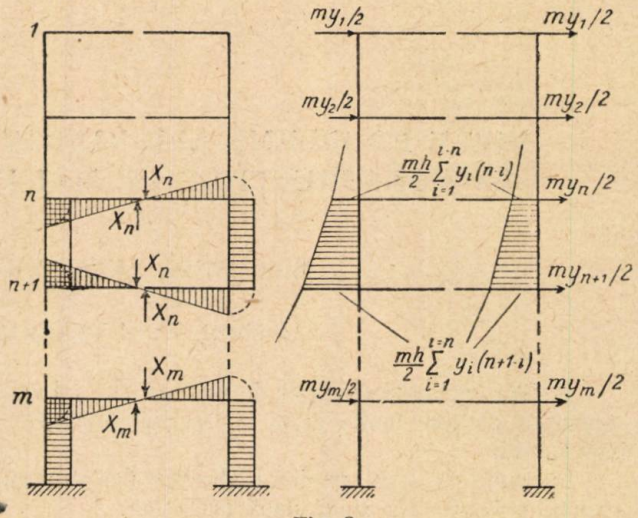


Fig. 2

venţă proprie a sistemului (ω_{min}). Prima frecvenţă va produce o deformaţie antisimetrică şi deci toate necunoscutele simetrice ale sistemului sînt nule.

Prin alegerea necunoscutelor grupate, aşa cum se arată în figura 2, un număr mare de deplasări relative unitare δ_{ik} sînt egale cu zero

$$\delta_{i,i+2} = \delta_{i,i+3} = \ldots = \delta_{i,i+n} = 0. \tag{1.2}$$

Ecuaţiile canonice vor avea forma generală

$$\delta_{n,n-1} X_{n-1} + \delta_{n,n} X_n + \delta_{n,n+1} X_{n+1} + \delta_{np} = 0, \tag{1.3}$$

unde $\delta_{n,n-1}$, $\delta_{n,n}$ şi $\delta_{n,n+1}$ sînt nişte constante, funcţie de dimensiunile cadrului şi ale secţiunilor lui, iar δ_{np} — în cazul încărcărilor cu sarcini de forma $m_i y_i$ — este o funcţie de numărul etajelor şi de deplasările etajelor superioare:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{n,n} &= \frac{b^2 h}{2EI_s} + \frac{b^3}{6EI_r} \\ \delta_{n,n-1} &= \delta_{n,n+1} = -\frac{b^3}{12\,EI_r} \\ \delta_{np} &= -\frac{mh^2 b}{4EI_s} \sum_{i=1}^{i=n} y_i(2n+1-2i) \end{aligned}\right\}. \tag{1.4}$$

Știind că y_i este și el o funcție de n, putem spune că în acest caz X_n poate fi și el exprimat ca o funcție de n și anume

$$X_n = X_{n(1)} + X_{n(2)}, \tag{1.5}$$

unde $X_{n(1)}$ este o funcție generală a acestei ecuații fără membrul doi, iar $X_{n(2)}$ este o soluție particulară a ecuației cu membru doi.

Soluția ecuației fără membru doi poate fi pusă sub forma

$$X_{n(1)} = Z^n. \tag{1.6}$$

Făcîndu-se înlocuirile, se obține

$$\delta_{n,n+1} Z^2 + \delta_{n,n} Z + \delta_{n,n-1} = 0, \tag{1.7}$$

de unde se pot determina valorile lui Z (Z_1 și Z_2), care satisfac această relație. Soluția generală a ecuației fără membrul doi va avea forma

$$X_{n(1)} = AZ_1^n + BZ_2^n, \tag{1.8}$$

unde A și B sînt niște constante arbitrare.

Soluția particulară a ecuației se caută de obicei sub forma polinomială:

$$X_{n(2)} = \sum_1^k a_i n^i. \tag{1.9}$$

Deci soluția generală a sistemului de ecuații va avea expresia

$$X_n = AZ_1^n + BZ_2^n + \sum_1^k a_i n^i. \tag{1.10}$$

Constantele A și B se determină prin condițiile inițiale, adică expresia generală a lui X_n trebuie să satisfacă cele două ecuații ale sistemului cu o formă particulară, și anume ecuațiile (1) și (m), m fiind numărul total de etaje:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1p} = 0 \qquad (1) \\ &\delta_{m,m-1} X_{m-1} + \delta_{m,m} X_m + \delta_{mp} = 0 \qquad (m) \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$\delta_{m,m}$ avînd o formă deosebită de $\delta_{i,i}$ obișnuit:

$$\delta_{m,m} = \frac{b^2 h}{2EI_s} + \frac{b^3}{12EI_r}. \tag{1.12}$$

Această metodă de rezolvare întrebuințată pentru prima oară de A. I. Segal la calculul static al construcțiilor înalte la acțiunea vîntului, poate fi utilizată cu mare folos în calculul cadrelor la vibrații.

În cazul cînd numărul de etaje este mic sau cînd momentele de inerție ale elementelor construcției sînt variabile, ecuațiile se rezolvă direct, deoarece sistemul de ecuații, prin alegerea judicioasă a sistemului de bază, este simplu de rezolvat.

2. CALCULUL FRECVENȚEI VIBRAȚIILOR PROPRII ALE CONSTRUCȚIILOR CU MAI MULTE ETAJE AVÎND O SINGURĂ DESCHIDERE

Calculele s-au efectuat pentru două modele metalice cu următoarele caracteristici comune (fig. 3):

— ariile secțiunilor: $A_r = 1{,}2$ cm^2 și $A_s = 2$ cm^2;

— momentele de inerție: $I_r = 0{,}66667$ cm^4 și $I_s = 0{,}225$ cm^4.

Masele s-au considerat aplicate în noduri. Valoarea unei mase corespunzătoare unui nod oarecare va fi constituită din masa unei rigle și masa a doi stîlpi (fig. 4).

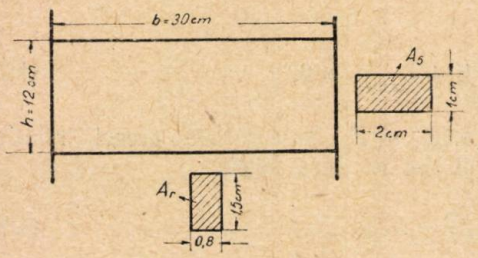


Fig. 3

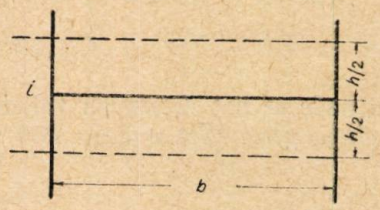


Fig. 4

S-a luat $\gamma_f = 0{,}0078$ kg/cm^3 și a rezultat masa $(m) = 0{,}0006678 \dfrac{\text{kg. sec}^2}{\text{cm}}$.

Cele două modele vor diferi prin numărul etajelor și anume:

a) modelul cu 24 de etaje ($m = 24$);

b) modelul cu 12 etaje ($m = 12$).

a) Construcția cu 24 de etaje ($m = 24$)

Sistemul canonic de ecuații are forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1p} = 0 && (1)\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{2p} = 0 && (2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \delta_{np} = 0 && (n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\delta_{m,m-1}X_{m-1} + \delta_{m,m}X_m + \delta_{mp} = 0\,. && (m)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

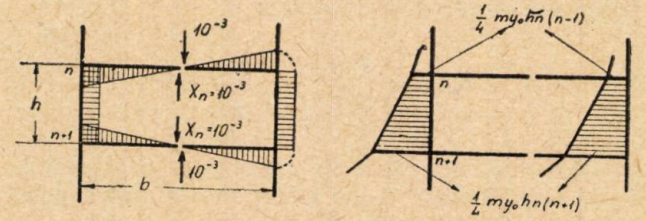


Fig. 5

În primă aproximație se presupune că săgețile sînt constante pe înălțimea cadrului (y_0). Rezultă că în nodurile construcției vor acționa forțe $F = my_0$.

Ținînd seama de (1.4), (1.12) și diagramele reprezentate în figura 5, coeficienții sistemului devin

$$\left.\begin{aligned} \delta_{n,n} &= 28{,}1\times10^{-3}\times 1/E \\ \delta_{n,n-1} &= \delta_{n,n+1} = -10\times10^{-3}\times 1/E \\ \delta_{m,m} &= 18{,}1\times10^{-3}\times 1/E \\ \delta_{np} &= -1{,}0819\, n^2\, y_0\times10^{-3}\times 1/E \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Expresia generală a sistemului va lua forma

$$-10\,X_{n-1} + 28{,}1\,X_n - 10\,X_{n+1} = 1{,}0819\,n^2. \quad (2.3)$$

Conform ecuațiilor (1.5) ... (1.10) se obține soluția generală

$$X_n = A\,(2{,}392)^n + B\,(2{,}392)^{-n} + (0\,133568\,n^2 + 0\,329797)\,y_0. \quad (2.4)$$

Impunînd condițiile (1.11) se determină constantele A și B, deci

$$X_n = -y_0\left[\frac{2m+1}{10{,}4212}(2{,}392)^{n-m} + 0{,}3298\,(2{,}392)^{-n} - 0{,}133568\,n^2 - 0{,}329797\right]. \quad (2.5)$$

Făcînd $m = 24$, expresia (2.5) devine

$$X_n = -y_0\,[4{,}7019\,(2{,}392)^{n-24} + 0{,}3298\,(2{,}392)^{-n} - 0{,}133568\,n^2 - 0{,}329797]; \quad (2.6)$$

luînd $y_0 = 0{,}2$ cm vom obține valorile necunoscutelor X_n din tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

X_n	Valoarea	X_n	Valoarea	X_n	Valoarea
X_1	0,065102	X_9	2,229733	X_{17}	7,784096
X_2	0,161290	X_{10}	2,737276	X_{18}	8,716154
X_3	0,301565	X_{11}	3,298290	X_{19}	9,697590
X_4	0,491364	X_{12}	3,916890	X_{20}	10,722699
X_5	0,732958	X_{13}	4,580494	X_{21}	11,777990
X_6	1,027297	X_{14}	5,301672	X_{22}	12,831057
X_7	1,374778	X_{15}	6,076154	X_{23}	13,804375
X_8	1,775601	X_{16}	6,903718	X_{24}	14,515261

Cunoscînd valoarea forțelor exterioare $F = 0{,}06678$ (constante pe înălțimea cadrului și aplicate în nodurile lui), *momentele* static determinate se obțin prin relația de recurență

$$M_n^0 = M_{n-1} + 0{,}80136\,(n-1), \quad (2.7)$$

iar momentele static nedeterminate din expresia

$$M = 15\,X_n. \quad (2.8)$$

Variația acestor momente are aceeași alură cu diagramele reprezentate în figura 6 corespunzătoare construcției $m = 12$.

Momentele finale se obţin prin însumarea celor două expresii (2.7), (2.8) ţinîndu-se seama de semn (fig. 6, *a*)).

$$M_n = M_n^0 - 15\,X_n\,. \tag{2.9}$$

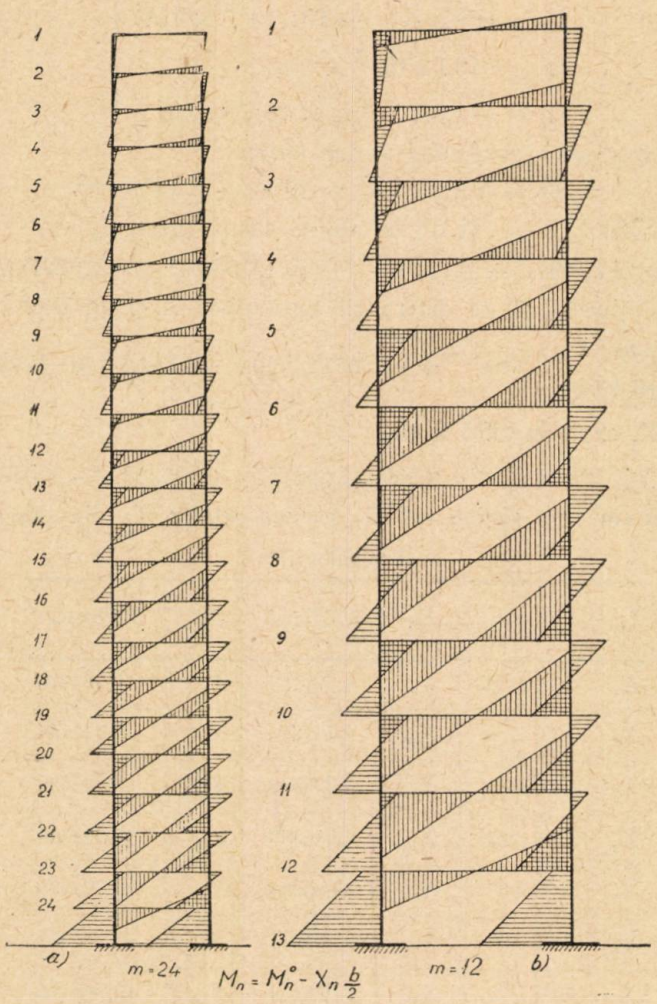


Fig. 6

Deplasările nodurilor s-au calculat integrînd diagramele de momente, rezultate din expresiile (2.7) şi (2.8), cu diagrama rezultată din forţa unitară aplicată în fiecare nod.

Pentru evitarea erorilor şi uşurarea calculului s-au efectuat separat deplasările pozitive şi negative apoi s-au însumat (fig. 9, *b*).

Determinarea *frecvenţei* se face conform relaţiei (1.1) obţinîndu-se

$$\omega_1^2 = \frac{y_0}{(y_1)_1} = \frac{0{,}2}{2{,}7669 \times 10^{-5}} = 0{,}72283 \times 10^4,$$

$$\omega_1 = 85{,}02 \tag{2.10}$$

sau

$$n_1 = \omega_1/2\pi = 13{,}5314/\text{sec.} \tag{2.11}$$

În aproximația a doua s-au luat ca valori ale deplasărilor pe orizontală, săgețile rezultate din primul calcul. Calculul s-a efectuat identic, obținîndu-se deplasarea nodului 1

$$(y_1)_2 = 3{,}5699 \times 10^{-9}.$$

În consecință

$$\omega_2 = 88{,}037 \tag{2.12}$$

și

$$n_2 = 14{,}0115/\text{sec.} \tag{2.13}$$

Se vede că de la primul la al doilea calcul avem o diferență de 3,58 %.

a) **Construcția cu 12 etaje** ($m = 12$)

Forma sistemului canonic de ecuații rămîne aceeași (2.1); de asemenea și coeficienții sistemului (2.2) cu excepția termenului liber δ_{np}. Pornind de la diagrama de momente (fig. 2), rezultă relația

$$\delta_{np} = -1{,}0819 \sum_{i=1}^{i=n} y_i (2n + 1 - 2i) \times 10^{-3} \times 1/E. \tag{2.14}$$

După cum se vede, coeficientul δ_{np} este funcție de ordonatele y_i ale curbei de deformație a cadrului pe care exact n-o cunoaștem.

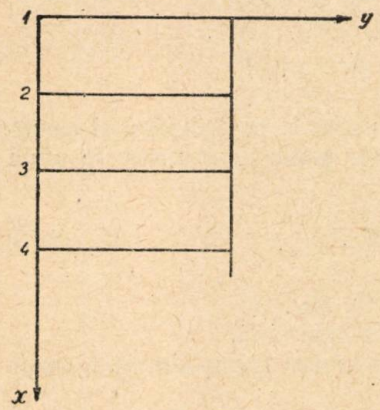


Fig. 7

De data aceasta nu vom mai porni cu săgețile y_0 constante pe înălțimea cadrelor, ci vom admite variația deplasărilor pe orizontală de forma (fig. 7)

$$y = ax^3 + bx + c. \tag{2.15}$$

Determinarea constantelor s-a făcut prin condițiile inițiale, pentru $x = 0$, $y = 0{,}2$ cm, iar pentru $x = H$, $y = 0$ și $\frac{dv}{dx} = 0$.

Se obține expresia

$$y = \frac{0{,}1}{H^3} x^3 - \frac{0{,}3}{H} x + 0{,}2 \tag{2.16}$$

sau scriind acestă ecuație funcție de numărul curent al nodurilor, se găsește forma finală

$$y = 0{,}0000579\,(n-1)^3 - 0{,}025\,(n-1) + 0{,}2. \tag{2.17}$$

Prin efectuarea sumelor $\sum_{i=1}^{i=n} y_i\,(2n+1-2i)$ se obțin valorile δ_{np}. Făcînd

anumite simplificări şi transformări, sistemul canonic de ecuaţii are forma

$$\left.\begin{array}{rrrrl}
 & -2{,}81\,X_1 & +X_2 & +0{,}0216 & =0\\
X_1 & -2{,}81\,X_2 & +X_3 & +0{,}0838 & =0\\
X_2 & -2{,}81\,X_3 & +X_4 & +0{,}0181 & =0\\
X_3 & -2{,}81\,X_4 & +X_5 & +0{,}2696 & =0\\
X_4 & -2{,}81\,X_5 & +X_6 & +0{,}4690 & =0\\
X_5 & -2{,}81\,X_6 & +X_7 & +0{,}6319 & =0\\
X_6 & -2{,}81\,X_7 & +X_8 & +0{,}8192 & =0\\
X_7 & -2{,}81\,X_8 & +X_9 & +1{,}0182 & =0\\
X_8 & -2{,}81\,X_9 & +X_{10} & +1{,}2253 & =0\\
X_9 & -2{,}81\,X_{10} & +X_{11} & +1{,}4341 & =0\\
X_{10} & -2{,}81\,X_{11} & +X_{12} & +1{,}6518 & =0\\
X_{11} & -1{,}81\,X_{12} & & +1{,}8679 & =0
\end{array}\right\}. \tag{2.18}$$

Valorile necunoscutelor static nedeterminate sînt date în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

X_n	Valoarea	X_n	Valoarea	X_n	Valoarea
X_1	0,0582	X_5	0,5941	X_9	1,5070
X_2	0,1419	X_6	0,8015	X_{10}	1,7450
X_3	0,2568	X_7	1,0 64	X_{11}	1,9620
X_4	0,3987	X_8	1,2638	X_{12}	2,1160

Forţele exterioare fiind $F_i = 0{,}3339\ y_i$ (deci variabile pe înălţime) şi cunoscîndu-se variaţia săgeţilor în noduri (y_i), *momentele* static determinate se obţin prin recurenţă:

$$M_n^0 = M_{n-1} - h \sum_{i=1}^{i=n-1} F_i\,, \tag{2.19}$$

iar momentele static nedeterminate cu relaţia (2.8), (fig. 8).

Momentele finale (fig. 6, *b*) se obţin folosind relaţia (2.9).

Deplasările nodurilor pe orizontală s-au făcut asemenea exemplului *a*). Variaţia lor este dată în figura 9, A.

Relaţia (1.1) permite să se calculeze frecvenţa în prima aproximaţie

$$\omega_1^2 = \frac{y_0}{(y_1)_1} = \frac{0{,}2}{4{,}5928 \times 10^{-6}} = 4{,}32546 \times 10^4\,,$$

$$\omega_1 = 208{,}62\,, \tag{2.20}$$

deci

$$n_1 = 33{,}2109/\text{sec.} \tag{2.21}$$

Calculul în cea de a doua *aproximație* s-a condus identic exemplului *a*), bazîndu-ne pe variația deplasării nodurilor calculate mai sus. S-a obținut deplasarea nodului 1.

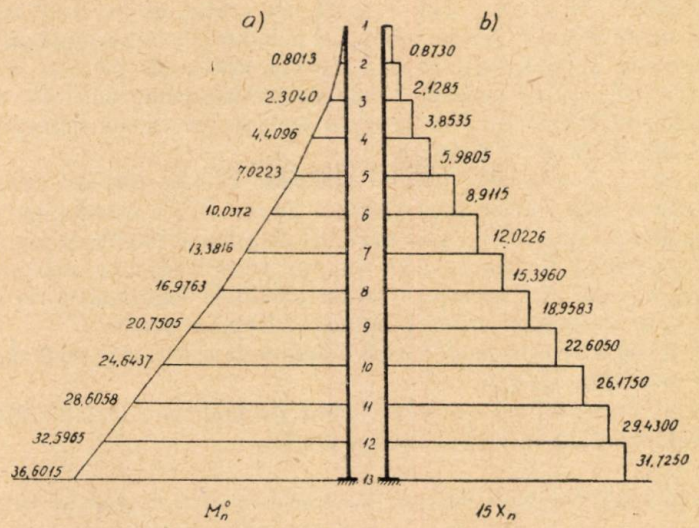
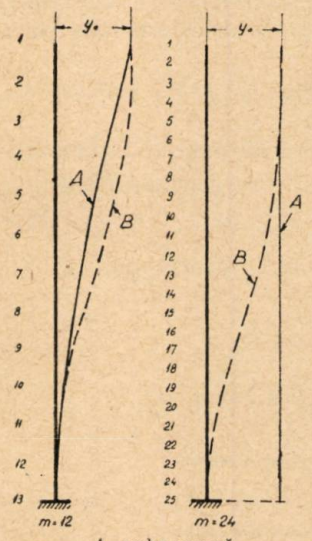


Fig. 8



——— *A*=curba propusă,
– – – *B*=curba reieșită din calcul.

Fig. 9

$$(y_1)_2 = 1{,}2408 \times 10^{-10}.$$

Frecvența

$$\omega_2 = 192{,}4 \qquad (2.22)$$

și

$$n_2 = 30{,}6214/\text{sec}. \qquad (2.23)$$

Între prima și a doua aproximație există o diferență de 8,4563 %.

Diagramele momentelor finale pe cadru din aproximația a doua în cele două cazuri vor avea aceeași alură ca diagramele reprezentate în figura 6.

Se mai observă că linia deformată a cadrului poate fi destul de exact asimilată cu o variație liniară de forma

$$y = \left(1 - \frac{x}{H}\right) y_0 .$$

Pentru același caz ($m=12$) dacă s-ar fi presupus variația săgeților $y=y_0$ (constant), expresia efortului static nedeterminat ar fi avut expresia

$$X_n = -\,y_0 \left\{2{,}398956\,(2{,}392)^{n-12} + 0{,}3298\,(2{,}392)^{-n} - 0{,}133568n^2 - 0{,}329797\right\}.$$

Urmînd același calcul se obține săgeata în nodul 1 $(y_1=6{,}5407\times10)^{-6}$.

Deci

$$\omega = 174{,}85, \qquad \text{iar} \qquad n=27{,}83/\text{sec}.$$

Considerînd valoarea (2.21), frecvența exactă, abaterea obținută este de 9,1 %. Se observă că este aproape indiferent de alegerea curbei inițiale. Convergența este foarte rapidă oricum am începe calculul.

3. INFLUENŢA FORŢELOR AXIALE ASUPRA FRECVENŢEI VIBRAŢIILOR PROPRII ALE CONSTRUCŢIILOR ÎNALTE

Studiile făcute de către A. I. Segal au arătat că în cazul construcţiilor cu un număr mare de etaje, forţele axiale au o influenţă importantă asupra deformaţiilor sistemelor şi în special asupra forţelor critice de pierdere a stabilităţii.

În lucrarea de faţă se pune problema determinării mărimii influenţei forţelor axiale asupra construcţiilor înalte. În acest scop se vor studia vibraţiile construcţiilor de mai sus, cu 12 şi 24 de etaje.

Calculul se va face analog cazului anterior. Efectul forţelor axiale se simte printr-o mărire a momentelor încovoietoare cu 1...3%; aceasta duce însă la o sporire a săgeţilor cu 10...30%. Din cauză că diagramele suplimentare de momente încovoietoare datorită forţelor axiale sînt cu mult mai mici decît cele cauzate de încovoiere, nu s-au mai suprapus aceste calcule, ci folosindu-se rezultatele obţinute anterior, se determină separat influenţa forţelor axiale.

În acest fel se izbuteşte să se obţină o eroare de calcul mai mică decît în cazul cînd s-ar fi suprapus efectele.

În calculul prezentat nu s-a ţinut seama de problema instabilităţii dinamice, care nu a fost abordată în cadrul acestei lucrări.

a) Influenţa forţelor axiale asupra construcţiei cu 24 de etaje ($m=24$)

Calculul se va face pe acelaşi sistem de bază, asupra căruia acţionează sarcinile exterioare şi valorile $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — eforturile static nedeterminate calculate la punctul 2.

Se va calcula creşterea efortului static nedeterminat ($\overline{X}n$) din mijlocul fiecărei rigle.

Sistemul de ecuaţii (2.1) rămîne acelaşi, cu deosebire de notaţiile necunoscutelor care de data aceasta devin $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_n$, expresia generală fiind

$$\delta_{n,n-1}\overline{X}_{n-1} + \delta_{n,n}\overline{X}_n + \delta_{n,n+1}\overline{X}_{n+1} + \overline{\delta}_{np} = 0. \qquad (3.1)$$

Coeficienţii acestui sistem sînt egali cu cei din expresia (2.2), cu excepţia lui $\overline{\delta}_{np}$ care va avea valoarea

$$\overline{\delta}_{np} = 2\frac{X_n h}{EA_s} - 10^{-6} = 12X_n \cdot 10^{-6} \cdot 1/E \qquad (3.2)$$

(valorile sînt cuprinse în tabloul nr. 3, bazat pe valorile din tabloul nr. 1).

Tabloul nr. 3

n	$E\cdot\overline{\delta}_{np}\cdot 10^6$	n	$E\cdot\overline{\delta}_{np}\cdot 10^6$	n	$E\cdot\overline{\delta}_{np}\cdot 10^6$
1	0,781224	9	26,756796	17	93,409152
2	1,935480	10	32,847312	18	104,593848
3	3,618780	11	39,579480	19	116,370949
4	5,896368	12	46,952268	20	128,672388
5	8,795496	13	54,965928	21	141,335880
6	12,327568	14	63,620061	22	153,972684
7	16,497336	15	72,913848	23	165,652500
8	21,307212	16	82,844616	24	174,183132

Rezolvînd sistemul se găsesc valorile din tabloul nr. 4.

Tabloul nr. 4

$\overline{X}_n$	Valoarea	$\overline{X}_n$	Valoarea	$\overline{X}_n$	Valoarea
$\overline{X}_1$	−0,000143	$\overline{X}_9$	−0,003400	$\overline{X}_{17}$	−0,011617
$\overline{X}_2$	−0,000326	$\overline{X}_{10}$	−0,004152	$\overline{X}_{18}$	−0,012987
$\overline{X}_3$	−0,000537	$\overline{X}_{11}$	−0,004983	$\overline{X}_{19}$	−0,014416
$\overline{X}_4$	−0,000822	$\overline{X}_{12}$	−0,005893	$\overline{X}_{20}$	−0,015888
$\overline{X}_5$	−0,901181	$\overline{X}_{13}$	−0,006882	$\overline{X}_{21}$	−0,017364
$\overline{X}_6$	−0,001618	$\overline{X}_{14}$	−0,007949	$\overline{X}_{22}$	−0,018774
$\overline{X}_7$	−0,002133	$\overline{X}_{15}$	−0,009095	$\overline{X}_{23}$	−0,019896
$\overline{X}_8$	−0,002727	$\overline{X}_{16}$	−0,010318	$\overline{X}_{24}$	−0,020614

Diagrama momentelor este asemănătoare cu cea din figura 10. Săgeata în nodul 1 a reieșit

$$[y_{1(N)}]_1 = 0{,}5268 \cdot 10^{-5} . \tag{3.3}$$

Bazați pe deplasarea numai din momente ($y_1 = 2{,}7669.10^{-5}$) rezultă o creștere de 19,038 % a săgeții,

$$[y_{1(M+N)}]_1 = 3{,}2937 \cdot 10^{-5} . \tag{3.4}$$

Frecvența

$$\omega_{1(M+N)} = 77{,}92 \tag{3.5}$$

și

$$n_{1(M+N)} = 12{,}4013/\text{sec}. \tag{3.6}$$

Față de expresia (2.11) rezultă o descreștere a frecvenței cu 9,12 %.

În aproximația a doua termenii liberi ai sistemului vor fi funcție de valorile X_n obținute la punctul 2 din a doua aproximație. Se obține

$$[y_{1(N)}]_2 = 0{,}64778 \cdot 10^{-9} . \tag{3.7}$$

Deplasarea nodului 1 de momente fiind $y_1 = 3{,}56990 \cdot 10^{-9}$ se constată o creștere de 18,15 %,

$$[y_{1(M+N)}]_2 = 4{,}21768 \cdot 10^{-9} , \tag{3.8}$$

deci

$$\omega_{2(M+N)} = 81, \tag{3.9}$$

$$n_{2(M+N)} = 12{,}89/\text{sec}. \tag{3.10}$$

Se observă o scădere de 8,71 % a frecvenței față de expresia (2.13).

b) Influenţa forţelor axiale pentru construcţia cu 12 etaje ($m=12$)

Calculul se conduce conform exemplului *a*). De data aceasta în expresia termenului liber intervin valorile X_n calculate în tabloul nr. 2.

În tabloul nr. 5 sînt date valorile termenului liber.

Tabloul nr. 5

n	$E\cdot\overline{\delta}_{np}$	n	$E\cdot\overline{\delta}_{np}$	n	$E\cdot\overline{\delta}_{np}$
1	−0,0000698	5	−0,0007129	9	−0,0018084
2	−0,0001703	6	−0,0009618	10	−0,0020940
3	−0,0003083	7	−0,0012317	11	−0,0023544
4	−0,0004784	8	−0,0015167	12	−0,0025392

Soluţiile sistemului sînt date în tabloul nr. 6.

Tabloul nr. 6

$\overline{X}_n$	Valoarea	$\overline{X}_n$	Valoarea	$\overline{X}_n$	Valoarea
$\overline{X}_1$	−0,000122	$\overline{X}_5$	−0,000918	$\overline{X}_9$	−0,002206
$\overline{X}_2$	−0,000273	$\overline{X}_6$	−0,001215	$\overline{X}_{10}$	−0,002519
$\overline{X}_3$	−0,000474	$\overline{X}_7$	−0,001537	$\overline{X}_{11}$	−0,002780
$\overline{X}_4$	−0,000615	$\overline{X}_8$	−0,001871	$\overline{X}_{12}$	−0,002938

Momentele încovoietoare se obţin cu relaţia (2.8) şi sînt reprezentate în figura 10.

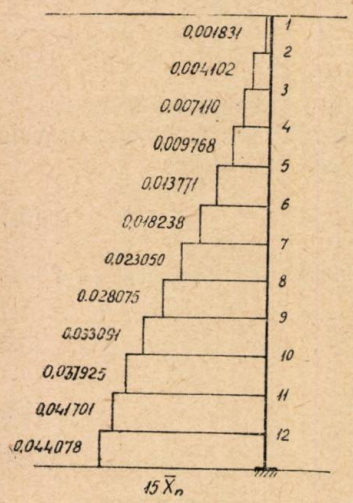


Fig. 10

Deplasarea nodului 1 va fi

$$[y_{1(N)}]_1 = 0{,}22278\cdot 10^{-6}\ ; \qquad (3.11)$$

din momente a rezultat $y_1 = 4{,}59280\cdot 10^{-6}$

$$[y_{1(M+N)}]_1 = 4{,}81558\cdot 10^{-6} \qquad (3.12)$$

(corespunde o creştere de 4,85 % a săgeţii).

Deci

$$\omega_{1(M+N)} = 203{,}79, \qquad (3.13)$$

$$n_{1(M+N)} = 32{,}4342/\text{sec}; \qquad (3.14)$$

faţă de valoarea (2.21) rezultă o descreştere a frecvenţei de 2,394 %.

În aproximaţia a doua s-a obţinut

$$[y_{1(N)}]_2 = 6{,}16\cdot 10^{-12}. \qquad (3.15)$$

Din momentele $y_1 = 124{,}08 \cdot 10^{-12}$

$$[y_{1(M+N)}]_2 = 130{,}24 \tag{3.16}$$

(deci o creștere de 4,97 %).

Frecvența:

$$\omega_{2(M+N)} = 187{,}8, \tag{3.17}$$

$$n_{2(M+N)} = 29{,}8893/\text{sec}. \tag{3.18}$$

Comparînd cu (2.23) observăm o scădere a frecvenței cu 2,449 %. Atît în cazul *a*), cît și în cazul *b*), în aproximația a doua momentele se determină cu ajutorul expresiei (2.8).

4. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A REZULTATELOR

S-a experimentat modelul cu 12 etaje ($m = 12$) confecționat din oțel obișnuit cu $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm² și o rezistență la rupere $\sigma r = 3\,700$ kg/cm². Prinderea riglelor de stîlpi s-a făcut prin sudură electrică. Modelul a fost executat și experimentat în laboratoarele I.M.A. (fig. 11 și fig. 12).

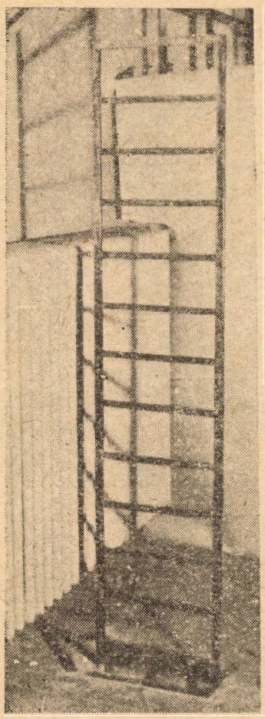


Fig. 11

În prima etapă a experiențelor s-au urmărit vibrațiile proprii. De aceea s-a aplicat asupra construcției un șoc, lăsînd apoi cadrul să vibreze.

Pentru a împiedica vibrațiile pe direcția perpendiculară cadrului, modelul a fost ancorat cu ajutorul unor fire metalice (primele două experiențe). În cazul celei de a treia experiențe s-au suprimat legăturile transversale, de astă dată urmărindu-se ca modelului să i se aplice un șoc perfect centric și de intensitate ceva mai mică.

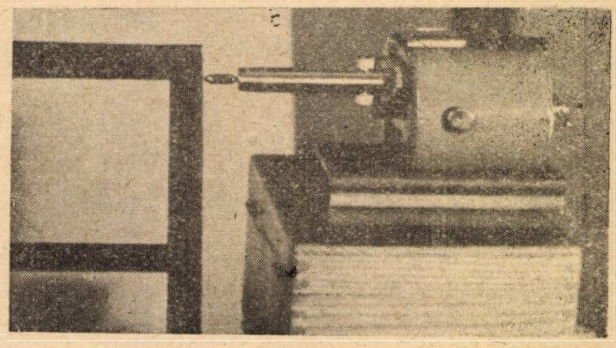


Fig. 12

Prinderea modelului de fundație (fig. 13) a fost executată cu ajutorul a șase buloane de scelment.

Vibraţiile au fost înregistrate cu ajutorul unui aparat tip BP1 (fig. 12). Vibrogramele obţinute sînt de tipul celei din figura 14.

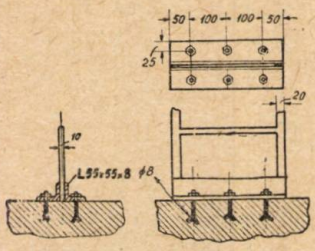


Fig. 13

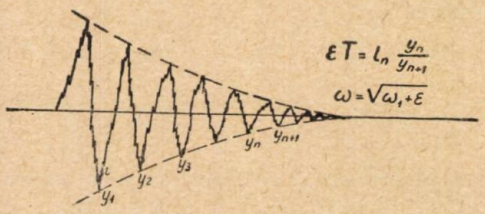


Fig. 14

Experienţa I-a a fost executată după 3 zile de la cimentarea buloanelor de scelment; din această cauză nu s-a putut realiza o perfectă încastrare a cadrului.

Ţinînd seama de amortizare a rezultat

$$n_{\mathrm{I}} = 25{,}1/\mathrm{sec}. \tag{4.1}$$

Diferenţa între calcul şi experienţă a fost atribuită în cea mai mare măsură lipsei unei încastrări perfecte a cadrului.

Experienţa a II-a s-a făcut după cimentarea buloanelor de scelment (12 zile). Printr-o strîngere puternică a buloanelor s-a putut realiza o bună încastrare a modelului.

Considerînd influenţa amortizării a reieşit frecvenţa

$$n_{\mathrm{II}} = 27{,}68/\mathrm{sec}. \tag{4.2}$$

Experienţa a III-a s-a efectuat în aceeaşi zi cu a doua, de data aceasta suprimîndu-se legăturile transversale. Şi în acest caz s-a luat în considerare factorul de amortizare (ε)

$$n_{\mathrm{III}} = 28{,}14/\mathrm{sec}. \tag{4.3}$$

Diferenţa dintre valoarea calculată (3.18) şi cea rezultată experimental (4.3) este de 6,05 %.

Această diferenţă se poate explica prin:

— Influenţa încastrării cadrului, care nu a putut fi perfectă.

— Influenţa imperfectei rigidizări la noduri (datorită sudurii).

— Nu s-a dus mai departe aproximaţia.

— Pierderi de energie datorite vibraţiilor legăturilor transversale.

Trebuie remarcată rapida amortizare a vibraţiilor, vibrograful neputînd înregistra decît 6...8 perioade.

În cele trei experienţe coeficientul de amortizare ε a variat între 11...14.

Rezultatele fiecărei experienţe constituie o medie a 25...30 vibrograme înregistrate.

5. CONCLUZII

— Metoda de calcul propusă ne dă posibilitatea să calculăm relativ simplu frecvența proprie a vibrațiilor construcțiilor cu mai multe etaje, avînd o singură deschidere. În general sînt suficiente două maximum trei aproximații.

— În cazul construcțiilor cu un număr de etaje < 12, influența forțelor axiale asupra frecvenței proprii calculate poate fi neglijată. Eroarea făcută nu este mai mare de 2...3 %.

— În cazul construcțiilor cu un număr mare de etaje, trebuie să ținem seama și de influența forțelor axiale la calculul frecvenței proprii, în caz contrar putînd rezulta erori destul de importante.

— Ținînd seama că deplasările nodurilor cadrului se pot aproxima cu o variație liniară de forma $y = \left(1 - \frac{x}{H}\right) y_0$, se poate propune o diagramă a forțelor de inerție, de formă triunghiulară.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ МНОГОЭТАЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе рассматривается влияние осевых усилий на частоту собственных колебаний многоэтажных однопролетных кадров (рис. 1).

Для разрешения настоящего вопроса применен метод Вианелло-Завриева. Статический расчет произведен путем уравнений с конечными разностями.

В результате исследованной работы, выявилась необходимость учитывать осевые усилия для определения частоты собственных колебаний у конструкций, имеющих свыше 12 этажей.

При конструкциях ниже 12 этажей, осевые усилия могут не учитываться вследствие незначительного их влияния (до 2%).

В рамках настоящего вопроса были произведены проверочные экспериментальные работы в лаборатории Института прикладной механики, подтвердившие теоретические расчеты.

CERTAINS PROBLÈMES DES VIBRATIONS PROPRES DANS LE CAS DES CONSTRUCTIONS À PLUSIEURS ÉTAGES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étudie l'influence des efforts axiaux sur la fréquence des vibrations propres des cadres à plusieurs étages, ayant une seule portée (fig. 1).

Pour résoudre ce problème, on a appliqué la méthode de Vianello-Zavriev. Le calcul statique a été effectué à l'aide des équations aux différences finies.

Cette étude fait ressortir la nécessité de tenir compte des efforts axiaux à la détermination de la fréquence des vibrations propres dans le cas des constructions de plus de 12 étages.

Dans le cas des constructions de moins de 12 étages, les efforts axiaux peuvent être négligés dans le calcul, leur influence étant minime (environ 2 %).

En marge de ce problème, des vérifications expérimentales, qui ont confirmé les calculs théoriques, ont été effectuées aux laboratoires I.M.A. (Institut de Mécanique Appliquée).

BIBLIOGRAFIE

1. K. S. Zavriev, *Dinamika soorujenii*. Trausjeldorizdat, Moscova, 1946.
2. A. I. Segal, *Vîsotnîe zdania*. Moscova, 1949.
3. N. K. Snitko, *Metodî nasciota soorujenii na vibraţii udara*. Leningrad, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

VIBRAŢII

ANALOGIILE ELECTRICE ALE VIBRAŢIILOR MECANICE

DE

E. PROCOPOVICI şi C. TANASICIUC

1. Introducere

Analogiile electrice constituie o metodă de cercetare experimentală a fenomenelor. Problema constă în alcătuirea unor circuite electrice a căror lege de funcţionare este identică cu legea sistemului fizic pe care dorim să-l modelăm. În felul acesta se poate studia circuitul electric (modelul), trăgîndu-se concluziile pentru fenomenul modelat:

a) Avantajele principale ale analogiilor electrice sînt următoarele:

1) Posibilitatea de a modela şi studia sisteme fizice, pentru care ecuaţiile diferenţiale sînt prea complexe şi numeroase (sisteme de ecuaţii cu un număr foarte mare de necunoscute, de exemplu structura unui avion).

2) Posibilitatea de a modela sisteme fizice cu structură complicată, din domenii diferite (mecanic, hidraulic, termic) cu elemente electrice simple (capacităţi, inductanţe, rezistenţe etc.). Aceasta este un mare avantaj în sensul că aceste materiale sînt recuperabile integral, ceea ce nu este cazul modelelor bazate pe similitudine.

3) Timpul necesar alcătuirii analogiilor electrice este relativ scurt.

4) Viteza de lucru este extrem de mare, rezultatele obţinîndu-se cu o mare economie de timp.

5) Datorită vitezei mari de lucru şi posibilităţii de a modifica uşor valorile diferiţilor parametri se pot studia soluţiile în mai multe variante putîndu-se face determinări de optimum.

6) Precizia de lucru poate fi ridicată la un grad înalt deoarece mărimile electrice se pot măsura cu mare precizie.

7) În calculele şi studiile experimentale se poate folosi experienţa acumulată în domeniul electricităţii.

b) Dintre dezavantajele acestei metode vom cita:

1) Necesitatea unui aparataj de măsură şi lucru destul de complex.

2) Necesitatea de cadre cu calificare superioară.

3) Analogiile electrice nu modelează întru totul realitatea, ci o schemă simplificată a fenomenului real.

Metoda analogiilor electrice este — după cum se va vedea — ieftină şi eficace ceea ce o face să fie din ce în ce mai răspîndită în institutele de proiectări şi cerce-

tări ştiinţifice. În această lucrare ne vom mărgini la cercetarea analogiilor electrice ale vibraţiilor mecanice bazate pe dipoli şi cvadripoli pasivi.

2. Sisteme de analogii electrice bazate pe dipoli şi cvadripoli pasivi

a. *Generalităţi.* O caracteristică importantă a reţelelor de dipoli şi cvadripoli pasivi este faptul că acestea reprezintă nişte parametri concentraţi ai reţelei, în raport cu coordonatele spaţiale. Sistemele fizice sînt însă sisteme cu parametri distribuiţi. Va trebui să schematizăm aceste sisteme, să le considerăm cu parametri concentraţi, pentru a le putea modela. De modul în care se face această echivalare a sistemului continuu cu un sistem discret, depinde eroarea soluţiei ce se obţine pe analogul electric. Matematic aceasta revine la a înlocui ecuaţiile diferenţiale, care descriu fenomenul, cu un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite care să le aproximeze. Aprecierea erorii care apare în acest caz este o problemă de matematică şi depinde de caracterul specific al obiectului cercetării.

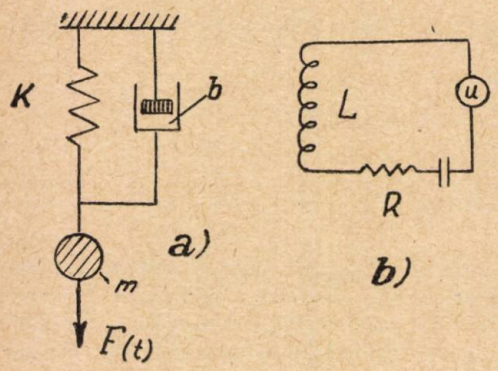


Fig. 1

b. *Stabilirea sistemului de analogii.* Stabilirea diferitelor sisteme de analogii, prin care se pun în corespondenţă parametrii sistemului fizic cu parametrii modelului electric, se face pe baza corespondenţei legii care descrie cele două fenomene. În plus, pentru ca un anumit fenomen să fie analog altuia trebuie ca pe lîngă ecuaţiile respective, sistemele să aibă şi condiţii la limită corespunzătoare.

În cele de mai jos ne vom ocupa de analogiile electrice ale sistemelor mecanice.

Să considerăm legea de mişcare a unui oscilator mecanic liniar (fig. 1, *a*))

$$F = mpw + bw + \frac{k}{p} w, \tag{1}$$

în care s-a notat cu F, forţa exterioară care atacă oscilatorul, m, masa punctului oscilant, b, constanta de frecare, k, constanta elastică, w, viteza punctului, p, operator liniar $\frac{d}{dt}$.

Ecuaţia (1) se poate scrie

$$F = Iw, \tag{2}$$

în care I este un operator liniar

$$I = mp + b + \frac{k}{p}.$$

Pentru un sistem, ecuaţia (1) se înlocuieşte prin ecuaţia matricială

$$\| F \| = \| I \| \cdot \| w \| \tag{3}$$

sau

$$\| w \| = \| I \|^{-1} \cdot \| F \|, \tag{4}$$

în care $\|F\|$ și $\|w\|$ sînt matrice unidimensionale (vectori) cu o singură coloană sau linie, iar $\|I\|$ este o matrice pătrată (tensor).

Considerînd un circuit oscilant, elementar (fig. 1, *b*)) și aplicînd legea lui Kirchhoff pentru tensiuni, se obține

$$u = Lp \cdot i + R \cdot i + \frac{1}{Cp} i, \tag{5}$$

în care s-a notat cu u, tensiunea; L, inductanța, R, rezistența, C, capacitatea, i, curentul.

Relația (5) se mai poate scrie și sub forma

$$u = Z \cdot i, \tag{6}$$

în care

$$Z = Lp + R + \frac{1}{Cp} \cdot$$

Ecuația (6) este legea de mișcare a circuitului.

Pentru un sistem cu circuite, ecuația corespunzătoare se scrie matricial sub forma

$$\|u\| = \|Z\| \cdot \|i\| \tag{7}$$

sau

$$\|i\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|u\|. \tag{8}$$

Relațiile (3), (4) și (7), (8) sînt relații asemănătoare. Se pot stabili deci două moduri de corespondență biunivocă între ele și deci două sisteme de analogii electromecanice (din cele patru combinații posibile două sînt echivalente) făcînd să corespundă mărimile electrice celor mecanice, ca mai jos:

1) $\|i\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|u\|$ $\qquad$ $\|F\| = \|F\| \cdot \|w\|$

sau

$\|u\| = \|Z\| \cdot \|i\|$ $\qquad$ $\|w\| = \|I\|^{-1} \cdot \|F\|$.

În acest caz forțele ar fi modelate de curenți iar vitezele ar corespunde tensiunilor.

2) $\|u\| = \|Z\| \cdot \|i\|$ $\qquad$ $\|F\| = \|I\| \cdot \|w\|$

sau

$\|i\| = \|Z\|^{-1} \cdot \|u\|$ $\qquad$ $\|w\| = \|I\|^{-1} \cdot \|F\|$.

În acest caz forțele ar corespunde tensiunilor iar vitezele ar fi modelate de curenți.

Ecuațiile (3), (4) și (7), (8) pot fi privite ca un tip de legătură mai generală

$$\|e\| = \|j\| \cdot \|f\|, \tag{9}$$

în care $\|e\|$ este matricea eforturilor generalizate, $\|j\|$ este matricea impedanței generalizate, $\|f\|$ este matricea fluxului generalizat.

Impedanța generalizată poate avea următoarele două forme:

1° Pentru primul sistem de analogii în care

$$\|Z\| \text{ corespunde cu } \|I\|$$

a) forma electrică — *b)* forma mecanică

$$Z_{ij} = L_{ij}\,p + R_{ij} + \frac{1}{C_{ij}\,p} \qquad I_{ij} = M_{ij}\,p + b_{ij} + \frac{k_{ij}}{p}\,. \tag{10}$$

2° Pentru al doilea sistem de analogii în care lucrăm cu admitanţe

$$\|Y\| = \|Z\|^{-1} \text{ corespunde cu } \|I\|$$

c) fo ma electrică — *d)* forma mecanică

$$Y_{ij} = C_{ij}\,p + \frac{1}{R_{ij}} + \frac{1}{L_{ij}\,p} \qquad I_{ij} = M_{ij}\,p + b_{ij} + \frac{k_{ij}}{p}\,. \tag{11}$$

De aici se poate vedea corespondenţa biunivocă a parametrilor în cele două cazuri de analogii rezumate în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Mărimi mecanice	Mărimi electrice	
	Sistem de analogii (1)	Sistem de analogii (2)
Forţa F	u	i
Viteza w	i	u
Deplasarea $\frac{1}{p}\,w$	$\frac{1}{p}\,i$	$\frac{1}{p}\,u$
Acceleraţia pw	$p.i$	$p.u$
Impedanţa $\|I\|$	$\|Z\|$	$\|Z\|^{-1}$
Masa m	L	C
Const. elastică k	$1/C$	$1/L$
Factorul de frecare b	R	$1/R$

Din tabloul nr. 1 rezultă imediat criteriile după care se poate alege sistemul de analogii şi anume:

1) Deoarece tensiunile sînt mărimile electrice care se măsoară cel mai uşor (mai uşor decît curenţii), vom alege analogia astfel încît mărimile care ne interesează în special (forţe sau deplasări), să fie modelate prin tensiuni.

2) Vom avea în vedere de asemenea ca inductanţele ce apar să nu aibă valori prea mari, inductanţele fiind mai costisitoare decît celelalte elemente ale circuitelor electrice.

Energia sistemului ia trei forme diferite (conform expresiei legii de mişcare). Pentru fiecare din acestea este caracteristic un anumit tip de parametri după cum se vede mai jos *):

	Sistem electric	Sistem mecanic
Energia potenţială	$\frac{1}{2}\sum\sum \frac{1}{C_{ij}\,p^2}\,i_i\,i_j$	$\frac{1}{2}\sum\sum \frac{k_{ij}}{p^2}\,w_i\,w_j\,.$ (12)

*) S-a considerat sistemul 1 de analogii.

Energia de mișcare $\frac{1}{2}\sum\sum L_{ij}\, i_i\, i_j \qquad \frac{1}{2}\sum\sum m_{ij}\, w_i\, w_j$. (13)

Energia disipată $\frac{1}{2}\sum\sum R_{ii}\, i_i\, i_j \qquad \frac{1}{2}\sum\sum b_{ij}\, w_i\, w_j$. (14)

Pentru o construcție unitară a sistemelor de analogii este necesar să introducem noțiunea importantă de «cvadripol». De aceasta ne vom folosi ca de un element de bază la alcătuirea analogiilor (fig. 2).

Un efort generalizat e_1 stabilește prin impedanța de intrare j_1 a cvadripolului un flux generalizat f_1. La ieșirea din cvadripol se întîmplă același lucru.

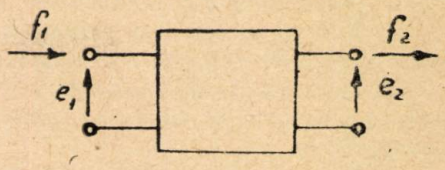


Fig. 2

Putem deci scrie legătura dintre e și f pentru un caz mai general

$$\|e\| = \|j\| \cdot \|f\| \tag{15}$$

sau

$$\begin{cases} e_1 = j_{11} f_1 + j_{12} f_2 \\ e_2 = j_{21} f_1 + j_{22} f_2 . \end{cases} \tag{16}$$

Relațiile (16) se mai pot scrie și sub forma, care exprimă mărimile de intrare în funcție de cele de ieșire.

$$\begin{cases} e_1 = k_{11} e_2 + k_{12} f_2 \\ f_1 = k_{21} e_2 + k_{22} f_2 \end{cases} \tag{17}$$

sau matricial

$$\|S_1\| = \|k\| \cdot \|S_2\|, \tag{18}$$

în care

$$\|S_1\| = \left\| \begin{matrix} e_1 \\ f_1 \end{matrix} \right\| \text{ și } \|S_2\| = \|e_2 f_2\| .$$

În această formă, legarea în serie a cvadripolilor în scopul construirii unui

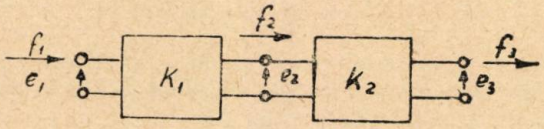


Fig. 3

ansamblu (fig. 3) se face foarte simplu din punct de vedere matematic, de exemplu:

cvadripolul k_1: $\|S_1\| = \|k_1\| \cdot \|S_2\|$
cvadripolul k_2: $\|S_2\| = \|k_2\| \cdot \|S_3\|$ (19)

sau ansamblul k_1, k_2

$$\|S_1\| = \|k_1\| \cdot \|k_2\| \cdot \|S_3\| . \tag{20}$$

c. *Problema scărilor.* Mărimile electrice pe care le măsurăm pe analogul electric al unui fenomen pot fi numeric egale cu acelea ale fenomenului sau multiplicate cu anumiţi factori. Necesitatea de a introduce factori de scară apare din următoarele motive:

1) Construirea unui model conform, adică în care toate mărimile electrice au aceeaşi valoare numerică cu mărimile modelate. Aceasta este adesea împiedicată de dificultăţi de ordin tehnic:

— Necesitatea unor inductanţe cu valori neobişnuite etc.;

— Modelul cu astfel de parametri lucrează în condiţii în care se vădesc fenomene parazitare nedorite (exemplu: cuplaje mutuale, efecte peliculare etc.).

2) Posibilităţile de măsurare şi înregistrare care impun uneori ca mărimile fizice determinate să fie de un anumit ordin, pentru ca precizia obţinută să fie satisfăcătoare.

3) Modelul electric fiind analog « prototipului », este analog tuturor sistemelor echivalente din punct de vedere al similitudinii cu acesta.

Pentru a stabili modul în care să se facă corect modificările scărilor, considerăm ecuaţiile (3) şi (7) în care i şi w sînt funcţii de timp

$$i = i(\tilde{\sigma}),$$
$$w = w(t).$$

S-a notat cu $\tilde{\sigma}$ timpul în fenomenul electric, iar cu t timpul în fenomenul mecanic.

Fixăm următoarele trei ipoteze, care arată în ce raport se găsesc cele două sisteme:

1) Între timpurile din cele două sisteme există relaţia liniară

$$\tilde{\sigma} = t_0 + C_t \cdot t; \tag{21}$$

2) Energiile celor două sisteme sînt proporţionale între ele

$$W = C_E^2 \cdot E, \tag{22}$$

în care W este energia sistemului electric iar E, energia sistemului mecanic;

3) Variabilele sistemului electric se transformă în variabilele sistemului mecanic cu ajutorul relaţiei

$$\| i \| = \| C_w \| \cdot \| w \|, \tag{23}$$

în care $\| C_w \|$ este o matrice de transformare. În cazul analogiilor, matricea $\| C_w \|$ conţine numai elemente diagonale, stabilind astfel o corespondenţă biunivocă între componentele matricelor $\| i \|$ şi $\| w \|$.

În baza relaţiilor (3), (7), (21), (22) şi (23) se poate calcula uşor relaţia de transformare pentru impedanţe

$$\| I \| = \frac{C_t}{C_E^2} \| C_w \|^2 \cdot \| Z \| \tag{24}$$

şi relaţia de transformare a funcţiei

$$\| F \| = \frac{C_t}{C_E^2} \| C_w \| \cdot \| u \|, \tag{25}$$

în care

$$\| C_w \|; \quad \frac{C_t}{C_E^2} \| C_w \|^2; \quad \frac{C_t}{C_E^2} \| C_w \| \tag{26}$$

sînt respectiv matricele de transformare a variabilei impedanței și funcției.

Relațiile (23), (24) și (25) se pot pune sub formă adimensională, dacă se alege pentru (23) forma

$$\| i \| = \frac{C_E}{C_t} \| C'_w \| \cdot \| w \|. \tag{27}$$

Se obține atunci

$$\| I \| = \frac{1}{C_t} \| C'_w \|^2 \cdot \| Z \|, \tag{28}$$

$$\| F \| = \frac{1}{C_E} \| C'_w \| \cdot \| u \|, \tag{29}$$

care reprezintă, după cum am mai arătat, relațiile matriciale de transformare (în terminologia adoptată) a fluxului, impedanței și efortului generalizat, între diferite sisteme. Precizăm încă o dată că relațiile (27), (28) și (29) au fost deduse avînd în vedere forma diagonală a matricei de transformare, formă proprie de analogii între două sisteme.

Pentru al doilea sistem de analogii se pot deduce în mod asemănător relațiile de transformare

$$\| u \| = \| C_w \| \cdot \| w \|, \tag{30}$$

$$\| Z \|^{-1} = \frac{C_E^2}{C_t} \| C_w \|^{-2} \cdot \| I \|, \tag{31}$$

$$\| i \| = \frac{C_E^2}{C_t} \| C_w \|^{-1} \cdot \| F \|. \tag{32}$$

Înlocuind $C_w = \frac{C_E}{C_t} C'_w$, obținem

$$\| Z \|^{-1} = C_t \cdot \| C'_w \|^{-2} \cdot \| I \|, \tag{33}$$

$$\| u \| = \frac{C_E}{C_t} \| C'_w \| \cdot \| w \|, \tag{34}$$

$$\| i \| = C_E \cdot \| C'_w \|^{-1} \cdot \| F \|. \tag{35}$$

Avînd în vedere modul de transformare a admitanțelor, corespunzător sistemului 2 de analogii

$$\| Z \|^{-1} = C_t \cdot \| C_w \|^{-1} \cdot \| I \|,$$

se pot găsi formulele de transformare pentru elasticitate, masă etc. în echivalentele lor electrice.

Din ecuaţia de mişcare, pusă sub forma

$$\| F \| = \| M \| \cdot \| pw \| \quad \text{în care} \quad p = \frac{d}{dt}, \tag{36}$$

rezultă că admitanţa masei va fi

$$\| I \| = \| M \| p, \tag{37}$$

iar admitanţa unei capacităţi care corespunde masei în sistemul 2 de analogii este

$$\| Z \| = \| C \| \cdot \| p' \|,$$

în care

$$p' = \frac{d}{d\tau}. \tag{38}$$

Folosind ecuaţiile de mai sus, şi avînd în vedere ecuaţia (21), se obţine

$$\| C \| = C_t \| C'_w \|^{-2} \cdot \| M \|. \tag{39}$$

La fel se pot găsi formulele pentru inductanţe şi pentru rezistenţe

$$\left\| \frac{1}{L} \right\| = \| C'_w \|^{-2} \| k \|, \tag{40}$$

$$\left\| \frac{1}{R} \right\| = C_t \| C'_w \|^{-2} \cdot \| b \|. \tag{41}$$

3. Analogia electrică a oscilaţiilor torsionale ale barelor

În cele ce urmează se descrie modul în care se stabileşte forma circuitului care modelează barele din punct de vedere al oscilaţiilor torsionale şi longitudinale descrise de ecuaţia

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

a. *Deducerea analogiei*. Fie în acest scop o bară cilindrică (fig. 4) care are următorii parametri distribuiţi:

1) O rigiditate distribuită $K = G J_p$;

2) Un moment de inerţie distribuit $J = J_p \cdot \rho$.

Se consideră un element finit (fig. 5) însă foarte mic, de lungime Δx, definit de secţiunile transversale pe bară n şi $n+1$, pentru care rigiditatea şi momentul de inerţie au respectiv valorile

$$\frac{GJ_p}{\Delta x}, \quad \rho \cdot J_p \cdot \Delta x.$$

Elementul de bară este în echilibru sub acţiunea momentelor de răsucire M_n şi M_{n+1}, cărora le corespund vitezele de deformaţie unghiulare ω_n şi ω_{n+1}. Între M şi ω există relaţii de tipul

$$\| e \| = \| j \| \cdot \| f \|,$$

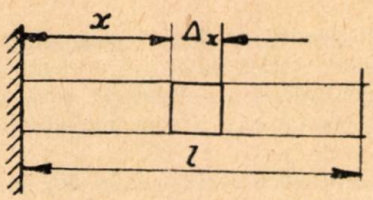


Fig. 4

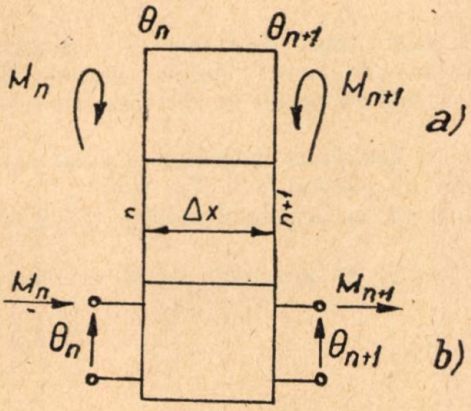


Fig. 5

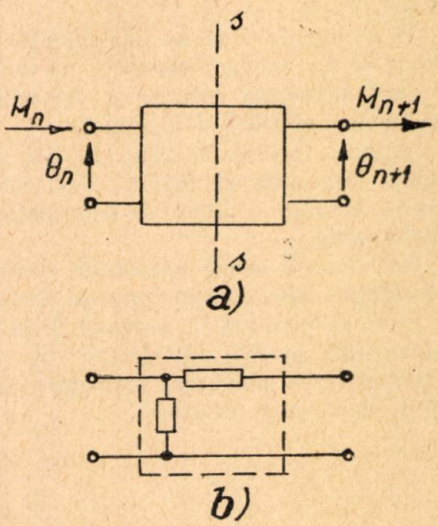


Fig. 6

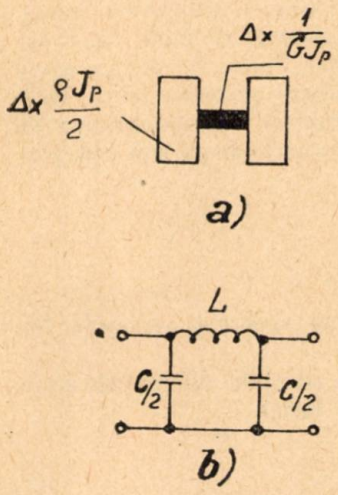


Fig. 7

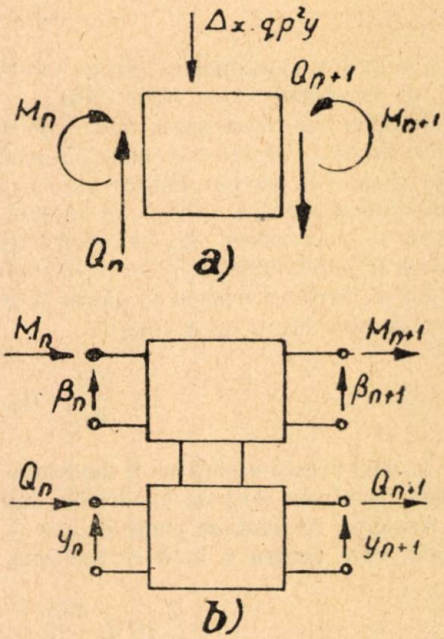


Fig. 8

astfel că momentele pot fi privite ca fluxuri generalizate, iar vitezele de deformaţie, ca eforturi generalizate. Astfel, elementul de bară se poate considera ca un cvadripol, în care efortul generalizat ω_n stabileşte, prin impedanţa de intrare j_n, fluxul generalizat M_n, iar efortul ω_{n+1}, prin impedanţa de ieşire J_{n+1}, fluxul generalizat M_{n+1}.

Să analizăm structura internă a cvadripolului din punct de vedere funcţional. Pentru aceasta facem o secţiune $s - s$ prin cvadripol şi eliminăm una din jumătăţi (fig. 6, *a*)).

Momentul de torsiune M_n exterior cvadripolului mecanic este echilibrat în interior de un moment elastic şi un moment dinamic.

Deci momentul exterior se descompune, în interiorul cvadripolului, în două componente, elastică şi dinamică.

Acestea variază în timp în aşa fel încît atunci cînd una este maximă cealaltă este nulă şi invers. Momentul dinamic datorit inerţiei depinde de valoarea absolută a vitezei de deformaţie, pe cînd cel elastic de diferenţa vitezelor de deformaţie.

Din această cauză elementul electric ce modelează momentul dinamic este în derivaţie, adică uneşte punctul respectiv cu punctul zero (fig. 6, *b*)).

Dacă se lucrează în sistemul 2 de analogii, cvadripolului mecanic (fig. 7, *a*)) îi corespunde cvadripolul electric fig. 7, *b*)).

Capacităţile modelează momentele de inerţie, iar inductanţa modelează elasticitatea, după cum urmează

$$C = \frac{\rho J_p \cdot \Delta x}{2}, \qquad \frac{1}{L} = \frac{G J_p}{\Delta x}. \tag{42}$$

Cuplînd m cvadripoli se obţine modelul unei bare de lungime $m\,\Delta x$ printr-un lanţ de cvadripoli (vezi (19), (20)).

În felul acesta se poate destul de uşor stabili structura circuitelor, care vor modela diferite sisteme mecanice. Să analizăm, spre exemplu, în mod sumar modelarea încovoierii barelor. Pentru aceasta să izolăm un element de bară fig. 8, *a*)). Examinînd elementul, se vede că acesta este un cvadripol dublu. La intrare avem momentul încovoietor M_n şi deformaţia corespunzătoare acestuia, adică înclinarea β a barei precum şi forţa tăietoare Q cu deformaţia corespunzătoare ei, săgeata y. Acelea şi mărimi le găsim la ieşire. Cei doi cvadripoli nu sînt independenţi, ci sînt legaţi prin relaţiile

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \beta.$$

În felul acesta o bară va fi modelată, din punctul de vedere al oscilaţiilor flexionale, printr-un lanţ de cvadripoli dubli fig. 8, *b*)).

Analogia torsiunii se poate deduce şi pornind de la ecuaţiile diferenţiale scrise explicit, care pentru o bară ce oscilează torsional are forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \tag{43}$$

care scrisă în diferențe finite pentru n puncte ia forma

$$\frac{1}{\Delta x}\left[(GJ_p)_{i+\frac{1}{2}}(\varphi_{i+1}-\varphi_i)-(GJ_p)_{i-\frac{1}{2}}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\right]= \\ =\Delta x(\rho J_p)_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ \text{pentru } i=1,2,\ldots,n. \tag{44}$$

Dacă se consideră această ecuație ca o ecuație Kirchhoff pentru curenți, se poate găsi ușor circuitul din figura 9 în care

$$C=\Delta x\cdot\rho\cdot J_p\,. \\ \frac{1}{L}=\frac{GJ_p}{\Delta x}\,. \tag{45}$$

Aceasta ar corespunde elementului de bară pentru care este scrisă ecuația (43) în diferențe finite. Dificultatea în această metodă este că odată stabilite ecuațiile în diferențe finite, nu este întotdeauna ușor să găsim circuitul corespunzător. Aceasta ar depinde în mare măsură și de forma în care sînt scrise ecuațiile. Metoda expusă mai sus, în care se modelează direct elementul diferențial, permite determinarea imediată a tipului de circuit și a caracteristicilor sale. Combinarea acestor două metode constituie calea justă pentru stabilirea analogiei electrice a unui fenomen.

b. *Problema condițiilor la limită.* În această problemă se vor folosi aceleași puncte de vedere ca și la deducerea analogiei, anume se vor analiza elementele marginale ale sistemului modelat.

Odată stabilite particularitățile acestora ele se transpun pe elementele corespunzătoare ale circuitului electric model.

La modelarea unui sistem mecanic elastic vom cerceta deplasările și rotațiile (eforturile generalizate) ale elementelor marginale.

Deoarece pentru sistemul 2 de analogii toate tipurile de deplasări și rotații sînt modelate prin tensiuni, va trebui ca valorile tensiunilor de intrare ale cvadripolilor elementului electric marginal să corespundă cu valorile deplasărilor și rotațiilor elementului mecanic modelat. Tot așa de bine s-ar fi putut cerceta condițiile la limi ă din punctul de vedere al forțelor (fluxului generalizat).

Să analizăm cazul unei console supuse la oscilații torsionale forțate, date de un cuplu periodic aplicat la capătul liber.

În încastrare (fig. 10, *a* și *b*)), deformația unghiulară fiind permanent nulă, va trebui deci ca tensiunea u_0 de la intrarea cvadripolului să fie nulă. Pentru aceasta vom scurtcircuita intrarea cvadripolului cu un conductor prin care va curge curentul I, care va corespunde momentului de încastrare M_0.

Capătul liber are deformații și viteze de deformații corespunzînd elasticității întregului sistem și amplitudinii momentului de torsiune excitator. Astfel, la bascule cvadripolului se conectează un oscilator care debitează un curent ce modelează momentul excitator. Tensiunea de ieșire a oscilatorului corespunde vitezei de deformație la capătul barei.

Să arătăm sumar cum se pun condițiile la limită la modelarea grinzilor supuse la încovoiere.

S-a arătat că modelul electric al unei bare supuse la încovoiere este format dintr-un lanț de elemente compuse fiecare din doi cvadripoli. Capetele unei astfel de bare pot fi încastrate, articulate și libere.

În cazul capătului încastrat condițiile sînt ca în figurile 11 și 12.

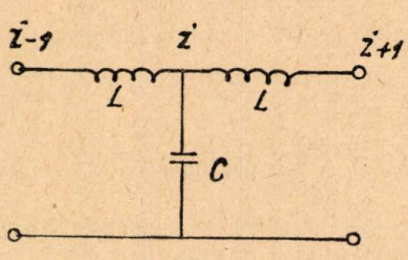


Fig. 9

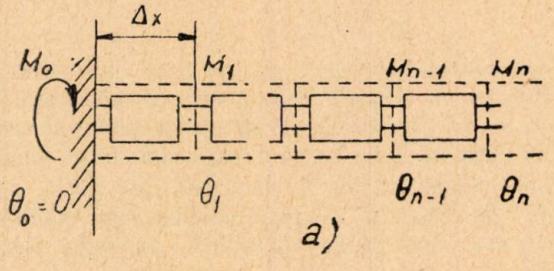


Fig. 10

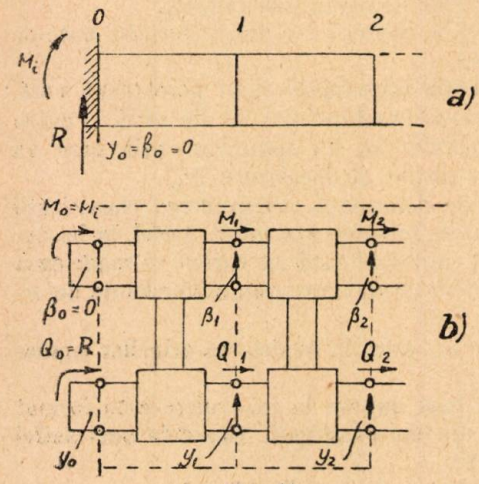


Fig. 11

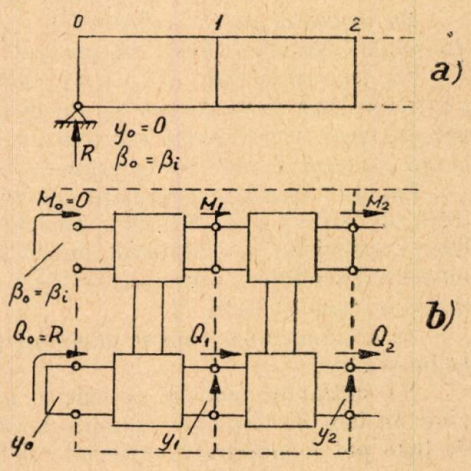


Fig. 12

Săgeata și înclinarea sînt nule, iar momentul încovoietor M_0 și forța tăietoare sînt respectiv egale cu cele din încastrare (fig. 11, *a* și *b*)).

Dacă deformațiile sînt modelate de tensiuni, tensiunile la intrarea celor doi cvadripoli ai primului element trebuie să fie nule. În acest scop, scurtcircuităm barele de intrare cu doi conductori, prin care vor curge curenți corespunzători momentului și forței tăietoare din încastrare.

În cazul capătului articulat, condițiile constă în aceea că momentul și săgeata trebuie să fie nule.

Astfel intrarea cvadripolului, în care curentul corespunde momentului încovoietor, va rămîne deschisă, curentul fiind nul.

Intrarea cvadripolului, în care tensiunea corespunde săgeții, se va scurtcircuita, iar curentul din conductorul de scurtcircuitare corespunde forței tăietoare egale cu reacțiunea din articulație.

În problema punerii condițiilor la limită apar din nou avantajele punctelor de vedere adaptate la deducerea analogiilor, în care se modelează direct elementul diferențial.

În ceea ce privește împărțirea corpului pe care îl modelăm în elemente finite, acestea nu trebuie să fie neapărat egale între ele. Dacă se cere o precizie mai mare într-o anumită zonă, se poate practica acolo o divizare în elemente mai mici și deci mai numeroase, obținîndu-se astfel o aproximație mai bună.

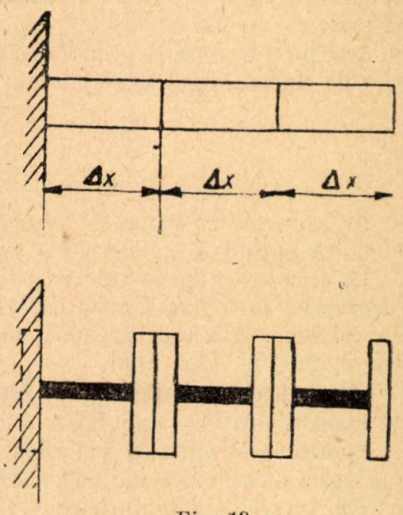


Fig. 13

În orice caz în această aproximație este necesar să se țină seama de condiția ca numărul de elemente ales să fie suficient de mare pentru ca eroarea datorită transformării sistemului continuu în unul discret să nu depășească numerele limită stabilite dinainte.

4. Descrierea experienței

Se modelează o bară cilindrică (fig. 13) încastrată la un capăt cu următoarele caracteristici:

— lungimea	C	$= 30$ cm;
— diametrul	d	$= 0{,}5$ cm;
— secțiunea	A	$= 0{,}1963$ cm^2;
— momentul de inerție	I	$= 0{,}003068$ cm^4;
— momentul polar	I_p	$= 0{,}00614$ cm^4;
— greutatea pe 1 cm	g	$= 1{,}542$ g/cm;
— modulul elastic la întindere	E	$= 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm^2;
— modulul elastic la forfecare	G	$= 8{,}1 \cdot 10^5$ kg/cm^2;
— accelerația gravității	g	$= 7{,}86$ kg/dm^3.

a. *Calculul analitic al frecvențelor proprii ale barei.* Relația

$$f_k = \frac{1}{4}(1 + 2k)\sqrt{\frac{G}{\rho l^2}} \tag{46}$$

ne dă pentru primele trei armonice

$$f = 2{,}980 \text{ KHz};$$
$$f = 8{,}940 \text{ KHz}; \tag{47}$$
$$f = 14{,}900 \text{ KHz}.$$

b. *Construirea modelelor.* S-a făcut o serie de încercări preliminare, din care s-a tras concluzia că pentru determinări cît mai exacte ale frecvenţelor de rezonanţă este necesar ca factorul de calitate al bobinelor folosite să fie cît mai mare.

Aceasta s-a obţinut prin utilizarea de bobine cu miezuri de ferocart şi a unei sîrme de bobinaj groase (0,3 mm). Factorul de calitate trebuie să aibă valoarea

$$\frac{\omega L}{R} \geqslant 50.$$

În felul acesta curba de rezonanţă se obţine destul de ascuţită, punctul de rezonanţă putînd fi stabilit cu o precizie tehnică satisfăcătoare.

În ceea ce priveşte frecvenţa utilizată trebuie să ţinem seama de faptul că la frecvenţe prea înalte apar cuplajele între diferitele bobine şi între conductorii de conexiune. Afară de aceasta, energia disipată în exterior prin radiaţie creşte, ceea ce duce la erori mari.

Din experienţele făcute s-a tras concluzia că intervalul optim al frecvenţei este cuprins între 5 şi 25 KHz.

Pentru determinarea valorilor diferiţilor parametri s-au utilizat două punţi de măsură, una de inductanţe*) (RFT, ti 213) şi alta de capacităţi (RFT, tip 406), ale căror erori de măsurare erau de 5 %.

La construirea modelului s-au luat următoarele precauţii:

1) Inductanţele au fost blindate una de alta pentru a anula efectul cuplajelor parazite.

2) Dispoziţia inductanţelor şi capacităţilor s-a făcut în vederea unor conexiuni cît mai scurte.

3) Valorile inductanţelor şi capacităţilor s-au ajustat la valori corecte, prin măsurarea în montaj (prin utilizarea miezurilor de ferocart, această ajustare se face destul de comod pentru inductanţe).

4) Măsurarea s-a făcut la frecvenţele standard cele mai apropiate de frecvenţele de lucru (în cazul nostru 8 KHz).

Astfel s-au realizat cîteva montaje.

În tabloul nr. 2 dăm schemele a două din aceste montaje.

La calculul capacităţilor şi inductanţelor s-au utilizat relaţiile (33), (34) şi (35), în care s-a luat matricea de transformare $\|C\| = \|1\|$.

Pentru determinarea frecvenţelor s-au executat schemele din figurile 14, *a*) şi 14, *b*).

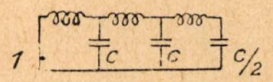
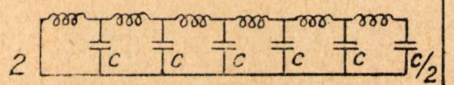
În figura 14 a oscilatorului *RC* **), (*ORC*) este conexat la capătul modelului debitînd un curent constant.

*) Această punte are caracteristici improprii, avînd domeniul de măsurare între 1mH: 1 H cu erori 5 %, pe cînd inductanţele folosite au valori de 0,3 mH: 0,01 mH. Printr-un artificiu s-a reuşit a se folosi acest aparat.

**) S-a folosit un oscilator *RC* construit cu mijloace proprii.

Rezonanța se stabilește cu ajutorul unui voltmetru conectat pentru capacitatea de intrare. De asemenea se mai prevede și un osciloscop catodic (O), cu care urmărim calitativ mersul experiențelor.

Tabloul nr. 2

Modelul	$C_{\mu F}$	L_{mH}
1 	0,492	2,012
2 	0,251	0,985

Pentru o mai precisă determinare a rezonanței s-a utilizat o a doua metodă, arătată în figura 14, *b*), în care rezonanța se determină pe baza minimului de curent

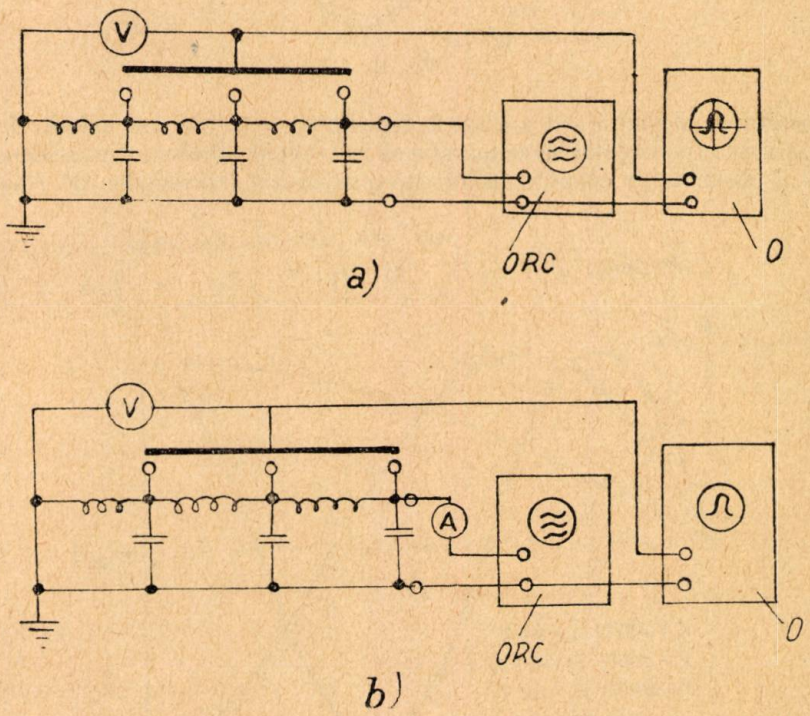


Fig. 14

indicat de miliampermetrul (mA). Aceasta corespunde faptului că la rezonanță, impedanța de intrare a modelului crește foarte mult, iar curentul scade. Pentru a se putea determina formele proprii de oscilație (distribuția tensiunilor), s-a pre-

văzut un voltmetru electronic (v) şi care poate fi conectat la oricare din puncte, prin comutare.

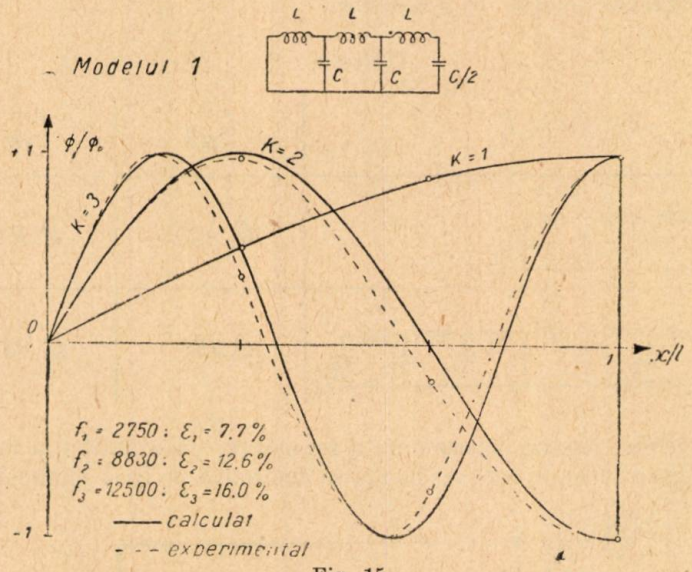


Fig. 15

Rezultatele obţinute sînt arătate în figurile 15 şi 16. Se dau valorile frecvenţelor obţinute experimental în comparaţie cu frecvenţele calculate. De asemenea, sînt arătate şi distribuţiile amplitudinilor corespunzătoare frecvenţelor de rezonanţă.

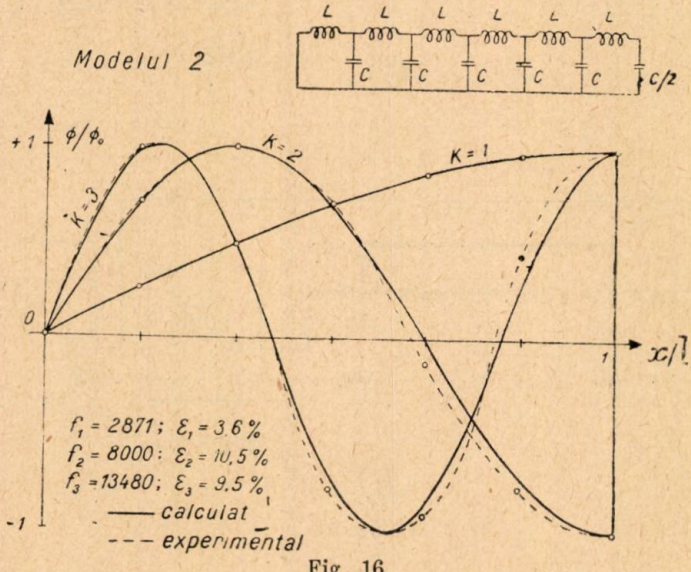


Fig. 16

Pentru determinarea frecvenţelor de rezonanţă s-a folosit un circuit oscilant cu parametri variabili, care rezonă pe frecvenţa de rezonanţă a modelului; măsu-

rînd valorile inductanței și capacității acestui circuit rezonabil, se determină frecvența modelului prin relația bine cunoscută

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}.$$

S-a recurs la această metodă deoarece oscilatorul *RC* folosit nu era etalonat, iar un frecventmetru a lipsit.

Din rezultatele obținute se pot, în primă aproximație, stabili sursele de erori și anume:

— eroarea datorită aparatelor de măsură;

— eroarea datorită frecvenței la care se face măsurarea, valorile *L C* fiind funcții de frecvență;

— eroarea datorită determinării imprecise a punctului de rezonanță.

Este de notat faptul că deși secțiunea barei modelate este mică față de lungimea ei, cu un număr de numai 5—6 celule, se poate obține o aproximație destul de bună, 2 %, la determinarea frecvenței de rezonanță. În acest sens modelul este destul de ieftin.

În ceea ce privește amplitudinile, distribuția lor prezintă oarecare abateri de la valorile teoretice, de maximum 3 % la armonicele superioare.

Din cele expuse mai sus se vede că analogiile bazate pe elemente pasive sînt deosebit de ieftine, asigurînd în același timp și o precizie suficientă unui studiu experimental.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе изложены принципы электрических моделей, основанные на пассивных диполях и квадриполях. Указывается точка зрения и метод для изготовления моделей и назначения предельных условий.

Приводятся несколько экспериментальных результатов испытаний обыкновенных моделей.

ANALOGIES ÉLECTRIQUES DES VIBRATIONS MÉCANIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on expose les principes des modèles électriques basés sur des dipôles et des quadripôles passifs. On indique un point de vue et une méthode pour effectuer les modèles et poser les conditions à la limite.

On indique enfin les résultats expérimentaux de quelques modèles simples.

BIBLIOGRAFIE

1. L. I. Gutenmaher, *Elektriceskie modeli.* Moscova, 1950.
2. N. E. Kobrinski, *Matematiceskie mașinî neprerîvnogo deistviia*, Moscova, 1954.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

METODĂ GRAFICĂ PENTRU SEPARAREA TENSIUNILOR PRINCIPALE ÎN FOTOELASTICITATE

DE

M. ARCAN şi ED. NICOLAU

Problema fundamentală a fotoelasticităţii este obţinerea, pe baza izoclinelor şi izocromatelor, a direcţiilor şi valorilor tensiunilor principale. Literatura de specialitate reflectă preocuparea pentru îmbunătăţirea continuă a metodelor de lucru în această direcţie. În cele ce urmează vom prezenta o metodă grafică pornind de la metoda integrării prin diferenţe finite a ecuaţiilor diferenţiale de echilibru de-a lungul axelor de coordonate [1].

Metoda grafică pe care o propunem se bazează pe integrarea aceloraşi ecuaţii, cu ajutorul cercului lui Mohr. Înainte de a o prezenta este necesar să facem o precizare privitoare la convenţiile de semne ale tensiunilor tangenţiale.

În teoria elasticităţii, convenţia de semne asupra eforturilor tangenţiale este cea din figura 1. În teoria cercului lui Mohr însă se consideră că τ este pozitiv, dacă roteşte planul pe care acţionează în sensul acelor ceasornicului, de unde rezultă că pe două planuri perpendiculare eforturile tangenţiale sînt egale şi de semn contrar:

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}\,. \tag{1}$$

Pentru obţinerea expresiilor tensiunilor, pe un plan înclinat (σ_α şi τ_α), se porneşte de la schema din figura 2 şi în relaţiile obţinute se face înlocuirea:

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}\,.$$

Rezultă

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx} \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

În aceste condiţii, cercul lui Mohr se construieşte ca în figura 3 (pentru detalii a se vedea [2]). Este important de reţinut faptul că din punctul M (punctul fix al cercului de tensiuni) orice dreaptă, de direcţie α, reprezintă direcţia σ_α şi intersectează cercul într-un punct de coordonate σ_α şi τ_α, iar MA şi MB sînt chiar

direcțiile eforturilor principale, σ_1 respectiv σ_2. Pentru a putea folosi, în integrarea grafică a ecuațiilor diferențiale de echilibru, construcția cercului lui Mohr este

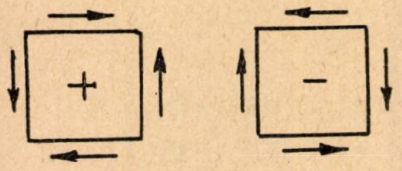


Fig. 1. — Convenția de semne a eforturilor unitare tangențiale în teoria elasticității.

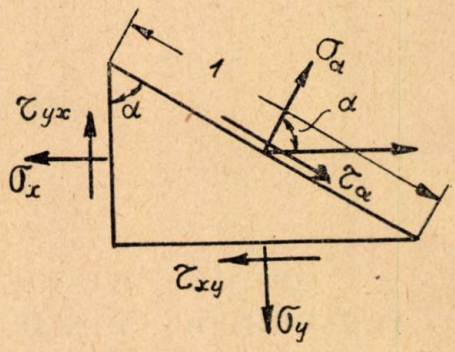


Fig. 2. — Schema de calcul pentru relațiile cercului lui Mohr.

necesar să introducem convenția de semne a cercului tensiunilor: τ este pozitiv dacă rotește planul pe care acționează, în sensul acelor ceasornicului. Pentru stabi-

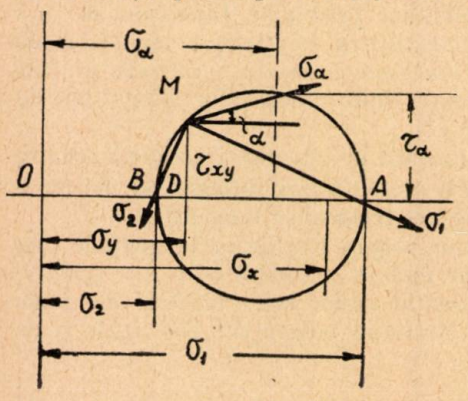


Fig. 3. — Cercul lui Mohr.

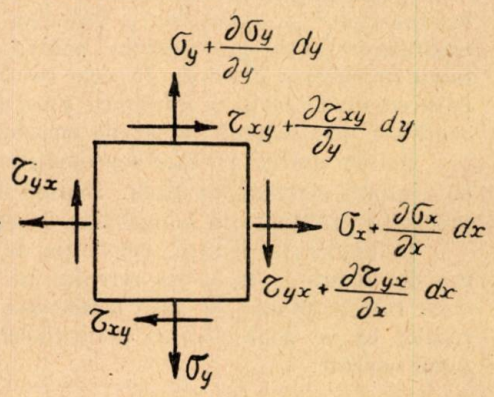


Fig. 4. — Echilibrul elementului de suprafață.

lirea, pe această bază, a ecuațiilor diferențiale de echilibru, pornim de la schema din figura 4 și obținem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{3}$$

Dacă facem înlocuirea $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$, care rezultă din ecuațiile de momente, ecuațiile (3) devin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sau

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Vom reține ultimul sistem de ecuații, deoarece el este în funcție de τ_{yx}, ca și sistemul de ecuații care reprezintă cercul lui Mohr a cărui construcție este dată mai sus.

Pe baza acestor considerații de unificare a convenției de semne privitoare la tensiunile tangențiale se poate trece la prezentarea metodei grafice de separare a tensiunilor principale. Metoda analitică, de care am amintit la începutul lucrării, folosește integrarea de exemplu a primei ecuații de echilibru în plan; astfel, din prima ecuație (5) rezultă

$$(\sigma_x)_i = (\sigma_x)_0 + \int_0^i \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\, dx \tag{6}$$

sau trecînd la diferențe finite

$$(\sigma_x)_i = (\sigma_x)_0 + \sum_0^i \Delta\tau_{yx} \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}, \tag{7}$$

pentru $i = 1$, avem

$$(\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_0 + \Delta\tau_{yx} \frac{\Delta x}{\Delta y}. \tag{8}$$

Deci, pornind de la un punct x_0, în care se cunoaște valoarea tensiunii $(\sigma_x)_0$, se poate obține σ_x într-un punct x_1 aflat la distanța $dx = x_1 - x_0$ de el (fig. 5) și așa mai departe. Metoda comportă intabularea calculelor și este destul de laborioasă.

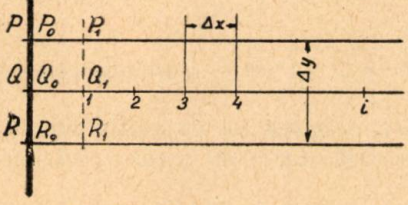


Fig. 5. — Schema de calcul pentru evaluarea tensiunilor din punct în punct.

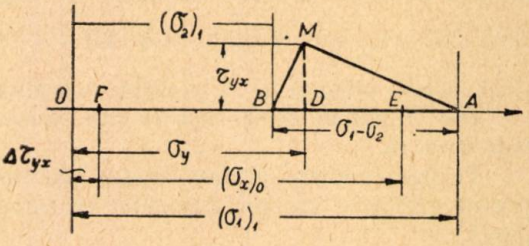


Fig. 6. — Schema simplificată a cercului lui Mohr.

Metoda grafică pe care o propunem pleacă de la faptul că în punctul x_1 se cunosc: valoarea $(\sigma_1 - \sigma_2)$ și direcțiile tensiunilor principale. Se poate deci construi cercul, avînd ca diametru valoarea $(\sigma_1 - \sigma_2)$.

Punctul fix al cercului, care are drept ordonată pe τ_{yx} din punctul x_1, se obține ducînd din extremitățile diametrului, paralele cu direcțiile principale (fig. 6), avînd însă grijă ca din extremitatea din dreapta, A, să ducem paralela la direcția σ_1, iar din cea din stînga paralela la direcția lui σ_2. În cercul trasat și pe care

se găseşte punctul M, piciorul perpendicularei coborîte din M este extremitatea segmentului σ_y; extremitatea segmentului σ_x se va găsi într-un punct simetric lui D faţă de centrul cercului. Obţinem astfel punctul F. Din acest punct spre stînga se măsoară segmentul σ_x pînă în origine. Dar originea nu este cunoscută.

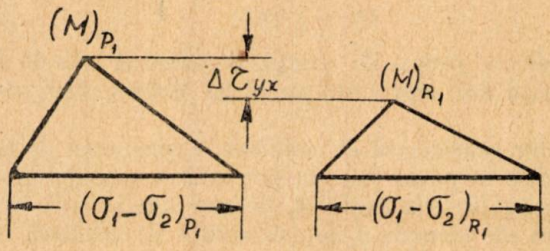


Fig. 7. — Schema pentru evaluarea lui $\Delta\tau_{yx}$.

Folosind ecuaţia (8) rezultă că originea se va găsi într-un punct la distanţa: $(\sigma_x)_0 + \Delta\tau_{yx}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. Cum Δx şi Δy se pot alege astfel ca raportul lor să fie 1, şi cum $(\sigma_x)_0$ este cunoscut, rezultă că nu mai este necesară valoarea lui $\Delta\tau_{yx}$, adică:

$$\Delta\tau_{yx} = (\tau_{yx})_{P_1} - (\tau_{yx})_{R_1}, \tag{9}$$

ceea ce se obţine ducînd valorile σ_1—σ_2 în punctul P_1 şi apoi din extremităţile acestui segment, paralele la direcţiile principale în R_1; aceste direcţii se întîlnesc în $(M)_{P_1}$, care are drept ordonată $(\tau_{yx})_{P_1}$. Repetînd operaţia în R_1 se obţine $(\tau_{yx})_{R_1}$. În figura 7 sînt arătate aceste operaţii grafice şi obţinerea valorii $\Delta\tau_{yx}$.

Revenind la figura 6, măsurăm din E pe σ_0, spre stînga dacă $\sigma_0 > 0$, sau spre dreapta cînd $\sigma_0 < 0$, la care adăugăm pe $\Delta\tau_{yx}$, la fel ca şi pentru σ_0, spre stînga, dacă $\Delta\tau > 0$, spre dreapta dacă $\Delta\tau < 0$ (dacă am luat pe $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = +1$). Am obţinut astfel originea O a cercului tensiunilor.

Din O putem acum măsura atît tensiunile σ_x, σ_y, cît şi tensiunile principale σ_1 şi σ_2.

Pe baza metodei grafice expuse mai sus, s-a imaginat un dispozitiv simplu pentru evaluarea tuturor mărimilor ce caracterizează starea de tensiune într-un punct.

Dispozitivul conceput este schiţat mai jos şi cuprinde o rigletă, S, care se roteşte în jurul centrului unui sfert din cercul lui Mohr în aşa fel, încît să indice, pe acesta, raza dusă sub un unghi la centrul, ales egal cu 2α, α fiind unghiul dintre direcţia tensiunii principale σ_1 şi axa Ox. De asemenea, dispozitivul mai conţine o rigletă, T, cu zero la mijloc, deplasabilă paralel cu axa Ox a cercului, astfel ca punctul zero să poată fi adus în orice poziţie. Paralel cu ultima rigletă se deplasează o serie de reperi auxiliari (fig. 8).

Sfertul de cerc desenat pe hîrtie milimetrică, cu raza egală cu 1, are indicaţii pentru diferitele înclinări α ale tensiunii principale maxime, ceea ce permite aşezarea rapidă a rigletei otitoare corespunzătoare cu unghiul α, pe care-l avem din tabloul de izocline. Rigleta fiind gradată, se poate citi pe ea mărimea razei

cercului lui Mohr, egală cu $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, valoare cunoscută din tabloul de izocromatice. Așa cum rezultă din figură, ordonata reprezintă tocmai valoarea lui τ_{yx} în punctul considerat.

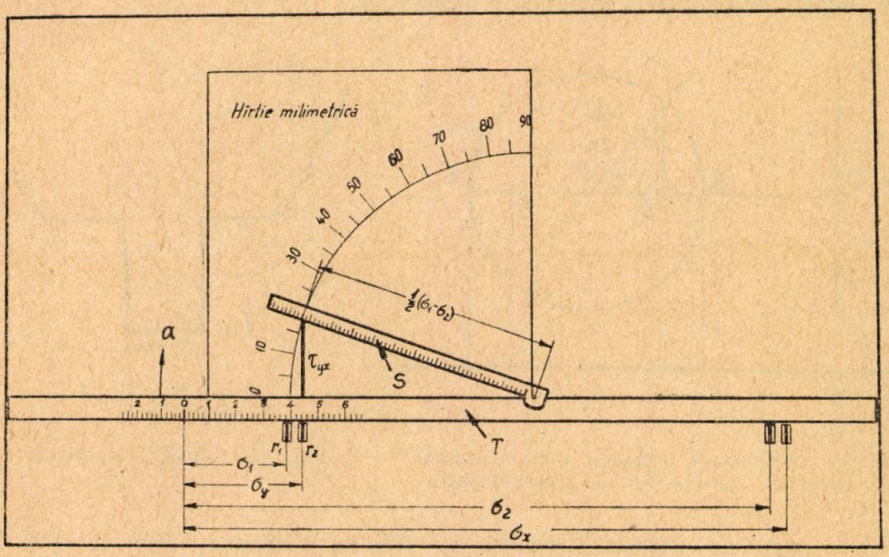


Fig. 8. — Dispozitiv pentru evaluarea tensiunilor pe baza datelor din fotoelasticitate.

Pentru evaluarea elementelor stării de tensiune într-un punct Q_1 al unei piese și cunoscînd valorile α și $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ pentru acest punct Q_1, cît și pentru două puncte învecinate P_1 și R_1, precum și σ_{x_0} într-un punct Q_0 (fig. 5), vom face următoarele operații:

— fixăm rigleta S în poziția α_{P_1} și citim în dreptul diviziunii de pe această rigletă, care marchează raza: $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{P_1}$ ordonata, adică τ_{P_1};

— fixăm rigleta S în poziția α_{R_1} și citim ca mai sus τ_{R_1};

— efectuăm diferența $\tau_{P_1} - \tau_{R_1} = \Delta\tau$. (Dacă $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ nu poate fi luat egal cu 1 se ia egal cu $\frac{1}{2}$ sau 2. În acest caz luîndu-se o scară potrivită, putem obține direct $\Delta\tau \cdot \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)$;

— prin aceeași metodă și cu ajutorul valorilor cunoscute α_{Q_1} și $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)_{Q_1}$ se evaluează τ_Q. Totodată cu ajutorul rigletei rotitoare se marchează prin reperii r_2, r_3 și r_4 punctele D, E și A ale cercului lui Mohr (fig. 9).

— prin două deplasări ale rigletei T (în care ne ajutăm de reperul r_1), egale cu σ_{x_0} şi cu $\Delta\tau\frac{\Delta x}{\Delta y}$, executate în sensurile indicate mai sus, în lucrare, se aduce punctul zero al rigletei T în originea axelor de referinţă ale cercului lui Mohr, după care reperul r_1 se aşază în punctul B;

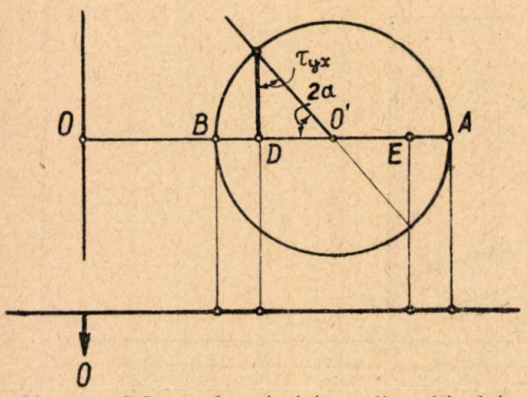


Fig. 9. — Schema de principiu a dispozitivului de evaluare a tensiunilor în fotoelasticitate.

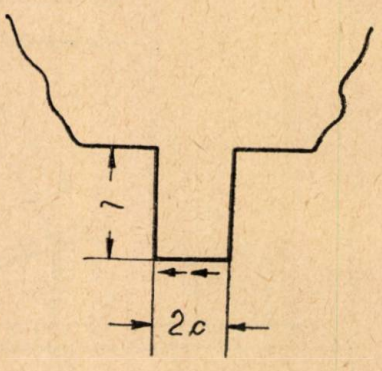


Fig. 10. — Consolă încastrată.

— se citesc pe rigleta T valorile $\sigma_1 = OA$, $\sigma_2 = OB$, $\sigma_y = OD$ şi $\sigma_x = OE$.

Toate aceste operaţii se pot face foarte uşor şi cu mare repeziciune. Dăm mai jos pentru exemplificare, studiul tensiunilor în patru secţiuni (I, II, III, IV) într-o consolă încărcată ca în figura 10.

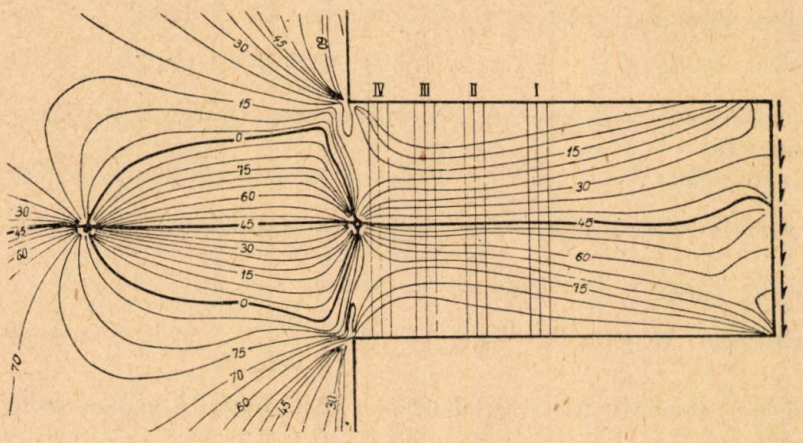


Fig. 11. — Consolă încastrată $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Izocline trasate cu ajutorul unui model din plexiglas.

Se dau alăturat planşele de izocline (fig. 11), izocromatice (fig. 12), diagramele τ_{yx} (fig. 13) şi σ_x pentru secţiunile I, II, III şi IV (fig. 14).

Calculul lor s-a făcut atît analitic, cît şi grafic. Diferenţele dintre cele două serii de valori sînt în limitele generale ale preciziei metodei fotoelastice.

Prin aceste calcule comparative am putut constata următoarele caracteristici ale noii metode:

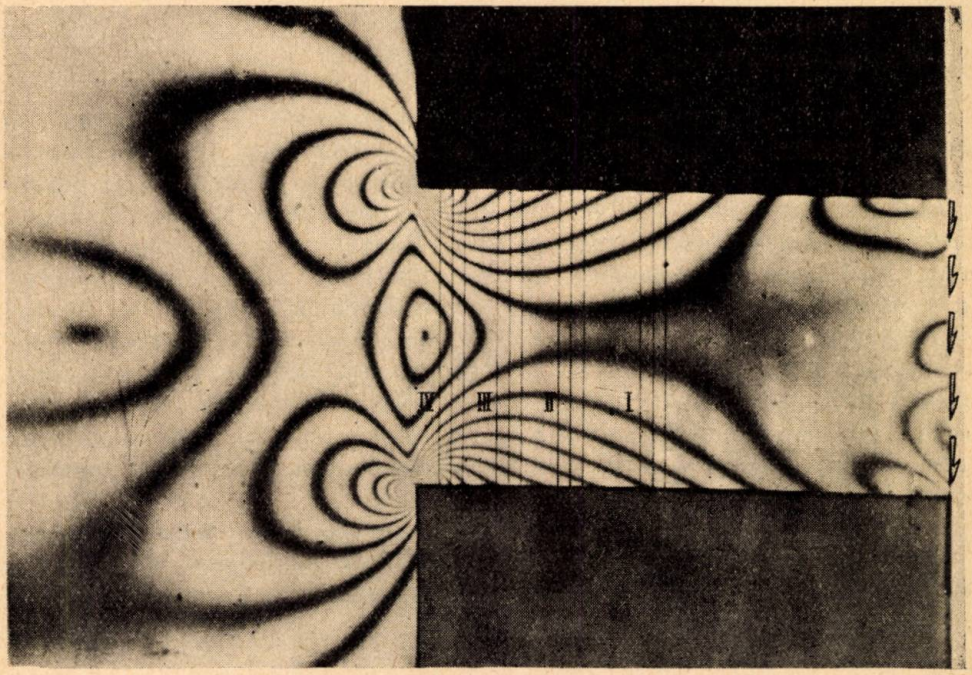


Fig. 12. — Consolă încastrată $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Izocromate. Model de juralit. Valoarea benzii materialului $\tau_{0,1} = 5{,}29$ kg/cm²/cm, $l = 5{,}34$ cm, $h = 2c = 2{,}98$ cm, grosime $d = 0{,}52$ cm. Încărcare repartizată pe extremitatea consolei $P = 26{,}5$ kg.

1. Prin mecanizarea operațiilor se reduce în mod sensibil timpul de lucru.
2. Se evită aproape complet greșelile de calcul.

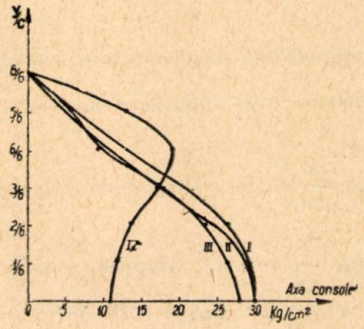


Fig. 13. — Consolă încastrată $l/2c = 1{,}8$ diagramele τ_{yx}.

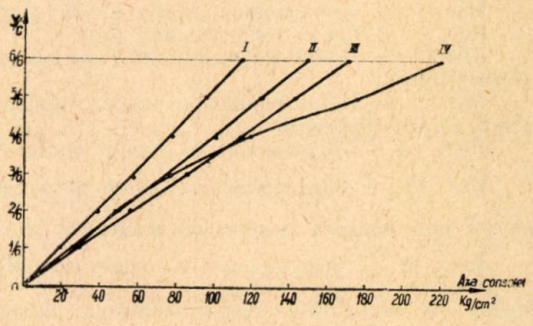


Fig. 14. — Consolă încastrată $l/2c = 1{,}8$ diagramele σ_x (longitudinale).

3. Se obțin totodată fără operații suplimentare și valorile tensiunilor principale.
4. Precizia metodei nu se modifică, întrucît, în orice caz, și prin calculul analitic primele operații sînt grafice.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОТДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ФОТОЭЛАСТИЧНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Предложенный графический метод основывается на интегрировании дифференциальных уравнений равновесия с помощью круга Мора.

По установлении формы уравнений равновесия, с такими же условными обозначениями для τ, как и в соотношениях для круга Мора, переходят к описанию метода работы. Дается также чертеж простого приспособления, основанного на предложенном графическом методе, при помощи которого значительно сокращается рабочее время. Другие преимущества предложенного метода в сравнении с аналитическим методом интегрирования вдоль оси координат, состоят, помимо сокращения рабочего времени, в следующем: получение посредством простых отсчетов основных напряжений σ_1 и σ_2, кроме σ_x, σ_y и τ, значительное уменьшение часто встречающихся ошибок, и точность, сравнимая с точностью аналитического метода.

В качестве примера приводятся картина изоклинов, картина полос и диаграммы с τ_{yx} и σ_x для заделанной на одном конце балки высотой $l/h = 1{,}8$ и с распределенной нагрузкой на конце, определенные по предложенному методу.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Правила знаков касательных напряжений по теории упругости.
Рис. 2. — Схема расчета соотношений для круга Мора.
Рис. 3. — Круг Мора.
Рис. 4. — Равновесие поверхностного элемента.
Рис. 5. — Схема расчета для определения напряжений от точки до точки.
Рис. 6. — Упрощенная схема круга Мора.
Рис. 7. — Схема определения τ_{yz}.
Рис. 8. — Приспособление для определения напряжений на основании данных фотоупругости.
Рис. 9. — Принципиальная схема приспособления для определения напряжений в фотоупругости.
Рис. 10. — Заделанная на одном конце балка.
Рис. 11. — Заделанная на одном конце балка $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Изоклины, проведенные при помощи модели из плексигласса.
Рис. 12. — Заделанная на одном конце балка $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Картина полос. Модель из журатита. Характеристика полосы материала $\tau_{0,1} = 5{,}29$ кг/см²/см $l = 5{,}34$ см, $h = 2c = 2.98$ см, толщины $d = 0{,}52$ см. Нагрузка, распределенная на конце балки — $P = 26{,}5$ кг.
Рис. 13. — Заделанная на одном конце балка $\frac{l}{2c} = 1{,}8$ диаграммы τ_{yx}.
Рис. 14. — Заделанная на одном конце балка $\frac{l}{2c} = 1{,}8$ диаграммы σ_x (продольно).

MÉTHODE GRAPHIQUE DE SÉPARATION DES TENSIONS PRINCIPALES DANS LA PHOTOÉLASTICITÉ

(RÉSUMÉ)

La méthode graphique proposée est basée sur l'intégration des équations différentielles de l'équilibre à l'aide du cercle de Mohr.

Après avoir établi la forme des équations de l'équilibre au moyen de la même convention de notations pour τ que celle des relations du cercle de Mohr, on décrit la méthode de travail. On présente aussi l'esquisse d'un dispositif simple, basé sur la méthode graphique proposée, à l'aide de laquelle la durée de travail est sensiblement réduite. Les autres avantages de la méthode proposée, par rapport à la méthode analytique d'intégration le long des axes de coordonnées sont, hormis la diminution de la durée du travail, l'obtention par de simples lectures des tensions principales σ_1 et σ_2 outre σ_x, σ_y et τ, la réduction sensible de la fréquence des erreurs, avec une précision comparable à celle de la méthode analytique.

Pour illustrer, on donne les isoclines, les isochromates et les diagrammes pour τ_{yx} et σ_x, déterminés par la méthode proposée pour une console courte de $\frac{l}{h} = 1{,}8$ encastrée et avec une charge répartie à l'extrémité.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Convention de signes des efforts unitaires tangentiels dans la théorie de l'élasticité.
Fig. 2. — Schéma de calcul pour les relations du cercle de Mohr.
Fig. 3. — Le cercle de Mohr.
Fig. 4. — L'équilibre de l'élément de surface.
Fig. 5. — Schéma de calcul pour évaluer les tensions d'un point à l'autre.
Fig. 6. — Schéma simplifié du cercle de Mohr.
Fig. 7. — Schéma pour l'évaluation de $\Delta\tau_{yz}$.
Fig. 8. — Dispositif pour évaluer les tensions en vertu des données de la photoélasticité.
Fig. 9. — Schéma de principe du dispositif d'évaluation des tensions en photoélasticité.
Fig. 10. — Console encastrée.
Fig. 11. — Console encastrée à $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Isoclines tracées au moyen d'un modèle en plexiglass.
Fig. 12. — Console encastrée à $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Isochromates. Modèle en juralite. La valeur de la bande de matériel $\tau_{0,1} = 5{,}29$ kg/cm²/cm, $l = 5{,}34$ cm, $h = 2\,c = 2{,}98$ cm, d'épaisseur $d = 0{,}52$ cm. Charge répartie sur l'extrémité de la console $P = 26{,}5$ kg.
Fig. 13. — Console encastrée à $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Les diagrammes τ_{yx}.
Fig. 14. — Console encastrée à $\frac{l}{2c} = 1{,}8$. Les diagrammes σ_x (longitudinaux).

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. Frocht, *Fotouprugosti*. Moscova—Leningrad, 1948, vol. I.
2. M. B. Rubinin, *Îndrumător pentru lucrări practice de Rezistența materialelor*. Masghiz, Moscova, 1953, partea I.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

INTEGRAREA ECUAŢIEI LINIEI ELASTICE ÎN INSTABILITATEA DE ROTAŢIE A TIJELOR VERTICALE

DE

N. S. PÎRVULESCU

Ecuaţia diferenţială

$$A\frac{d^4y}{dx^4}=(x-h)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{\omega^2}{g}y, \tag{1}$$

care se mai poate pune sub forma

$$A\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left[(x-h)\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\omega^2}{g}y \tag{2}$$

şi în care

$$A=EI/q \tag{3}$$

a fost stabilită anterior [1].

Păstrăm notaţiile:

E, modulul de elasticitate;
I, momentul de inerţie;
q, greutatea aparentă a unei unităţi de lungime din tijă;
h, lungimea porţiunii comprimate a tijei;
ω, viteza unghiulară de rotaţie;
g, acceleraţia gravităţii;
x, depărtarea unui element de tijă de la originea 0 considerată în extremitatea inferioară a tijei;
y, săgeata liniei medii deformate a tijei la depărtarea x de originea 0.

Cazul simplificat $\omega=0$ a fost studiat anterior [2]. Procedînd în mod analog considerăm pe y ca o serie infinită de puteri întregi

$$y^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{n!}{(n-i)!}a_n x^{n-i} \tag{4}$$

valabilă pentru $n\geqslant i$, în care (i) este ordinul derivatei şi $n!$ este definit [3] de expresia

$$n!=(n-1)!\,n. \tag{5}$$

Înlocuind expresia (4) în (1) se obţine

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{n!}{(n-4)!} a_n x^{n-4} - (x-h) \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{n!}{(n-2)!} a_n x^{n-2} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{n!}{(n-1)!} a_n x^{n-1} - \frac{\omega^2}{y} \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n x^n = 0. \tag{6}$$

Se ştie că, pentru ca această egalitate să se reducă la identitate, este necesar să anulăm coeficienţii diferitelor puteri ale lui x. Anulînd coeficientul lui x^{m-4} în relaţia (6) se obţine

$$A \frac{m!}{(m-1)} a_m + h \frac{(m-2)!}{(m-4)!} a_{m-2} - \left[\frac{1}{(m-5)!} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(m-4)!} \right] (m-3)! \, a_{m-3} - \frac{\omega^3}{y} a_{m-4} = 0 \tag{7}$$

valabilă pentru $m \geqslant 4$ şi care se poate pune sub forma

$$m! \, a_m = \frac{h'}{A} (m-2)! \, a_{m-2} + \frac{(m-3)}{A} (m-3)! \, a_{m-3} + w(m-4)! \, a_{m-4}, \tag{8}$$

în care

$$w = \omega^2 / gA. \tag{9}$$

Pentru $\omega = 0$ se obţine formula (9) din lucrarea menţionată [2].

De formula de recurenţă (8) ne servim în calculul termenilor succesivi ai seriei, dînd lui m valorile succesive 4, 5, 6, ..., obţinem

$$4! \, a_4 = \frac{h'}{A} 2! \, a_2 + \frac{1}{A} a_1 + w a_0$$

$$5! \, a_5 = \frac{h'}{A} 3! \, a_3 + \frac{2}{A} 2! \, a_2 + w a_1$$

$$6! \, a_6 = \frac{h'}{A} 4! \, a_4 + \frac{3}{A} 3! \, a_3 + w 2! \, a_2. \tag{10}$$

Făcînd înlocuirile succesive, pentru ca relaţiile (10) să devină funcţii numai de a_0, a_1, a_2 şi a_3, se obţine

$$6! \, a_6 = \frac{3}{A} 3! \, a_3 + \frac{h'^2}{A^2} 2! \, a_2 + \frac{h'}{A^2} 1! \, a_1 + w \left(2! \, a_2 + \frac{h'}{A} a_0 \right) \tag{11}$$

$$7! \, a_7 = \frac{h'^2}{A^2} 3! \, a_3 + \frac{h'}{A^2} (2+4) 2! \, a_2 + \frac{4}{A^2} 1! \, a_1 + w \left(3! \, a_3 + \frac{h'}{A} a_1 + \frac{4}{A} a_0 \right)$$

$$8! \, a_8 = \frac{h'}{A^2} (3+5) 3! \, a_3 + \left[\frac{h'^3}{A^2} + \frac{2 \cdot 5}{A^2} \right] 2! \, a_2 + \frac{h'^2}{A^3} a_1 + \\ + w \left[\frac{h'^2}{A} 2! \, a_2 + \frac{5+1}{A} a_1 + \frac{h'^2}{A^2} a_0 \right] + w^2 a_0.$$

Notăm

$$z'(x) = x^3 / A \tag{12}$$

$$\alpha'(x) = h'/x = -\alpha(x) = -h/x. \tag{13}$$

Dacă se înlocuiesc valorile (12) şi (13) în expresia (4) şi se grupează termenii pentru a da factori comuni pe a_0, a_1, a_2 şi a_3 se obţine integrala căutată a ecuaţiei diferenţiale.

În acest fel, calculele sînt laborioase pentru un număr mare de termeni, încît este preferabil să urmăm metoda următoare. Chiar de la primii termeni observăm că expresia (4) capătă înfățișarea următoare:

$$
\begin{aligned}
y(x) = a_0 \Bigg\{ & \frac{N_0^{0,0}}{0!} \\
& + wx^4 \left\{ \frac{N_4^{0,0}}{4!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_4^{1,1}}{6!} + \frac{N_4^{1,0}}{7!} \right] + z^2(x) \left[\alpha'^2(x) \frac{N_4^{2,2}}{8!} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha'(x) \frac{N_4^{2,1}}{9!} + \frac{N_4^{2,0}}{10!} \right] + \dots \right\} + (wx^4)^2 \left\{ \frac{N_8^{0,0}}{8!} + \right. \\
& \left. + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_8^{1,1}}{10!} + \frac{N_8^{1,0}}{11!} \right] + \dots + (wx^4) \left\{ \frac{N_{12}^{0,0}}{12!} + \dots \right\} + \dots \right. \Bigg\} \\
+ a_1 x \Bigg\{ & \frac{N_1^{0,0}}{1!} + z(x) \left\{ \frac{N_4^{0,0}}{4!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_4^{1,1}}{6!} + \frac{N_4^{1,0}}{7!} \right] + \dots \right\} \\
& + wx^4 \left\{ \frac{N_5^{0,0}}{5!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_5^{1,1}}{7!} + \frac{N_5^{1,0}}{8!} \right] + \right. \\
& \left. + z^2(x) \left[\alpha'^2(x) \frac{N_5^{2,2}}{9!} + \alpha'(x) \frac{N_5^{2,1}}{10!} + \frac{N_5^{2,0}}{11!} \right] + \dots \right\} \\
& + (wx^4)^2 \frac{N_9^{0,0}}{9!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_9^{1,1}}{11!} + \frac{N_9^{1,0}}{12!} \right] + \dots \Bigg\} + \\
& + (wx^4)^3 \left\{ \frac{N_{13}^{0,0}}{13!} + \dots \right\} + \dots \Bigg\} \qquad (14) \\
+ 2!\, a_2 x^2 \Bigg\{ & N_2^{0,0} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_2^{1,1}}{4!} + \frac{N_2^{1,0}}{5!} \right] + \\
& + z^2(x) \left[\alpha'^2(x) \frac{N_2^{2,2}}{6!} + \alpha'(x) \frac{N_2^{2,1}}{7!} + \frac{N_2^{2,0}}{8!} \right] + \dots \\
& + wx^4 \left\{ \frac{N_6^{0,0}}{6!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_6^{1,1}}{8!} + \frac{N_6^{1,0}}{9!} \right] + \dots \right\} + \\
& + (wx^4)^2 \left\{ \frac{N_{10}^{0,0}}{10!} + \dots \right\} + \dots \Bigg\} \\
+ 3!\, a_3 x^3 \Bigg\{ & \frac{N_3^{0,0}}{3!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_3^{1,1}}{5!} + \frac{N_3^{1,0}}{6!} \right] + \\
& + z^2(x) \left[\alpha'^2(x) \frac{N_3^{2,2}}{7!} + \alpha'(x) \frac{N_3^{2,1}}{8!} + \frac{N_3^{2,0}}{9!} \right] + \dots \\
& wx^4 \left\{ \frac{N_7^{0,0}}{7!} + z(x) \left[\alpha'(x) \frac{N_7^{1,1}}{9!} + \frac{N_7^{1,0}}{10!} \right] + \dots \right\} + \\
& + (wx^4)^2 \left\{ \frac{N_{11}^{0,0}}{11!} + \dots \right\} + \dots \Bigg\}
\end{aligned}
$$

în care numerile $N_j^{k,\,k-u}$ urmează să fie determinate.

Făcînd înlocuirile (12) și (13) relațiile (10) devin

$$\begin{aligned} 4!\,a_4x^4 &= 2!\,a_2x^2\,z(x)\,\alpha'(x) + 1\cdot 1!\,a_1xz(x) + 0!\,a_0wx^4 \\ 5!\,a_5x^5 &= 3!\,a_3x^3z(x)\,\alpha'(x) + 2\cdot 2!\,a_2x^2z(x) + 1!\,a_1wx^4 \\ 6!\,a_6x^6 &= 4!\,a_4x^4z(x)\,\alpha'(x) + 3\cdot 3!\,a_3x^3z(x) + 2!\,a_2wx^4, \end{aligned} \tag{15}$$

care conduc la formula de recurență

$$\begin{aligned} m!\,a_m x^m &= (m-2)!\,a_{m-2}\,x^{m-2}\,z(x)\,\alpha'(x) + \\ &+ (m-3)!\,(m-3)\,a_{m-3}\,x^{m-3}\,z(x) + (m-4)!\,a_{m-4}\,x^{m-4}\,wx^4. \end{aligned} \tag{16}$$

Examinînd expresia (14) se observă că relațiile (15) devin

$$\begin{aligned} 4!\,a_4x^4 &= 2!\,a_2x^2z(x)\,\alpha'(x)\,N_2^{1,1} + 1!\,a_1\,xz(x)\,N_1^{1,0} + 0!\,a_0wx^4N_4^{0,0} \\ 5!\,a_5x^5 &= 3!\,a_3x^3z(x)\,\alpha'(x)\,N_3^{1,1} + 2!\,a_2x^2z(x)\,N_2^{1,0} + 1!\,a_1xwx^4\,N_5^{0,0} \\ 6!\,a_6x^6 &= 3!\,a_3x^3z(x)\,N_3^{1,0} + 2!\,a_2x^2\,[z^2(x)\,\alpha'^2(x)\,N_2^{2,2} + wx^4\,N_6^{0,0}] \\ &+ 1!\,a_1xz^2\,(x)\,\alpha'(x)\,N_4^{1,1} + 0!\,a_0wx^4z(x)\,\alpha'(x)\,N_4^{1,1} \\ 7!\,a_7x^7 &= 3!\,a_3x^3\,[z^2(x)\,\alpha'(x)\,N_3^{2,2} + wx^4N_7^{0,0}] + 2!\,a_2x^2z^2(x)\,\alpha'(x)\,N_2^{2,1} \\ &+ 1!\,a_1x\,[z^2(x)\,N_4^{1,0} + wx^2z(x)\,\alpha'(x)\,N_5^{1,1}] + a_0wx^4z(x)\,N_4^{1,0} \end{aligned} \tag{17}$$

care conduc la formulele de recurență

$$\begin{aligned} \frac{(2\mu)!}{x^{2\mu}}\,a_{2\mu} &= 0!\,a_0x^{\circ}\left\{\begin{array}{l} wx^4\,[z^{\mu-2}(x)\,\alpha'^{\mu-2}(x)\,N_4^{\mu-2,\,\mu-2} + \\ + z^{\mu-3}(x)\,\alpha'^{\mu-5}(x)\,N_4^{\mu-3,\,\mu-5} + \ldots] \\ + (wx^4)^2\,[z^{\mu-4}(x)\,\alpha'^{\mu-4}(x)\,N_{2,4}^{\mu-4,\,\mu-4} + \\ + z^{\mu-5}(x)\,\alpha'^{\mu-7}(x)\,N_{2,4}^{\mu-5,\,\mu-7} + \ldots] \\ + (wx^4)^3\,[z^{\mu-6}(x)\,\alpha'^{\mu-6}(x)\,N_{3.4}^{\mu-6,\,\mu-6} + \ldots] + \ldots \end{array}\right. \\ &+ 1!\,a_1x\left\{\begin{array}{l} z^{\mu-1}(x)\,\alpha'^{\mu-2}(x)\,N_4^{\mu-2,\,\mu-2} + z^{\mu-2}(x)\,\alpha'^{\mu-5}(x)\,N_4^{\mu-3,\,\mu-5} + \\ + z^{\mu-3}(x)\,\alpha'^{\mu-8}(x)\,N_4^{\mu-3,\,\mu-8} + \ldots + \\ wx^4\,[z^{\mu-3}(x)\alpha'^{\mu-4}(x)\,N_{1+4}^{\mu-3,\,\mu-4} + z^{\mu-4}(x)\,\alpha'^{\mu-7}(x)\,N_{1+4}^{\mu-4,\,\mu-7} + \ldots] \\ + (wx^4)^2\,[z^{\mu-5}(x)\,\alpha'^{\mu-6}(x)\,N_{1+2.4}^{\mu-5,\,\mu-6} + \ldots] + \ldots \end{array}\right. \\ &+ 2!\,a_2x^2\left\{\begin{array}{l} z^{\mu-1}(x)\,\alpha'^{\mu-1}(x)\,N_2^{\mu-1,\,\mu-1} + z^{\mu-2}(x)\,\alpha'^{\mu-4}(x)\,N_2^{\mu-2,\,\mu-4} + \\ + z^{\mu-3}(x)\,\alpha'^{\mu-7}(x)\,N_2^{\mu-3,\,\mu-7} + \ldots \\ + wx^4\,[z^{\mu-3}(x)\,\alpha'^{\mu-3}(x)\,N_{2+4}^{\mu-3,\,\mu-3} + z^{\mu-4}(x)\alpha'^{\mu-6}(x)N_{2+4}^{\mu-4,\,\mu-6} + \ldots \\ + (wx^4)^2\,[z^{\mu-5}(x)\,\alpha'^{\mu-5}(x)\,N_{2+2.4}^{\mu-5,\,\mu-5} + \ldots] + \ldots \end{array}\right. \\ &+ 3!\,a_3x^3\left\{\begin{array}{l} z^{\mu-2}(x)\,\alpha'^{\mu-3}(x)\,N_3^{\mu-2,\,\mu-3} + z^{\mu-3}(x)\,\alpha'^{\mu-6}(x)\,N_3^{\mu-3,\,\mu-6} + \\ + z^{\mu-4}(x)\,\alpha'^{\mu-9}(x)\,N_3^{\mu-4,\,\mu-9} + \ldots \\ + wx^2\,[z^{\mu-4}(x)\alpha'^{\mu-5}(x)\,N_{3+4}^{\mu-4,\,\mu-5} + z^{\mu-5}(x)\alpha'^{\mu-8}(x)N_{3+4}^{\mu-5,\,\mu-8} + \ldots] \\ + (wx^2)^2\,[z^{\mu-6}(x)\,\alpha'^{\mu-7}(x)\,N_{11}^{\mu-6,\,\mu-7} + \ldots] + \ldots \end{array}\right. \end{aligned} \tag{18}$$

În mod analog se obține formula de recurență pentru a_m cu indicele m impar. Aceste formule se pot concentra în expresia

$$\frac{m!}{x^m} a_m = \sum_{j=0}^{3} j!\, a_j\, x^j \sum_{r=0}^{\infty} (wx^4)^r\, \zeta_{j,m,r} \tag{19}$$

în care

$$\zeta_{j,m,r} = \sum_{s=0} z^{\nu-2r-s}(x)\, \alpha'^{\nu'-2r-3s}(x)\, N_{j'}^{\nu''-2r-s,\,\gamma-2r-3s} \tag{20}$$

$j' = j+4r$ valabil în afara cazurilor pentru care $r=0$ și $j<2$ după cum urmează. Dacă $r=0$, pentru $j=0$ și $\zeta_{0,m,0}=0$; iar pentru $j=1$ avem $j'=4$.

Valorile ν și ν' sînt date respectiv în tablourile nr. 1 și 2, condiționat de valorile m și j.

Tabloul nr. 1

Valorile ν

m \ j	0	1	2	3
2μ	0	1	1	2
$2\mu+1$	0	1	1	1

Tabloul nr. 2

Valorile ν'

m \ j	0	1	2	3
2μ	ν	$\nu-1$	ν	$\nu-1$
$2\mu+1$	$\nu-1$	ν*)	$\nu-1$	ν

*) pentru $r=0$ și $j=1$ avem $\nu' = \nu - 2$.

În general $\nu''=\nu$ cu excepția cazului pentru $r=0$ și $j=1$, cînd $\nu''=\nu-1$.

Dacă în relațiile (15) respectiv (16) se înlocuiesc valorile a_{m-2}, a_{m-3}, a_{m-4} cu cele date de (17), se obțin relațiile

$$\begin{aligned}
&6!\, a_6x^6 = 3!\, a_3x^3 z(x)\, 3 + 2!\, a_2x^2 [z^2(x)\, \alpha'^2(x)\, N_2^{1,1} + wx^4] \\
&+ a_1 x z^2(x)\, \alpha'(x)\, N_1^{1,0} + a_0 wx^4\, \alpha'(x)\, N_4^{0,0} \\
&7!\, a_7x^7 = 3!\, a_3x^3 [z^2(x)\, \alpha'^2(x)\, N_3^{1,1} + wx^4\, N_7^{0,0} \\
&+ 2!\, a_2x^2 [z^2(x)\, \alpha'(x)\, N_2^{1,0} + z^2(x)\, \alpha'(x)\, 4\, N_2^{1,1}] \\
&+ a_1 x [z^2(x)\, \alpha'^2(x)\, N_1^{1,0} + wx^4 z(x)\, \alpha'(x)\, N_5^{0,0}] + a_0\, wx^4\, z(x)\, 4\, N_4^{0,0}
\end{aligned} \tag{21}$$

Dacă se compară mai întîi primele două relații din (17) cu cele din (15) și apoi restul relațiilor (17) cu cele din (21), prin identificare se obțin numerele $N_j^{k,k-u}$ în funcție de cele precedente, după cum sînt redate în tabloul nr. 3.

Din examinarea tabloului nr. 3 se observă următoarea formulă de recurență

$$N_{j+4r}^{k,\,k-u} = N_{j+4r}^{k-1,\,k-u-1} + (j+4r+2k+u-3)\, N_{j+4r}^{k-1\,k-u} + N_{j+4r\,(r-1)}^{k,\,k-u} \tag{22}$$

valabilă pentru $k-u \geqslant 1$; $u \geqslant 1$; $r \geqslant 1$; $j \leqslant 4$ pentru $u=0$ avem $N_j^{k,\,k} = 1$, iar pentru $k-u=0$ avem $N_j^{k,0} = [j+3(k-1)]!!!$ deoarece $N_j^{k-1,\,k-u-1} = 0$.

Pentru $r=0$ rămîne valabilă formula (15) din lucrarea precedentă [2], ceea ce înseamnă că ultimul termen $N_{j-4}^{k,\,k-u}$ din relația (22) se consideră nul. În acest caz numerele $N_j^{k,\,k-u}$ au fost calculate în lucrarea menționată pentru $k \leqslant 4$ și numerele $N_{j+4r}^{k,\,k-u}$ calculate cu formula (22) pentru $r>0$ sînt date în tabloul nr. 4.

Tabloul nr. 3

Numerele $N_j^{k,k-u}$ în funcţie de numerele precedente

$N_0^{0,0} = 1$

$N_1^{0,0} = 1$

$N_1^{1,1} = N_1^{0,0}$ $\quad N_1^{1,0} = 1$

.

.

.

$N_2^{0,0} = 1$

$N_2^{1,1} = N_2^{0,0}$ $\quad N_2^{1,0} = 2$

$N_2^{2,2} = N_2^{1,1}$ $\quad N_2^{2,1} = N_2^{1,0} + 4\,N_2^{1,1}$ $\quad N_2^{3,0} = 5\,N_2^{1,0}$

$N_2^{3,3} = N_2^{2,2}$ $\quad N_2^{3,2} = N_2^{2,1} + 6\,N_2^{2,2}$ $\quad N_2^{3,1} = N_2^{2,0} + 7\,N_2^{2,1}$ $\quad N_2^{3,0} = 8N_2^{3,0}$

.

.

.

$N_5^{0,0} = 1$

$N_5^{1,1} = N_5^{0,0}$ $\quad N_5^{1,1} = 5\,N_5^{0,0} + N_1^{1,0}$

$N_5^{2,2} = N_5^{1,1}$ $\quad N_5^{2,1} = N_5^{1,0} + 7\,N_5^{1,1} + N_4^{1,1}$ $\quad N_5^{2,0} = 8\,N_5^{1,0} + N_4^{1,0}$

$N_5^{3,3} = N_5^{2,2}$ $\quad N_5^{3,2} = N_5^{2,1} + 9\,N_5^{2,2} + N_4^{2,2}$ $\quad N_5^{3,1} = N_5^{2,0} + 10\,N_5^{2,1} + N_4^{2,1}$ $\quad N_5^{3,0} = 11N_5^{2,0} + N_4^{2,0}$

.

.

.

$N_6^{0,0} = 1$

$N_6^{1,1} = N_6^{0,0} + N_2^{1,1}$ $\quad N_6^{1,0} = 6\,N_6^{0,0} + N_2^{1,0}$

$N_6^{2,2} = N_6^{1,1} + N_2^{2,2}$ $\quad N_6^{2,1} = N_6^{1,0} + 8\,N_6^{1,1} + N_2^{2,1}$ $\quad N_6^{2,0} = 9\,N_6^{1,0} + N_2^{2,0}$

$N_6^{3,3} = N_6^{2,2} + N_2^{3,3}$ $\quad N_6^{3,2} = N_6^{2,1} + 10\,N_6^{2,2} + N_2^{3,2}$ $\quad N_6^{3,1} = N_6^{2,0} + 11\,N_6^{2,1} + N_2^{3,1}$ $\quad N_6^{3,0} = 12N_6^{2,0} + N_2^{3,0}$

.

Tabloul nr. 4

Numerele $N_{j+4}^{k,\,k-u}$

$N_5^{0,0}=1$						
$N_5^{1,1}=1$	$N_5^{1,0}=6$					
$N_5^{2,2}=1$	$N_5^{2,1}=14$	$N_5^{2,0}=52$				
$N_5^{3,3}=1$	$N_5^{3,2}=24$	$N_5^{3,1}=202$	$N_5^{3,0}=600$			
$N_5^{4,4}=1$	$N_5^{4,3}=36$	$N_5^{4,2}=508$	$N_5^{4,1}=3\,344$	$N_5^{4,0}=8\,640$		
$N_6^{5,5}=1$	$N_5^{5,4}=50$	$N_5^{5,3}=1\,040$	$N_5^{5,2}=11\,280$	$N_5^{5,1}=63\,816$	$N_5^{5,0}=151\,200$	
$N_6^{0,0}=1$						
$N_6^{1,1}=2$	$N_6^{1,0}=8$					
$N_6^{2,2}=3$	$N_6^{2,1}=30$	$N_6^{2,0}=82$				
$N_6^{3,3}=4$	$N_6^{3,2}=72$	$N_6^{3,1}=167$	$N_7^{3,0}=1\,064$			
$N_6^{4,4}=5$	$N_6^{4,3}=140$	$N_6^{4,2}=1\,263$	$N_6^{4,1}=4\,002$	$N_6^{4,0}=68\,034$		
$N_6^{5,5}=6$	$N_6^{5,4}=240$	$N_6^{5,3}=3\,743$	$N_6^{5,2}=26\,730$	$N_6^{5,1}=93\,554$	$N_6^{5,0}=332\,280$	
$N_7^{0,0}=1$						
$N_7^{1,1}=2$	$N_7^{1,0}=10$					
$N_7^{2,2}=3$	$N_7^{2,1}=36$	$N_7^{2,0}=118$				
$N_7^{3,3}=4$	$N_7^{3,2}=84$	$N_7^{3,1}=632$	$N_7^{3,0}=1\,696$			
$N_7^{4,4}=5$	$N_7^{4,3}=160$	$N_7^{4,2}=2\,040$	$N_7^{4,1}=12\,240$	$N_7^{4,0}=29\,080$		
$N_7^{5,5}=6$	$N_7^{5,4}=270$	$N_7^{5,3}=5\,120$	$N_7^{5,2}=51\,000$	$N_7^{5,1}=266\,240$	$N_7^{5,0}=581\,680$	
$N_8^{0,0}=1$						
$N_8^{1,1}=2$	$N_8^{1,0}=12$					
$N_8^{2,2}=3$	$N_8^{2,1}=42$	$N_8^{2,0}=160$				
$N_8^{3,3}=4$	$N_8^{3,2}=96$	$N_8^{3,1}=824$	$N_8^{3,0}=2\,520$			
$N_8^{4,4}=5$	$N_8^{4,3}=180$	$N_8^{4,2}=2\,580$	$N_8^{4,1}=17\,400$	$N_8^{4,0}=46\,480$		
$N_8^{5,5}=6$	$N_8^{5,4}=300$	$N_8^{5,3}=6\,320$	$N_8^{5,2}=69\,960$	$N_8^{5,1}=376\,160$	$N_8^{5,0}=987\,840$	
$N_9^{0,0}=1$				$N_{13}^{0,0}=1$		
$N_9^{1,1}=2$	$N_9^{1,0}=15$			$N_{13}^{1,1}=3$	$N_{13}^{1,0}=28$	
$N_9^{2,2}=3$	$N_9^{2,1}=51$	$N_9^{2,0}=232$		$N_{14}^{0,0}=1$		
$N_9^{3,3}=4$	$N_9^{3,2}=114$	$N_9^{3,1}=1\,148$	$N_9^{3,0}=4\,080$	$N_{14}^{1,1}=4$	$N_{14}^{1,0}=32$	
$N_{10}^{0,0}=1$				$N_{15}^{0,0}=1$		
$N_{10}^{1,1}=3$	$N_{10}^{1,0}=18$			$N_{15}^{1,1}=4$	$N_{15}^{1,0}=36$	
$N_{10}^{2,2}=6$	$N_{10}^{2,1}=84$	$N_{10}^{2,0}=316$				
$N_{10}^{3,3}=10$	$N_{10}^{3,2}=240$	$N_{10}^{3,1}=1\,743$	$N_{10}^{3,0}=6\,120$	$N_{16}^{0,0}=1$		
$N_{11}^{0,0}=1$				$N_{16}^{1,1}=4$	$N_{16}^{1,0}=40$	
$N_{11}^{1,1}=3$	$N_{11}^{1,0}=21$					
$N_{11}^{2,2}=6$	$N_{11}^{2,1}=96$	$N_{11}^{2,0}=412$				
$N_{11}^{3,3}=10$	$N_{11}^{3,2}=270$	$N_{11}^{3,1}=2\,580$	$N_{11}^{3,0}=8\,700$			
$N_{12}^{0,0}=1$						
$N_{12}^{1,1}=3$	$N_{12}^{1,0}=24$					
$N_{12}^{2,2}=6$	$N_{12}^{2,1}=108$	$N_{12}^{2,0}=520$				
$N_{12}^{3,3}=10$	$N_{12}^{3,2}=300$	$N_{12}^{3,1}=3\,180$	$N_{12}^{3,0}=11\,880$			

Observație. Ținînd seama de (3), relația (12) devine

$$z(x) = qx^3/EI \tag{23}$$

și însemnînd cu μ masa unității de lungime de prăjină avem

$$\mu = q/g, \tag{24}$$

încît relația (9) devine

$$w = \omega^2\mu/EI. \tag{25}$$

Dacă neglijăm greutatea proprie făcînd pe $q = 0$ în relația (23) și luăm totuși în considerare masa prăjinilor adică $\mu \neq 0$, din relațiile (23) și (25) obținem

$$z(x) = 0 \quad \text{însă} \quad w \neq 0. \tag{26}$$

Avînd în vedere condițiile (26), relația (14) devine

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 &\left[\frac{1}{0!} + \frac{wx^4}{4!} + \frac{(wx^4)^2}{8!} + \frac{(wx^4)^3}{12!} + \dots\right] \\ &+ a_1 x\left[\frac{1}{1!} + \frac{wx^4}{5!} + \frac{(wx^4)^2}{9!} + \frac{(wx^4)^3}{13!} + \dots\right] \\ &+ 2!\,a_2x^2\left[\frac{1}{2!} + \frac{wx^4}{6!} + \frac{(wx^4)^2}{10!} + \frac{(wx^4)^3}{14!} + \dots\right] \\ &+ 3!\,a_3x^3\left[\frac{1}{3!} + \frac{wx^4}{7!} + \frac{(wx^4)^2}{11!} + \frac{(wx^4)^3}{15!} + \dots\right] \end{aligned} \tag{27}$$

Funcțiile hiperbolice și trigonometrice exprimate prin serii sînt date de formulele

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(xw^{1/4}) &= 1 + \frac{x^2w^{1/2}}{2!} + \frac{x^4w}{4!} + \frac{x^6w^{3/2}}{6!} + \dots \\ \operatorname{sh}(xw^{1/4}) &= xw^{1/4}\left[1 + \frac{x^2w^{1/2}}{3!} + \frac{x^4w}{5!} + \frac{x^6w^{3/2}}{7!} + \dots\right] \\ \cos(x\,w^{1/4}) &= 1 - \frac{x^2w^{1/2}}{3!} + \frac{x^4w}{4!} - \frac{x^6w^{3/2}}{6!} + \dots \\ \sin(x\,w^{1/4}) &= x\,w^{1/4}\left[\frac{1}{1!} - \frac{x^2w^{1/2}}{3!} + \frac{x^4w}{5!} - \frac{x^6w^{3/2}}{7!}\right], \end{aligned} \tag{28}$$

care înlocuite în (27) ne dau

$$\begin{aligned} 2y(x) = a_0&[\operatorname{ch}(xw^{1/4}) + \cos(xw^{1/4})] \\ &+ \frac{a_1}{w^{1/4}}[\operatorname{sh}(xw^{1/4}) + \sin(xw^{1/4})] \\ &+ \frac{2!\,a_2}{w^{1/2}}[\operatorname{ch}(xw^{1/4}) - \cos(xw^{1/4})] \\ &+ \frac{3!\,a_3}{w^{1/2}}[\operatorname{sh}(xw^{1/4}) - \sin(xw^{1/4})]. \end{aligned} \tag{29}$$

Relația (29) se mai poate pune sub forma

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(w^{1/4}x) + C_2 \operatorname{sh}(w^{1/4}x) + C_3 \cos(w^{1/4}x) + C_4 \sin(w^{1/4}x), \tag{30}$$

în care

$$C_1 = \frac{1}{2}(a_0 + 2!\, a_2 w^{-1/2}) \quad , \quad C_2 = \frac{1}{2}(a_1 w^{-1/4} + 3!\, a_3 w^{-3/4}) \tag{31}$$

$$C_3 = \frac{1}{2}(a_0 - 2!\, a_2 w^{-1/2}) \quad , \quad C_4 = \frac{1}{2}(a_1 w^{-1/4} - 3!\, a_3 w^{-3/4})$$

Observăm că relația (30) este tocmai relația (26) din [1], în care

$$N_0 = q\,h = 0, \tag{32}$$

întrucît această condiție am admis-o implicit prin relațiile (26); ceea ce constituie o verificare.

CONCLUZII

Prin urmare integrala ecuației (1) este dată de relația (14), care se poate pune sub forma

$$y(x) = \sum_{j=0}^{3} j!\, a_j\, x^j\, \psi_j(x), \tag{33}$$

în care

$$\Psi_j(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (wx^4)^r\, \Xi_{j+4r} \tag{34}$$

valabilă pentru $j \geqslant 2$, iar pentru $j = 1$

$$\Psi_1(x) = \frac{N_1^{0,0}}{1!} + z(x)\, \Xi_4(x) + \sum_{r=1}^{\infty} (wx^4)^r\, \Xi_{1+4r}(x)$$

pentru $j = 0$

$$\Psi_0(x) = \frac{N_0^{0,0}}{0!} + \sum_{r=1}^{\infty} (wx^4)^r\, \Xi_{4r}(x)$$

și

$$\Xi_{j+4r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x)\, \frac{N_{j+4r}^{k,k-u}}{(j+4r+2k+u)!}\,. \tag{35}$$

Pentru $r = 0$ relația (35) devine relația (14) din lucrarea menționată [2].

Numerele $N_{j+4r}^{k,k-u}$ sînt date în tabloul nr. 4.

Pentru $\omega = 0$, din relația (9), se deduce că și $w = 0$, încît funcțiile Ψ_j din relația (34) devin funcțiile Ξ_j studiate anterior [2], [3] și care în cazurile extreme (pentru $\alpha(x) \to \infty$) degenerează în funcții trigonometrice, iar în cazurile particulare (pentru $\alpha(x) = 1$) devin funcții Bessel $J_m(Z_1)$. În condițiile (26), ținînd seama de (33) și (29), rezultă că funcțiile $\Psi_j(x)$ devin sume sau diferențe de funcții hiperbolice și trigonometrice.

Prin urmare funcțiile $\Psi_j(x)$, care devin în cazuri particulare funcții Bessel, trigonometrice sau hiperbolice, sînt mai generale decît acestea.

Să derivăm relaţia (33) de i ori

$$y^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{3} j!\, a_j\, x^{j-i} \Psi_j^{(i)}(x) \tag{36}$$

în care $\Psi_j^{(i)}(x)$ ca şi $\Xi_{j+4r}^{(i)}(x)$ nu mai înseamnă derivate de ordinul i, ci sînt definite de relaţiile

$$\Psi_j^{(i)}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (wx^4)^r\, \Xi_{j+4r}^{(i)} \tag{37}$$

$$\Xi_{j+4r}^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k(x) \sum_{u=0}^{k} \alpha'^{k-u}(x) \frac{N_{j+4r}^{k,k-u}}{(j+4r+2k+u-i)} \tag{38}$$

valabile pentru $j \geqslant 2$ şi pentru $i \geqslant 2$.

Rezultatele obţinute le folosim la problema instabilităţii de rotaţie a tijelor verticale, zvelte şi grele cu aplicaţii la garnitura prăjinilor de foraj; studiu necesar determinării regimului de foraj în tehnologia de săpare a sondelor.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ В ВОПРОСЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИХ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой статье, автор возвращается к выше формулированному вопросу, который был разрешен ранее [1] для случая невращающегося стержня ($\omega = 0$), трактуя теперь более общий случай, в котором рассматривается это вращение. Задача заключается в интегрировании общего уравнения (1) путем того же метода, то есть при помощи ряда целых степеней (4). Вводя это выражение в соотношение (1) путем отождествления, получаем возвратную формулу (8), посредством которой можно вычислить последовательные члены рядов, которые выражают искомый интеграл.

Так как вычисление большинства членов является затруднительной операцией, то предпочтительно выразить интеграл уравнения (1) в виде (14). Числа: $N_j^{k,k-u}$ получаются путем отождествления отношений (17) с отношениями (15) и (21), что приводит к возвратной формуле (22), по которой и были вычислены числа, указанные в таблице 4.

Необходимо заметить, что при известных предпосылках, то есть пренебрегая собственным весом ($q = 0$) в отношении (23), но, принимая во внимание массу μ единицы длины стержня в отношениях (23) и (25) ($\mu \neq 0$), получаем условие (26) и посредством этого из (14) отношение (30). Соответствие отношений (30) и (26) из [1] при помощи (32) составляет проверку.

В заключение искомый интеграл принимает форму (33), в которой функции $\Psi_j(x)$ и $\Xi_{j+4r}(x)$ даны соответственно формулами (34) и (35). Установлено, что функции $\Psi_j(x)$ в частных случаях становятся функциями Бесселя, тригонометрическими или гиперболическими, и вследствие этого первые функции являются более общими, чем последние.

Полученные результаты применяются в вопросе о неустойчивости вертикальных, гибких и тяжелых стержней во время их вращательного движения и используемых для бурильных труб стержней; эти исследования необходимы для определения режима бурения в технологии бурения скважин.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE LA LIGNE ÉLASTIQUE DANS L'INSTABILITÉ DE ROTATION DES TIGES VERTICALES

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note, l'Auteur reprend le problème énoncé, résolu antérieurement [1], pour le cas d'une tige sans rotation, ($\omega = 0$), dans un cas plus général où l'on tient également compte de la rotation ($\omega \neq 0$). Il est question de l'intégration de l'équation générale (1) à l'aide de la même méthode, c'est-à dire en utilisant les séries infinies des puissances entières (4). En introduisant cette expression dans la relation (1), on obtient, par identification, la formule de récurrence (8), à l'aide de laquelle on peut calculer les termes successifs des séries qui expriment l'intégrale cherchée.

De cette façon, les calculs sont laborieux pour un grand nombre de termes, de sorte qu'il est préférable d'exprimer l'intégrale de l'équation (1) sous la forme (14). Les nombres $N_j^{k,k-u}$ s'obtiennent par identification en comparant les relations (18) aux relations (15) et (21), qui mènent à la formule de récurrence (22), à l'aide de laquelle on a calculé les nombres inscrits dans le tableau 3.

On observe que, si l'on néglige le poids propre ($q = 0$) dans la relation (23), mais en tenant quand même compte de la masse μ de l'unité de longueur de tige dans (23) et (25), ($\mu \neq 0$), on obtient les conditions (26) qui transforment la relation (14) en (30). En tenant compte de (32), la relation (30) concorde avec la relation (26) de [1], ce qui constitue une vérification.

En conclusion, on trouve que l'intégrale cherchée peut être mise sous la forme (33), dans laquelle les fonctions $\Psi_j(x)$ sont données par la formule (34), et $\Xi_{j+4r}(x)$ par la formule (35). On constate que les fonctions $\Psi_j(x)$, qui deviennent dans des cas particuliers des fonctions de Bessel, trigonométriques ou hyperboliques, sont donc plus générales que ces dernières.

En conclusion, on montre que les résultats obtenus sont utilisés dans les problèmes de l'instabilité de rotation de tiges verticales, sveltes et lourdes, avec applications à la garniture de tiges de forage, étude nécessaire à la détermination du régime de forage, dans la technologie du forage des puits de pétrole.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, *Asupra instabilității tijelor verticale, grele, zvelte și în rotație.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 157.
2. — *Despre integrarea ecuației liniei elastice în flambajul tijelor verticale, grele și zvelte.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. III, nr. 1—2, ianuarie—iunie, 1952, p. 53.
3. — *Cazurile particulare ale unei clase de funcții cu aplicații la flambajul tijelor.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

STUDIUL STĂRII DE EFORTURI ÎN PLĂCILE CURBE SUBŢIRI ÎN FORMĂ DE SUPRAFEŢE CU DOUĂ PARABOLE DIRECTOARE ŞI PLAN DIRECTOR, ÎN TEORIA DE MEMBRANĂ

DE

MIRCEA SOARE

INTRODUCERE

Este bine cunoscut faptul că dintre toate sistemele constructive, plăcile curbe subţiri prezintă indicii tehnico-economici cei mai favorabili, în cazul deschiderilor mari şi al suprafeţelor mari de acoperit, fără rezemări intermediare.

Calculul static al acestor plăci curbe subţiri este foarte complex din cauza dificultăţilor de ordin matematic. Determinarea stării de eforturi prezintă un cîmp aproape inepuizabil de studiu, întrucît această stare diferă, de la caz la caz, în funcţie de forma suprafeţei mediane, de grosimea şi modul de rezemare a plăcii pe contur şi de natura sarcinilor aplicate.

Cu prilejul elaborării proiectelor unor elemente prefabricate din beton armat pentru acoperirea halelor industriale, una din soluţiile studiate prevedea utilizarea plăcilor curbe subţiri la care suprafaţa mediană avea forma unei suprafeţe cu două parabole directoare şi plan director. Cu această ocazie ne-am pus problema determinării efective a stării de eforturi într-o asemenea placă. Vom reda în cele ce urmează rezultatele teoretice la care am ajuns.

În studiul de faţă ne vom ocupa de determinarea stării de eforturi în *teoria de membrană*, într-o placă curbă subţire, la care suprafaţa mediană are forma unei suprafeţe cu două directoare parabolice şi plan director. Sarcinile pentru care am stabilit expresiile eforturilor sînt: greutatea proprie, zăpada, vîntul (precum şi orice alte sarcini care admit legi de variaţie asemănătoare).

Suprafeţele cu două directoare şi plan director fac parte dintre suprafeţele riglate şi sînt generate — din punct de vedere geometric — de o dreaptă variabilă, paralelă cu un plan fix, numit plan director şi care se sprijină pe două curbe fixe, numite directoare.

În cazul particular, cînd amîndouă directoarele sînt drepte nesituate în acelaşi plan, suprafaţa este un paraboloid hiperbolic, iar dacă numai una dintre curbele directoare este o dreaptă, suprafaţa se numeşte conoid.

În literatura de specialitate există două studii, unul referitor la stările de eforturi în paraboloidul hiperbolic [1], celălalt referitor la conoidul parabolic [2]. Al doilea studiu reprezintă de fapt o schiţare a problemei, deoarece stabileşte soluţiile fără a preciza funcţiile de integrare.

Studiul analitic al eforturilor în ipoteza de membrană a fost făcut pentru prima dată de Mircea Mihailescu, care a stabilit formulele generale pentru eforturi, cu precizarea funcţiilor de integrare [3], [4].

Ulterior, în cadrul unei lucrări referitoare la aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul suprafeţelor subţiri, am dat formulele generale, care permit stabilirea valorilor numerice ale eforturilor în suprafeţele cu două directoare şi plan director [5].

Metoda ecuaţiilor cu diferenţe finite, deşi prezintă avantaje incontestabile, printre care avantajul esenţial este de a permite studiul numeric l eforturilor atunci cînd nu dispunem de un calcul analitic, are totuşi dezavantajul că este laborioasă şi comportă, pentru determinarea eforturilor într-un anumit punct al suprafeţei, determinarea eforturilor în toate punctele reţelei pentru care se formează diferenţele.

Ori de cîte ori se cunoaşte soluţia analitică, este indicat să o utilizăm pe aceasta, întrucît permite obţinerea directă a valorilor eforturilor în orice punct al suprafeţei.

I. ECUAŢIILE GENERALE

§ 1. Elemente geometrice. Notaţii

Ca sistem de axe de referinţă se alege un sistem ortogonal oarecare $Oxyz$; fie $z = f(x, y)$ ecuaţia suprafeţei mediane, raportată la acest sistem de axe.

Dacă se notează cu l distanţa dintre planele curbelor directoare (presupuse paralele între ele şi normale pe planul director),

$z_1 = f_1(y)$ ecuaţia primei curbe directoare de capăt,

$z_2 = f_2(y)$ ecuaţia celei de a doua curbe directoare de capăt,

şi se aleg axele de coordonate Oyz în planul primei curbe directoare, atunci ecuaţia suprafeţei se scrie

$$z = \frac{l-x}{l} \cdot f_1(y) + \frac{x}{l} \cdot f_2(y). \tag{1.1}$$

Ţinînd seama de notaţiile lui Monge, derivatele succesive au expresiile

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{f_2(y) - f_1(y)}{l}, \\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \psi = \dfrac{l-x}{l} \cdot f_1'(y) + \dfrac{x}{l} \cdot f_2'(y), \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv 0, \\ s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{f_2'(y) - f_1'(y)}{l}, \\ t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{l-x}{l} \cdot f_1''(y) + \dfrac{x}{l} \cdot f_2''(y), \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{f_2''(y) - f_1''(y)}{l}. \tag{1.4}$$

§ 2. Sarcini exterioare. Eforturi interioare

Sarcina exterioară se descompune în componente de intensitate F_x, F_y, F_z dirijate respectiv după tangenta la suprafaţă în direcţia x, după tangenta la suprafaţă în direcţia y şi după normala în punctul considerat.

În placă apar trei eforturi interioare și anume:
N_x, N_y eforturile normale în secțiunile $x = \text{const.}$, respectiv $y = \text{const.}$;
$N_{xy} = N_{yx}$ eforturile de lunecare în aceleași secțiuni.

Sistemul de ecuații de echilibru se scrie mai ușor dacă, în locul unui element de suprafață reală, se consideră proiecția acestuia pe planul Oxy și în locul componentelor sarcinii exterioare F_x, F_y, F_z și ale eforturilor N_x, N_y, $N_{xy} = N_{yx}$ se introduc proiecțiile acestora pe același plan Oxy, fie X, Y, Z și respectiv S_x, S_y, T (fig. 1).

Unghiurile φ, respectiv ψ, pe care le fac cu planul Oxy tangentele într-un punct a suprafață, paralele cu axele Ox, respectiv Oy, se deduc cu ajutorul relațiilor diferențiale de mai sus.

Între componentele sarcinii care acționează asupra elementului de placă real și asupra celui proiectat, există relațiile

$$X = \frac{F_x}{\cos\varphi \cdot \cos\psi};$$

$$Y = \frac{F_y}{\cos\varphi \cdot \cos\psi};$$

$$Z = \frac{F_z}{\cos\varphi \cdot \cos\psi}.$$

Deoarece componentele X, Y, Z se pot evalua mai ușor, în cele ce urmează le vom deduce direct.

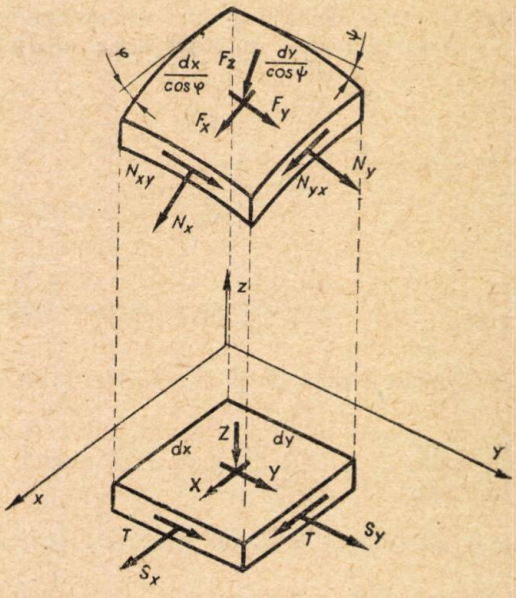


Fig. 1

Între eforturile reale și cele proiectate există relațiile

$$\begin{cases} N_x = S_x \cdot \dfrac{\cos\psi}{\cos\varphi}, \\ N_y = S_y \cdot \dfrac{\cos\varphi}{\cos\psi}, \\ N_{xy} = N_{yx} = T. \end{cases} \tag{2.1}$$

§ 3. Ecuațiile de echilibru

Ecuațiile de echilibru stabilite în teoria de membrană se scriu

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + X = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + Y = 0, \tag{3.2}$$

$$rS_x + 2sT + tS_y = pX + qY - Z. \tag{3.3}$$

Este bine cunoscut faptul că în teoria de membrană starea de eforturi din placă este static determinată, cele trei necunoscute putînd fi determinate din ecuaţiile de echilibru.

Întrucît în cazul suprafeţelor de care ne ocupăm, avem $r \equiv 0$, se observă uşor că relaţiile (3.2) şi (3.3) permit deducerea lui S_y şi T; odată cunoscut T, din (3.1) rezultă şi S_x.

Ultima ecuaţie de echilibru (3.3) constituie o relaţie algebrică între S_y şi T, care permite deducerea unei necunoscute, cînd cealaltă este precizată.

Această relaţie se poate scrie sub una din următoarele forme:

$$T = -\frac{t}{2s} S_y + \frac{pX + qY - Z}{2s}, \tag{3.4}$$

$$S_y = -\frac{2s}{t} T + \frac{pX + qY - Z}{t}. \tag{3.5}$$

§ 4. Ecuaţia cu derivate parţiale în S_y şi integrarea ei

Ţinînd seama de (1.2), (1.3) şi (1.4) calculăm pe $\frac{\partial T}{\partial x}$ din (3.4):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2s}\left(\frac{\partial s}{\partial y} S_y + t \frac{\partial S_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} Y + \frac{1}{2s}\left(p \frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

şi îl introducem în (3.2). Grupînd convenabil termenii, se obţine

$$t \frac{\partial S_y}{\partial x} - 2s \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial y} S_y - \left(3sY + p \frac{\partial X}{\partial x} + q \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = 0, \tag{4.1}$$

care constituie o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întîi, liniară şi neomogenă. Pentru a găsi integrala sa generală, se asociază sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{t} = -\frac{dy}{2s} = \frac{dS_y}{3sY + p \frac{\partial X}{\partial x} + q \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y} S_y}. \tag{4.2}$$

Din ultimele două rapoarte se obţine

$$\frac{\partial S_y}{\partial y} - \frac{1}{2s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} S_y + 3sY + p \frac{\partial X}{\partial x} + q \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0. \tag{4.3}$$

Această ecuaţie diferenţială în S_y este liniară şi are soluţia *)

$$S_y = \sqrt{s}\left[C_1 - \frac{1}{2}\int_0^y \frac{1}{s\sqrt{s}}\left(3sY + p \frac{\partial X}{\partial x} + q \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dy\right],$$

*) Pe baza acestei ecuaţii a fost stabilită soluţia generală din [4]. În cazul cînd X, Y, Z sînt funcţii numai de y, se regăseşte relaţia (45) din lucrarea citată.

care se poate scrie, final, sub forma

$$\frac{S_y}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{1}{s\sqrt{s}}\left(3sY + p\frac{\partial X}{\partial x} + q\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dy = C_1 \tag{4.4}$$

care C_1 este o constantă arbitrară.

Din primele două rapoarte ale relației (4.2) se deduce

$$2\sqrt{s}\cdot dx + \frac{t}{\sqrt{s}}\cdot dy = 0$$

care este o diferențială exactă, întrucît $\frac{\partial}{\partial y}(2\sqrt{s}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)$. De aceea integrala primă va fi

$$\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}dy = C_2\,. \tag{4.5}$$

Se observă că atît pentru prima integrală (4.4), cît și în acest caz, cînd $y=0$, s de la numitor se anulează; deci, la limita inferioară, expresia de sub semnul integral devine infinită; integrala este totuși convergentă, pentru că exponentul lui s este mai mic decît 1 *).

Integrala generală a ecuației cu derivate parțiale (4.1) va fi o funcție arbitrară față de cele două integrale prime, egalată cu zero. Considerînd această relație rezolvată în raport cu prima dintre ele, se obține

$$\frac{S_y}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{1}{s\sqrt{s}}\left(3sY + p\frac{\partial X}{\partial x} + q\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dy = \Omega\left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}dy\right)$$

sau

$$S_y = -\frac{\sqrt{s}}{2}\int_0^y \frac{1}{s\sqrt{s}}\left(3sY + p\frac{\partial X}{\partial x} + q\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dy + \sqrt{s}\cdot\Omega\left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}dy\right). \tag{4.6}$$

Soluția generală se compune așadar din doi termeni, dintre care primul

$$S_{y0} = -\frac{\sqrt{s}}{2}\int_0^y \frac{1}{s\sqrt{s}}\left(3sY + p\frac{\partial X}{\partial x} + q\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dy \tag{4.7}$$

reprezintă o soluție particulară, funcție de sarcini exterioare, și o soluție

$$\bar{S}_y = \sqrt{s}\cdot\Omega\left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}dy\right) \tag{4.8}$$

a ecuației omogene. Precizarea acestei funcții arbitrare de argumentul

$$\mathfrak{A} = \int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}dy \tag{4.9}$$

urmează să se facă din condiții limită.

*) Vezi [4], p. 141.

§ 5. Introducerea unei funcții de eforturi

Rezultatele precedente se pot obține pe o cale simplă, urmînd o metodă indicată de P u c h e r [6], analogă cu tratarea problemelor de elasticitate plană și anume introducerea unei funcții de eforturi.

Se demonstrează că, întocmai ca în cazul șaibelor, eforturile pot fi exprimate prin intermediul unei singure funcții de eforturi F, după cum urmează:

$$\begin{cases} S_x = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx, \\ S_y = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy \\ T = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Cu acestea, ecuațiile (3.1) și (3.2) sînt identic verificate, iar a treia, ținînd seama de (1.3), se scrie

$$-2s \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + t \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -Z + pX + qY + t \int Y dy.$$

Împărțind, termen cu termen, cu $\sqrt{s}$ și notînd, pentru comoditatea scrierii:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{s}} \left(+ pX + qY - Z + t \int Y dy \right), \tag{5.2}$$

ecuația cu derivate parțiale precedentă devine

$$-2\sqrt{s} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{t}{\sqrt{s}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \Theta. \tag{5.3}$$

Considerînd în (5.3) ca funcție necunoscută pe $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, ecuației cu derivate parțiale de ordinul întîi, liniară și neomogenă, i se poate asocia sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{t} = -\frac{dy}{2s} = \frac{d\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)}{\Theta \sqrt{s}} \tag{5.4}$$

perfect analog sistemului (4.2).

Soluția generală se poate pune sub forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^x \frac{\Theta \sqrt{s}}{t} dx + \Omega \left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}} dy \right), \tag{5.5}$$

în care funcția Ω are aceeași semnificație ca și la paragraful 4.

Prin derivarea expresiei precedente în raport cu x și y, se pot forma, cu ajutorul relațiilor (5.1), expresiile eforturilor S_y, respectiv T.

Pentru deducerea lui S_x, se integrează în prealabil, odată în raport cu x, apoi se derivează de două ori în raport cu y.

Precizarea funcției Ω se face așa cum se indică în paragrafele 7, 8 și 9.

§ 6. Cazul directoarelor parabolice

În continuare, vom particulariza soluția precedentă pentru cazul suprafețelor cu două parabole directoare și plan director.

Alegînd originea axelor de coordonate în vîrful primei parabole, ecuațiile celor două directoare se scriu

$$z_1 = f_1(y) = a_1 y^2$$

$$z_2 = f_2(y) = a_2 y^2 + b_2 .$$

Ecuația suprafeței mediane devine

$$z = \frac{l - x}{l} \cdot a_1 y^2 + \frac{x}{l} (a_2 y^2 + b_2).$$

Derivatele parțiale succesive ale funcției $z = f(x, y)$ se scriu

$$\begin{cases} p = \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{(a_1 - a_2) y^2 + b_2}{l} \\ q = \operatorname{tg} \psi = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \left(\dfrac{l - x}{l} a_1 + \dfrac{x}{l} a_2 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv 0 \\ s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \dfrac{2(a_2 - a_1)}{l} y \\ t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \left(\dfrac{l - x}{l} a_1 + \dfrac{x}{l} a_2 \right) \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2} = \frac{2(a_2 - a_1)}{l} .$$

Se va observa că între mărimile precedente există relațiile

$$\operatorname{tg} \psi = ty \quad ; \quad s = y \frac{\partial s}{\partial y} \tag{6.2}$$

precum și faptul că $\dfrac{\partial s}{\partial y} = \text{const.}$, $\operatorname{tg} \varphi$ este funcție doar de y, iar t funcție doar de x.

Ne propunem să arătăm că, dacă cele două directoare sînt parabole situate în plane paralele, suprafața este un conoid.

Într-adevăr, din ecuația suprafeței se de uce că intersecția cu un plan $x = x_0 = \text{const.}$, paralel cu planul Oyz, este totdeauna o parabolă de ecuație

$$z = \frac{(l - x_0) a_1 + x a_2}{l} y^2 + \frac{b_2 x_0}{l}$$

cu excepția planului de ecuație

$$x = x_0 = \frac{a_1 l}{a_1 - a_2} ,$$

cînd parabola degenerează în dreapta de la infinit și dreapta de ecuație

$$z = \frac{a_1 b_2}{a_1 - a_2} .$$

Acest lucru este explicabil prin faptul că o suprafață de acest gen admite o infinitate de curbe directoare, dintre care, în cazuri particulare, una poate degenera într-o dreaptă.

Ținînd seama de aceste considerente, expresia lui S_y pentru o încărcare oare care se scrie după cum urmează :

$$S_y = -\frac{\sqrt{y}}{2\dfrac{\partial s}{\partial y}} \int_0^y \frac{1}{y\sqrt{y}} \left(3sY + p\frac{\partial X}{\partial x} + q\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dy + \sqrt{y} \cdot \Omega(t\sqrt{y}). \tag{6.3}$$

O dată stabilită formula generală pentru efortul S_y, vom putea trece la calculul efectiv prin particularizarea sarcinilor exterioare.

II. DEDUCEREA EFORTURILOR ÎN FUNCȚIE DE SARCINILE EXTERIOARE

§ 7. Greutatea proprie

Admițînd că placa are grosimea $\delta = \delta_0 \cos\varphi$ și greutatea tehnică a materialului este γ, pe unitatea de suprafață curbă avem $g_1 = \gamma\delta_0 \cos\varphi = g\cos\varphi$ $(g = \gamma\delta_0)$ iar componentele sarcinii au valorile

$$X = Y \equiv 0 \quad ; \quad Z = \frac{g}{\cos\psi} . \tag{7.1}$$

Din (7.1) se calculează derivata în raport cu x, care intervine în (6.3)

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = g\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}) = g\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{1+t^2y^2}) = g\frac{\partial s}{\partial y}\cdot\frac{ty^2}{\sqrt{1+t^2y^2}} .$$

Înainte de a trece la calculul propriu-zis, vom observa că încărcarea este simetrică în raport cu generatoarea de creștet a suprafeței. Singura condiție limită care se poate pune este ca, din motive de simetrie, să avem

$$(T)_{y=0} = 0. \tag{7.2}$$

Din (3.5) rezultă atunci imediat

$$(S_y)_{y=0} = -\left(\frac{Z}{t}\right)_{y=0} = -\frac{g}{t} . \tag{7.3}$$

O dată această precizare făcută, vom trece la stabilirea *soluției particulare* S_{y0}. Cunoscînd pe $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ și ținînd seama de (7.1), avem

$$S_{y0} = \frac{\sqrt{y}}{2\dfrac{\partial s}{\partial y}} \int_0^y \frac{g}{y\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} \cdot \frac{ty^2}{\sqrt{1+t^2y^2}}\, dy = \frac{g\sqrt{ty}}{2t} \int_0^y \frac{\sqrt{ty}\cdot d(ty)}{\sqrt{1+t^2y^2}}$$

sau în cele din urmă

$$S_{y0} = \frac{g\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{2t}\int_0^{\operatorname{tg}\psi} \frac{\operatorname{tg}\psi \cdot d(\operatorname{tg}\psi)}{\sqrt{\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}^3\psi}} = \frac{g\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{2t} \cdot I_0 . \tag{7.4}$$

Integrala de efectuat (I_0) este o integrală eliptică, deoarece sub radical avem un polinom de gradul al treilea. Pentru a o reduce la forma canonică, se face substituția

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad d(\operatorname{tg}\psi) = \frac{2\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}\, d\alpha. \tag{7.5}$$

Integrala de efectuat se scrie

$$I_0 = \int_0^{\operatorname{tg}\psi} \frac{\operatorname{tg}\psi \cdot d(\operatorname{tg}\psi)}{\sqrt{\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}^3\psi}} = \int_0^{2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi})} \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha}} .$$

Expresia de sub semnul integral se poate aduce la forma

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}} - 2\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha} + 2\frac{d}{d\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}\right).$$

Integrînd membru cu membru și notînd integralele eliptice [7]:

$$F(\alpha, k) = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}$$

$$E(\alpha, k) = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}\cdot d\alpha,$$

unde modulul are valoarea $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, expresia integralei I_0 devine

$$I_0 = F\left[2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - 2E\left[2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + 2\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}\right|_0^{2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi})}$$

sau în cele din urmă

$$I_0 = F\left[2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - 2E\left[2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \frac{2\sqrt{\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}^3\varphi}}{1+\operatorname{tg}\psi}. \tag{7.6}$$

Substituind această valoare în (7.4), se obține

$$S_{y0} = \frac{g}{t}\left\{\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{2} \cdot F\left[2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \sqrt{\operatorname{tg}\psi}\cdot E\left[2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\psi + \cos\psi}\right\}. \tag{7.7}$$

Valorile integralelor eliptice, pentru diferiți α și k, se găsesc întabulate [7]. Expresia din interiorul acoladelor reprezintă o funcție numai de tg ψ și poate fi întabulată.

Pentru $y = 0$, tg $\psi = 0$ și $S_{y0} = 0$. Condiția limită (7.3) nu este satisfăcută; în schimb se respectă simetria în raport cu generatoarea de creștet.

Soluția ecuației omogene se poate determina pe mai multe căi.

Ținînd seama de faptul că funcția $\sqrt{y} \cdot \Omega(t\sqrt{y})$ trebuie să fie reală pentru $-\infty < y < +\infty$, să fie pară în raport cu y și pentru $y = 0$ să aibă o valoare diferită de zero, sîntem conduși să considerăm următoarea dezvoltare în serie de puteri:

$$\sqrt{y} \cdot \Omega(t\sqrt{y}) = \sqrt{y}\left[\frac{D_{-1}}{t\sqrt{y}} + D_3 \cdot t^3 y\sqrt{y} + D_7 \cdot t^7 \cdot y^3\sqrt{y} + \dots\right] =$$

$$= \frac{D_{-1}}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} D_{4n-1} \cdot t^{4n-1} \cdot y^{2n}, \tag{7.8}$$

în care D_{-1}, D_3, D_7, ..., D_{4n-1}, reprezintă constante arbitrare.

În lungul generatoarei de creștet avem

$$\left[\sqrt{y} \cdot \Omega(t\sqrt{y})\right]_{y=0} = \frac{D_{-1}}{t}.$$

Valoarea constantei D_{-1} se determină astfel încît soluția totală $(S_{y0} + \bar{S}_y)$ să satisfacă condiția limită (7.3). Această relație se scrie sub forma

$$\frac{D_{-1}}{t} = -\frac{g}{t}$$

de unde rezultă *)

$$D_{-1} = -g. \tag{7.9}$$

Problema determinării constantelor D_{4n-1} $(n = 1, 2, 3, \dots)$ prezintă un alt aspect.

---

*) La același rezultat se ajunge urmînd procedeul considerat de M. Mihailescu în [4], precizînd funcția Ω prin tratarea ca o problemă de tip Cauchy. Funcția transcrisă cu notațiile noastre este dată de relația

$$\Omega\left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}\,dy\right) = -\frac{1}{\int_0^y A\frac{t}{\sqrt{s}}\,dy}$$

$$\text{în care } A = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial s}{\partial y}}{Z}\right)_{y=0}.$$

Prin înlocuirea lui Z și s cu expresiile utilizate precedent se deduce

$$\Omega\left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}\,dy\right) = \frac{(Z)_{y=0}}{\sqrt{\frac{\partial s}{\partial y}} \cdot t\sqrt{y}} \quad \text{și} \quad \sqrt{s} \cdot \Omega\left(\int_0^y \frac{t}{\sqrt{s}}\,dy\right) = -\frac{g}{t}.$$

În cazurile obișnuite, în lungul generatoarelor marginale nu se pot impune condiții de contur, ceea ce se explică prin faptul că generatoarele sînt linii asimptotice ale suprafeței [8], [9].

Din condiția de minim a lucrului mecanic de deformație al plăcii și ținînd seama că starea de eforturi este static determinată, rezultă că toate aceste constante sînt nule.

Limitîndu-ne la acest caz, expresia totală a lui S_y este

$$S_y = S_{y0} + \bar{S}_y = -\frac{g}{t} + \frac{g}{t}\left\{\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{2} F\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\operatorname{tg}\psi} \cdot E\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\psi + \cos\psi}\right\}. \tag{7.10}$$

Efortul de boltă real N_y se obține din a doua relație (2.1) și se poate scrie sub forma finală

$$N_y = -\frac{g k_{1g} \cdot \cos\varphi}{t} \tag{7.11}$$

în care

$$k_{1g} = -\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{2\cos\psi} \cdot F\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{\cos\psi} \cdot E\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\cos\psi} - \frac{\operatorname{tg}\psi\,(1 + \operatorname{tg}^2\psi)}{1 + \operatorname{tg}\psi}. \tag{7.12}$$

Coeficientul k_{1g}, dat de relația (7.12), este funcție doar de tg ψ și poate fi întabulat. Valorile lui sînt date în anexa nr. 1.

În mod analog se poate proceda și pentru eforturile de lunecare.

Înlocuind pe tS_y dat de (7.10) în (3.4) se obține

$$T = -\frac{tS_y + Z}{2s}$$

sau cum $N_{xy} = N_{yx} = T$

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{g k_{2g}}{s} \tag{7.13}$$

în care

$$k_{2g} = \frac{1}{2\cos\psi} + \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{4} \cdot F\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] - \frac{\sqrt{\operatorname{tg}\psi}}{2} \cdot E\left[2\operatorname{arctg}(\sqrt{\operatorname{tg}\psi}); \frac{1}{\sqrt{2}}\right] -$$

$$- \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}\psi}{2(\sin\psi + \cos\psi)} = -\frac{1}{2} k_{1g} \cdot \cos\psi + \frac{1}{2\cos\psi}. \tag{7.14}$$

Coeficientul k_{2g}, dat de relația (7.14), este funcție doar de tg ψ și poate fi întabulat. Valorile lui sînt de asemenea date în anexa nr. 1.

Expresiile lui S_x și N_x nu se mai pot obține sub o formă atît de simplă, datorită dificultăților de integrare.

Un procedeu de obținere de valori numerice constă în aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite. Din ecuația (3.1), făcută omogenă ($X=0$), se deduce *)

$$S_x^{m+1,n} = S_x^{m,n} - \frac{\Delta x}{\Delta y}\left(T^{m,n+1} - T^{m,n}\right) \tag{7.15}$$

sau însumînd în raport cu m

$$S_x^{m+1,n} = -\frac{\Delta x}{\Delta y}\sum_m \left(T^{m,n+1} - T^{m,n}\right). \tag{7.16}$$

Funcția de integrare, care intervine la determinarea lui S_x, se determină obișnuit din condiția ca în secțiunea de capăt ($x=0$) să avem $S_x=0$. În relația (7.16), s-a admis, în conformitate cu cele de mai sus, că $S_x^{0,n}=0$.

★

Considerăm util să insistăm puțin asupra condițiilor de rezemare.

Expresia generală a eforturilor de boltă N_y depinde de o funcție de integrare, care se determină, în cazul suprafeței și al sarcinilor simetrice, din condiția ca eforturile de lunecare T să fie nule în lungul generatoarei de creștet. Odată determinată această funcție de integrare, N_y și N_{xy} rezultă cu valori bine precizate în lungul generatoarelor marginale, adică nu se pot impune condiții de contur. Explicația constă în faptul că generatoarele sînt linii asimptotice ale suprafeței [8], [9].

Același lucru se petrece și cu eforturile longitudinale S_x, respectiv N_x.

Expresia generală a lui S_x comportă de asemenea o funcție de integrare, care se determină, de obicei, din condiția ca la unul din capete, de exemplu $x=0$, să avem $S_x=0$; aceasta datorită faptului că rezemarea se face pe timpane, care au rigiditate transversală foarte mică. Întrucît determinarea celei de a doua funcții de integrare nu se poate face decît ținînd seama de condiția $S_x=0$ la un singur capăt, pe celălalt timpan vor rezulta împingeri N_x.

Astfel, odată fixată poziția timpanului pentru care $S_x=0$, eforturile longitudinale în orice secțiune x au de asemenea valori bine precizate.

Observațiile precedente, precum și examinarea expresiilor eforturilor și a valorilor coeficienților k_{1g} și k_{2g} din anexa nr. 1 ne permit stabilirea unei aprecieri calitative a stării de eforturi în conoidul parabolic supus greutății proprii, în teoria de membrană **).

In secțiune transversală (x = const.). Coeficientul k_{1g} poate fi considerat ca o ecuație transcendentă în tg ψ, cu o rădăcină reală tg $\psi_1 \sim 2,1$.

Pentru tg $\psi <$ tg ψ_1 avem $k_{1g} > 0$,
iar pentru tg $\psi >$ tg ψ_1 $k_{1g} < 0$.

Pe intervalul $0 \leqslant$ tg $\psi \leqslant$ tg ψ_1 eforturile de boltă N_y reprezintă compresiuni. În dreptul generatoarei de creștet, ele au valoarea $\left(-\frac{g}{t}\right)$, cresc pînă ating un maxim, apoi descresc, anulîndu-se pentru tg ψ = tg ψ_1 și final, cresc nedefinit, o dată cu tg ψ, reprezentînd eforturi de întindere.

*) Pentru detalii asupra aplicării ecuațiilor cu diferențe finite, vezi [5].

**) Această stare va fi diferită, în oarecare măsură, în teoria încovoierii, datorită faptului că, în acest caz, se poate ține seama de toate condițiile de rezemare, în particular și în lungul generatoarelor marginale. Rezultatele din teoria de membrană vor putea fi folosite ca soluție particulară, pentru aplicațiile tehnice.

Eforturile de lunecare N_{yx} cresc nedefinit, de la valoarea zero în dreptul generatoarei de creștet, întrucît, pentru orice tg ψ avem

$$k_{2g} > 0.$$

Eforturile longitudinale N_x reprezintă compresiuni. Ele au o variație asemănătoare cu N_y.

In secțiune longitudinală (y = const.).

Vom presupune, fără a reduce cu nimic generalitatea problemei, că prima directoare de capăt este parabola de ecuație $z_1 = a_1 y^2$, iar a doua este dreapta

$$z_2 = \frac{a_1 b_2}{a_1 - a_2}.$$

Eforturile de boltă N_y variază, în sensul axei Ox, o dată cu factorul $\frac{1}{t}$ sau, ceea ce este echivalent, cu factorul $\frac{1}{t^n}$ $(n \geqslant 1)$. Pentru $x = 0$ rezultă o valoare finită.

Derivata $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t^n}\right) = \frac{2n(a_1 - a_2)}{t^{n+1}} > 0$, deci funcția este crescătoare. La limită, cînd $x = x_0 = \frac{a_1 l}{a_1 - a_2}$, rezultă valori infinite pentru N_y.

Acest rezultat contravine sensului fizic al problemei și explicația constă în faptul că ipoteza de membrană nu mai este aplicabilă. Ca și în cazul plăcilor plane, în regiunile plăcilor curbe subțiri, în care razele de curbură cresc nedefinit, echilibrul interior nu mai poate fi asigurat prin eforturile de membrană N_x, N_y și $N_{xy} = N_{yx}$ (cuprinse în planul tangent la suprafața mediană), ci trebuie să fie considerată starea de încovoiere. Pînă în momentul de față nu avem cunoștință de aplicarea teoriei încovoierii la suprafețele cu două directoare și plan director.

Eforturile de lunecare N_{xy} variază, în sensul axei Ox o dată cu termenul k_{2g}, căci $s \cos \varphi$ este funcție numai de y. Expresia lui tg ψ se poate aduce la forma

$$\operatorname{tg} \psi = y \cdot \frac{\partial s}{\partial y}(x_0 - x) > 0.$$

Cînd x crește de la zero la x_0, tg ψ scade și o dată cu aceasta și k_{2g}, pînă la zero. La limită, cînd $x = x_0$, $N_{xy} = 0$.

Putem să ne dăm seama, în sfîrșit, și de jocul de eforturi N_x, în lungul generatoarelor. Din relația (7.16) se citește că S_x (și deci N_r) crește, o dată cu x, însă păstrînd o valoare finită. Acest rezultat este ușor de înțeles și intuitiv, dată fiind analogia cu o grindă încărcată cu sarcini oblice, la care unul dintre reazeme trebuie să fie articulat, astfel încît componenta axială a reacțiunii să împiedice deplasarea grinzii în lungul ei.

§ 8. Încărcarea cu zăpadă

Un caz foarte simplu de tratat este acela al încărcării cu zăpadă (p_z), presupusă uniform distribuită în planul Oxy. Componentele sarcinii au expresiile

$$X = Y \equiv 0; \quad Z = p_z \ (= \text{const.}). \tag{8.1}$$

După cum se constată uşor, soluţia particulară S_{y0} este identic nulă; pentru soluţia ecuaţiei omogene, procedînd ca şi în cazul greutăţii proprii, se obţine

$$\overline{S}_y = -\frac{p_z}{t},$$

care exprimă că proiecţia efortului de boltă pe planul Oxy este constant. Din a doua relaţie (3.1) se deduce

$$N_y = -\frac{p_z \cdot \cos\varphi}{t \cos\psi}. \tag{8.2}$$

Substituind expresia lui S_y în (3.4) rezultă imediat

$$T = N_{xy} = N_{yx} \equiv 0, \tag{8.3}$$

iar din (3.1), în aceleaşi condiţii de rezemare care au fost admise şi în cazul greutăţii proprii,

$$S_x \equiv 0 \text{ şi } N_x \equiv 0. \tag{8.4}$$

Rezultatele precedente se explică prin faptul că orice secţiune transversală a suprafeţei (secţiune paralelă cu planul Oyz) este o parabolă, care constituie curba funiculară a sarcinii uniform distribuite pe orizontală. Prin aceasta, placa nu mai are o comportare spaţială, iar efectul de grindă (apariţia eforturilor în lungul generatoarelor) dispare [4].

★

Formula (8.2) permite aprecierea calitativă a stării de eforturi datorite încărcării cu zăpadă.

Eforturile de boltă sînt totdeauna compresiuni. În secţiune transversală ($x = \text{const.}$), N_y scade de la valoarea maximă la cheie $\left(-\frac{p_z \cdot \cos\varphi_0}{t}\right)$, la zero, deoarece

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{1 + t^2 y^2}{1 + \left[\frac{(a_1 - a_2)\, y^2 + b_2}{l}\right]^2}} = 0.$$

În lungul generatoarelor ($y = \text{const.}$), N_y creşte, luînd valori infinite în secţiunea $x = x_0 = \frac{a_1 l}{a_1 - a_2}$ (pe directoarea dreaptă a conoidului).

Acest rezultat se explică, ca şi în cazul greutăţii proprii, prin nevalabilitatea aplicării teoriei de membrană.

§ 9. Presiunea vîntului

În cazul acţiunii vîntului, vom alege o variaţie în secţiune transversală după o lege sinusoidală şi anume:

$$X = Y \equiv 0; \quad Z = \frac{p_v \cdot \sin\psi}{\cos\psi} = p_c \cdot \operatorname{tg}\psi = p_v \cdot ty. \tag{9.1}$$

Pentru obținerea soluției particulare, calculăm derivata în raport cu x:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = p_v \cdot \frac{\partial}{\partial x}(ty) = p_v y \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = p_v y \cdot \frac{\partial s}{\partial y}.$$

Conform relației (6.3) avem

$$S_{y0} = \frac{\sqrt{y}}{2\dfrac{\partial s}{\partial y}} \int_0^y \frac{1}{y\sqrt{y}} \cdot p_v \cdot y \cdot \frac{\partial s}{\partial y} dy = p_v \cdot y.$$

Cum pentru $y = 0$, din motive de antisimetrie trebuie să avem $S_y = 0$, rezultă că este satisfăcută condiția limită în lungul generatoarei de creștet și nu mai este necesară considerarea soluției ecuației omogene *).

Efortul de boltă real N_y rezultă sub forma

$$N_y = S_y \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \frac{p_v \cdot y \cos\varphi}{\cos\psi}. \tag{9.2}$$

Lunecările T se deduc direct din (3.4) și, după efectuarea unor calcule simple, se obține

$$T = N_{xy} = N_{yx} = -\frac{p_v t}{\dfrac{\partial s}{\partial y}} = -p_v(x_0 - x); \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \tag{9.3}$$

Din ecuația (3.1) se deduce

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

și prin integrare

$$S_x = 0.$$

Condiția limită impusă a fost ca pentru $x = 0$, pe primul timpan, să nu apară împingeri în lungul generatoarelor.

Din prima relație (2.1) se deduce efortul longitudinal

$$N_x = 0. \tag{9.4}$$

★

Relațiile precedente ne permit o apreciere calitativă a stării de eforturi produsă de presiunea vîntului.

În secțiune transversală, eforturile de boltă N_y cresc de la valoarea zero (la cheie), o dată cu abscisa y, pînă la o valoare finită $2p_v(x_0 - x)$.

În lungul generatoarelor, N_y descrește pînă la valoarea $(p_v y \cdot \cos\varphi)$ în dreptul directoarei rectilinii.

---

*) Cu alte cuvinte, coeficientul D_{-1} și toți coeficienții D_{4n-1} din (7.8) trebuie considerați egali cu zero.

Eforturile de lunecare $N_{xy} = N_{yx}$ rămîn constante în secţiune transversală. În secţiune longitudinală ele variază liniar cu x, descrescînd pînă la zero în dreptul directoarei rectilinii.

§ 10. Verificarea rezultatelor

O verificare globală a rezultatelor se poate face exprimînd echilibrul pe verticală al unei jumătăţi de placă (secţionată după generatoarea de creştet). Pentru aceasta, este necesar ca rezultanta sarcinilor exterioare (G) să fie egală cu suma componentelor verticale ale eforturilor tangenţiale de pe timpane (T_1 şi T_2), ale eforturilor tangenţiale de pe generatoarea marginală (T^1), ale eforturilor de boltă din lungul generatoarei marginale (N) şi ale eforturilor longitudinale de la timpanul al doilea (N^1).

Expresiile acestor forţe rezultante verticale se scriu:

$$G = g\int_0^{d/2}\int_0^{l}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\cdot\cos\varphi\cdot dx\,dy, \qquad \text{(pentru greutatea proprie)}$$

$$T_1 = \int_0^{d/2}(N_{xy})_{x=0}\cdot\sin\psi\cdot\frac{dy}{\cos\psi} = \int_0^{d/2}(N_{xy})_{x=0}\cdot\operatorname{tg}\psi\cdot dy,$$

$$T_2 = \int_0^{d/2}(N_{xy})_{x=l}\cdot\sin\psi\cdot\frac{dy}{\cos\psi} = \int_0^{d/2}(N_{xy})_{x=l}\cdot\operatorname{tg}\psi\cdot dy,$$

$$T^1 = \int_0^{l}(N_{yx})_{y=\frac{d}{2}}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{dx}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\int_0^{l}(N_{yx})_{y=\frac{d}{2}}\cdot dx,$$

$$N = \int_0^{l}(N_y)_{y=\frac{d}{2}}\cdot\sin\psi\cdot\frac{dx}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}\int_0^{l}(N_y)_{y=\frac{d}{2}}\cdot\sin\psi\cdot dx,$$

$$N^1 = \int_0^{d/2}(N_x)_{x=l}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{dy}{\cos\psi} = \sin\varphi\int_0^{d/2}(N_x)_{x=l}\cdot\frac{dy}{\cos\psi}.$$

Pentru calculul numeric, integralele precedente pot fi transformate în sume.

§ 11. Exemplu de calcul

Să se determine starea de eforturi în placa curbă subţire de beton armat ce acoperă o hală industrială, avînd în plan suprafaţa dreptunghiulară $d \cdot l$. Suprafaţa mediană a plăcii este o suprafaţă cu două directoare parabolice şi plan director. Încărcarea constă din greutatea proprie.

Date numerice: $d = 15$ m; $l = 12$ m; $\gamma = 2400$ kg/m^3; $\delta_0 = 8$ cm.

Săgeata primei directoare de capăt: $f_1 = 4$ m.

Săgeata celeilalte directoare de capăt: $f_2 = 2$ m.

Alegînd originea în vîrful primei directoare (fig. 2), ecuația suprafeței se scrie:

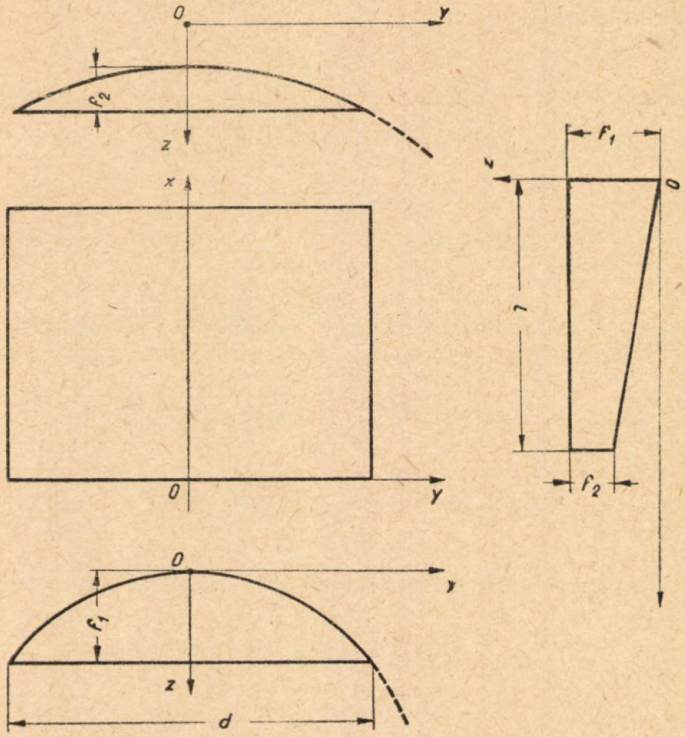


Fig. 2

$$z = \frac{4f_1 y^2}{d^2} \cdot \frac{l-x}{l} + \left(\frac{4f_2 y^2}{d^2} + f_1 - f_2\right)\frac{x}{l} = \frac{-8xy^2 + 192y^3 + 450x}{2\,700} \quad (x, y, z \text{ în m})$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_1 - f_2}{l}\left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right) = \frac{450 - 8y^2}{2\,700}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{8y}{ld^2}[(l-x)f_1 + xf_2] = \frac{16y(24-x)}{2\,700}$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{8(f_1 - f_2)y}{l\,d^2} = -\frac{16y}{2\,700}$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8}{l\,d^2}[(l-x)f_1 + xf_2] = \frac{16\ (24-x)}{2\,700}$$

$$g = \gamma\delta_0 = 2\,400 \times 0{,}08 = 192 \text{ kg/m}^2.$$

Să calculăm de exemplu pe N_y și N_{xy} în colțul ($x = l = 9\ m$; $y = \frac{d}{2} = 7{,}5$ m). Calculăm valorile auxiliare

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{4f_2}{d} = 0{,}5333;$$
$$\operatorname{tg} \varphi = 0;\ \cos \varphi = 1;$$

$$\frac{1}{t} = \frac{d^2}{8f_2} = 14{,}0625.$$

La anexa nr. 1, corespunzător lui $\operatorname{tg} \psi = 0{,}5333$ se citește, prin interpolare liniară, $k_{1g} = 1{,}0354$. Cu acestea se obține

$$N_y = -192 \times 14{,}0625 \times 1{,}0354 = -2796 \text{ kg/m},$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{\delta} = -\frac{27{,}96}{8} = -3{,}50 \text{ kg/cm}^2.$$

Să mai calculăm efortul de lunecare N_{xy} în colțul ($x = 0$; $y = \frac{d}{2} = 7{,}5$ m).

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{4f_1}{d} = 1{,}0667;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0;\ \cos \varphi = 1;$$

$$\frac{1}{s} = -\frac{ld}{4(f_1 - f_2)} = -22{,}50.$$

În anexa nr. 1, corespunzător lui $\operatorname{tg} \psi = 1{,}0667$, se citește, prin interpolare liniară, $k_{2g} = 0{,}3896$.

$$N_{xy} = 192 \times 22{,}50 \times 0{,}3896 = 1\,683 \text{ kg/m}$$

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{\delta} = \frac{16{,}83}{8} = 2{,}10 \text{ kg/cm}^2.$$

★

Vom mai examina în sfîrșit cazul cînd cele două parabole directoare sînt identice. Aceasta se traduce analitic prin condiția $a_1 = a_2$. Termenul $b_2 \neq 0$ arată că generatoarele nu sînt normale pe planele curbelor directoare. Se recunoaște ușor că, în acest caz conoidul se reduce la un cilindru. Ecuațiile generale nu se pot deduce din ecuațiile precedente, relative la suprafețele cu două directoare și plan director, însă se pot stabili ușor pe cale directă.

ANEXA nr. 1

Valorile coeficienţilor k_{1g} şi k_{2g} în funcţie de tg ψ

$\alpha°$	tgψ	k_{1g}	k_{2g}	$\alpha°$	tgψ	k_{1g}	k_{2g}
0	0,0000	1,0000	0,0000	97	1,2769	0,9011	0,5261
15	0,0173	1,0001	0,0001	98	1,3234	0,8753	0,5578
—	0,05	1,0005	0,0013	99	1,3709	0,8451	0,5906
30	0,0718	1,0008	0,0021	100	1,4202	0,8106	0,6252
35	0,0994	1,0016	0,0041	101	1,4714	0,7740	0,6617
—	0,10	1,0017	0,0041	102	1,5250	0,7302	0,6997
40	0,1325	1,0029	0,0073	103	1,5805	0,6804	0,7399
—	0,15	1,0037	0,0095	104	1,6384	0,6254	0,7825
45	0,1716	1,0047	0,0122	105	1,6984	0,5610	0,8268
—	0,20	1,0064	0,0167	106	1,7609	0,4911	0,8740
50	0,2174	1,0074	0,0195	107	1,8252	0,4075	0,9226
—	0,25	1,0126	0,0224	108	1,8944	0,3166	0,9760
55	0,2710	1,0160	0,0301	109	1,9656	0,1141	1,0309
—	0,30	1,0187	0,0371	110	2,0396	0,0986	1,0886
60	0,3333	1,0219	0,0452	111	2,1170	— 0,0310	1,1496
—	0,35	1,0236	0,0500	112	2,1978	— 0,1791	1,2138
—	0,40	1,0278	0,0645	113	2,2830	— 0,3429	1,2821
65	0,4059	1,0294	0,0662	114	2,3712	— 0,5273	1,3533
—	0,45	1,0323	0,0811	115	2,4638	— 0,7344	1,4286
70	0,4903	1,0350	0,0947	116	2,5610	— 0,9685	1,5084
—	0,50	1,0351	0,0987	117	2,6630	— 1,2307	1,5925
—	0,55	1,0356	0,1187	118	2,7699	— 1,5233	1,6814
75	0,5888	1,0360	0,1343	119	2,8820	— 1,8539	1,7750
—	0,60	1,0364	0,1392	120	3,0000	— 2,2248	1,8743
76	0,6104	1,0369	0,1437	121	3,1240	— 2,6179	1,9792
77	0,6327	1,0377	0,1535	122	3,2544	— 3,1099	2,0868
—	0,65	1,0381	0,1614	123	3,3921	— 3,6376	2,2080
78	0,6556	1,0382	0,1640	124	3,5371	— 4,2321	2,3327
79	0,6795	1,0385	0,1752	125	3,6902	— 4,9009	2,4652
—	0,70	1,0386	0,1850	126	3,8518	— 5,6556	2,6053
80	0,7041	1,0386	0,1870	127	4,0228	— 6,5051	2,7546
81	0,7295	1,0381	0,1994	128	4,2037	— 7,3217	2,9133
—	0,75	1,0374	0,2097	129	4,3953	— 8,5541	3,1095
82	0,7557	1,0373	0,2126	130	4,5988	— 9,7861	3,2620
83	0,7827	1,0361	0,2265	131	4,8149	— 11,1827	3,4538
—	0,80	1,0350	0,2357	132	5,0445	— 12,7683	3,6584
84	0,8107	1,0343	0,2413	133	5,2893	— 14,5712	3,8775
85	0,8396	1,0318	0,2568	134	5,5500	— 16,6252	4,1116
—	0,85	1,0307	0,2625	135	5,8284	— 18,9694	4,3624
86	0,8696	1,0286	0,2733	136	6,1260	— 21,6501	4,6334
—	0,90	1,0247	0,2905	137	6,4446	— 24,7207	4,9209
87	0,9006	1,0245	0,2908	138	6,7865	— 28,2451	5,2321
88	0,9326	1,0195	0,3090	139	7,1533	— 32,3075	5,5667
—	0,95	1,0162	0,3192	140	7,5487	— 36,9995	5,9287
89	0,9657	1,0133	0,3284	141	7,9750	— 42,4130	6,3205
90	1,0000	1,0069	0,3489	142	8,4344	— 48,7059	6,7433
91	1,0335	0,9970	0,3689	143	8,9323	— 56,0285	7,2040
—	1,05	0,9917	0,3792	144	9,4721	— 64,670	7,7043
92	1,0779	0,9864	0,3929	145	10,0588	— 136,588	8,2389
—	1,10	0,9779	0,4105	150	13,9280	— 316,178	11,875
93	1,1104	0,9740	0,4171	155	20,346	— 848,15	17,946
94	1,1499	0,9595	0,4423	160	32,164	— 2900,3	29,265
95	1,1909	0,9434	0,4690	180	∞	$-\infty$	∞
96	1,2332	0,9239	0,4968				

ANEXA nr. 2

Tabelă recapitulativă cu expresiile eforturilor și componentele sarcinilor exterioare

Sarcini	Efortul (normal) de boltă $N_y =$	Eforturi de lunecare $N_{xy} = N_{yx} =$	Efort (normal) longitudinal $N_x =$
Greutatea proprie $X = Y \equiv 0$ $Z = \frac{g}{\cos \psi}$	$-\frac{gk_{1g} \cos \varphi}{t}$ *)	$-\frac{gk_{2g}}{s}$ *)	$-\frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_m (T^{m,n+1} - T^{m,n})$
Zăpadă $X = Y \equiv 0$ $Z = p_z$	$-\frac{p_z \cdot \cos \varphi}{t \cdot \cos \psi}$	0	0
Presiunea vîntului $X = Y \equiv 0$ $z = p_v \cdot \operatorname{tg} \psi$	$\frac{p_v \cdot y \cos \varphi}{\cos \psi}$	$-p_v (x_0 - x)$	0

*) Valorile coeficienților k_{1g}, k_{2g} în funcție de $\operatorname{tg} \psi$ sînt date în anexa nr. 1.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ УСИЛИЙ НА ТОНКИХ ОБОЛОЧКАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

На основе общеизвестных формул, которые определяют усилия в тонких оболочках, имеющих как среднюю поверхность — поверхность с двумя директрисами и направляющей плоскостью, решаются все интегралы в случае параболических директрис и нагрузок, происходящих от собственного веса, снега, ветра.

В приложении № 2 приводятся установленные обыкновенные формулы.

В приложении № 1 внесены в таблицы, в зависимости от $\operatorname{tg} \psi$, коэффициенты k_{1g} и k_{2g}, применяемые в случае собственной тяжести.

Работа дополнена качественными определениями о состоянии усилий в тонкой оболочке.

ÉTUDE DE L'ÉTAT DES EFFORTS DANS LES VOILES MINCES AYANT LA FORME DE SURFACES ADMETTANT DEUX PARABOLES DIRECTRICES ET UN PLAN DIRECTEUR, DANS LA THÉORIE DE MEMBRANE

(RÉSUMÉ)

A partir des formules générales connues, qui déterminent les efforts dans les voiles minces, ayant pour surface médiane une surface à deux directrices et un plan directeur, on effectue toutes les intégrales, dans le cas des directrices

paraboliques et des charges provenant du poids propre, neige et vent. Dans l'Annexe n° 2, on récapitule les formules simples établies. Dans l'Annexe n° 1, on a indiqué dans un tableau, en fonction de tg ψ, les coefficients k_{1g} et k_{2g}, qui interviennent dans le cas du poids propre.

L'étude est complétée par des appréciations qualitatives en ce qui concerne l'état des efforts dans les voiles minces.

BIBLIOGRAFIE

1. F. Aimond, *Étude statique des voiles minces en paraboloïde hyperbolique travaillant sans flexion.* Mémoires de l'Association internationale des ponts et des charpentes, 1935, vol. IV.
2. L. Issenmann Pilarski, *Calcul des voiles minces en béton armé.* Ed. Dunod, Paris, 1942.
3. Mircea Mihailescu, *Construcția unei remize de locomotive.* Revista construcții ASIT, 1951, nr. 4.
4. — *Studiu asupra învelitorilor subțiri cu două directoare și plan director în ipoteza de membrană.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 129.
5. Mircea Soare, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul suprafețelor subțiri.* E.S.A.C., București, 1954.
6. Adolf Pucher, *Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen.* Beton und Eisen, 1934, caiet 19, p. 298.
7. B. I. Segal și K. A. Semendiaev, *Tabele matematice cu cinci zecimale.* Izd. Acad. Nauk SSSR, Moscova—Leningrad, 1950.
8. Mircea Mihailescu, *Cîteva observații în legătură cu studiul și proiectarea învelitorilor subțiri.* Revista Industria constr. și a mat. de constr., 1952, nr. 9.
9. — *Criterii generale pentru calculul învelitorilor subțiri.* Bul. științ. Acad. R.P.R. Secția de științe tehnice și chimice, 1954, t. VI, p. 109.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

STAREA DE EFORTURI ŞI DE MOMENTE PURE ALE SUPRAFEŢEI SUBŢIRI SFERICE

DE

VIOREL VISARION

1. Introducere

În lucrarea [1], A. L. Goldenweizer arată că pentru a găsi integrala generală a sistemului omogen de ecuaţii al suprafeţei subţiri sferice, trebuie să se adauge integralei generale a sistemului de ecuaţii al stării de tensiuni mixte *) toate stările în care

$$T = T_1 + T_2 = 0 \quad , \quad G = G_1 + G_2 = 0. \tag{1.1}$$

Ecuaţiile deduse pentru învelitoarea sferică în cazul omogen

$$-R^2 \Delta T - (1+\sigma) T + \frac{k^2+\sigma^2}{1+\sigma} \frac{1}{R} G = 0,$$

$$R\Delta G + (1+\sigma) T + \frac{1+\sigma}{R} G = 0$$

arată însă că

$$\begin{aligned} T &= 0 \quad \text{atrage} \quad G = 0 \\ G &= 0 \quad \text{atrage} \quad T = 0 \,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aceasta demonstrează că cele două stări de tensiune
$T = 0$ denumită «starea de eforturi pure»,
$G = 0$ denumită «starea de momente pure»,
îşi condiţionează reciproc existenţa, ceea ce arată că studiul celor două stări de tensiune este natural a se face concomitent, sub aspectul unei stări unice «starea de eforturi şi de momente pure».

Relaţiile de definiţie ale acestei stări sînt $T = 0$, $G = 0$.

În cele ce urmează se vor deduce ecuaţiile pe care le satisfac deplasările, funcţiile de tensiune şi eforturile, precum şi soluţiile acestor ecuaţii, în cazul stării de eforturi şi de momente pure.

*) Starea de tensiuni mixte corespunde soluţiei sistemului omogen cu excluderea soluţiei banale.

Se vor aplica rezultatele pentru cazul acțiunii forțelor concentrate, calcul făcut în lucrarea [1], prin adunarea unor soluții particulare în deplasări ale celor două stări de tensiune a și b, pe o cale mai puțin naturală și mai laborioasă.

2. Coordonate izoterme pe sferă

În linii de curbură principală, expresia elementului de arc al sferei este dată de

$$ds^2 = A^2\, d\alpha^2 + B^2\, d\beta^2 \,. \tag{2.1}$$

Liniile izoterme sînt acele curbe coordonate pentru care

$$A = B \,. \tag{2.2}$$

Un sistem de coordonate izoterme se obține din sistemul de coordonate geografice

$$\zeta = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \eta = \sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \cos\theta,$$

prin schimbarea de variabile $x = \ln \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$, $y = \varphi$ deducîndu-se

$$ds^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}(dx^2 + dy^2). \tag{2.3}$$

Se cunoaște faptul că schimbarea de coordonate

$$x = x(\alpha, \beta) \quad , \quad y = y(\alpha, \beta), \tag{2.4}$$

care face trecerea de la x, y la α, β, astfel ca funcția

$$f(\zeta) = x + i\,y = f(\alpha + i\,\beta)$$

să fie analitică, definește un nou sistem de coordonate izoterme pe sferă. În noile coordonate se deduce

$$ds^2 = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}{\operatorname{ch}^2 x(\alpha, \beta)}(d\alpha^2 + d\beta^2)\,.$$

Proiectînd sfera stereografic pe planul ecuatorial, deplasînd-o apoi paralel cu el și reproiectînd stereografic înapoi pe sferă, A. A. G v o z d e v dă astfel un sistem izoterm, ce poate include printre liniile sale coordonate, două secțiuni arbitrar date. Sistemul este izoterm deoarece se deduce din (2.3) printr-o transformare analitică liniară. Acest sistem permite simplificarea tratării învelitorii subțiri sferice a căror margini sînt obținute cu secțiuni plane oarecare.

În coordonate izoterme, ecuațiile stării de eforturi pure sînt date de

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\,(A^2 T_1)}{\partial\,\alpha} + \frac{\partial\,(A^2 S)}{\partial\,\beta} = 0, \\ &\frac{\partial\,(A^2 S)}{\partial\,\alpha} - \frac{\partial\,(A^2 T_1)}{\partial\,\beta} = 0, \\ &T_1 + T_2 = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

sistem ce se obține în cazul tratării învelitorii sferice după așa-zisa teorie de membrană; un sistem analog se obține și în cazul stării de momente pure

$$\frac{\partial (A^2 G_1)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (A^2 H)}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial (A^2 H)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (A^2 G_1)}{\partial \beta} = 0. \tag{2.6}$$

$$G_1 + G_2 = 0 .$$

Aceste două sisteme arată că funcțiile

$$F(\zeta) = A^2 (S + i T_1), \tag{2.7}$$

$$\Phi(\zeta) = A^2 (G_1 + i H) \tag{2.8}$$

sînt olomorfe în orice domeniu al variabilei $\zeta = \alpha + i \beta$, în care sînt verificate ecuațiile celor două sisteme precedente.

Rezultatele din acest aliniat sînt deduse în lucrarea [1]. În cele ce urmează vom da ecuațiile stării unitare de eforturi pure și de momente pure.

3. Relațiile satisfăcute de deplasări

Ecuația pe care o satisface deplasarea pe normala w, se deduce din relațiile de definiție ale stării de eforturi și momente pure

$$T = 0 \quad , \quad G = 0$$

transcrise în deplasări.

În acest caz, din relațiile elasticității rezultă

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \quad , \quad \varkappa_1 + \varkappa_2 = 0, \tag{3.1}$$

expresii în care introducînd deformațiile în funcție de deplasări

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{w}{R} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R},$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R}\right], \quad \varkappa_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R}\right] - \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R}\right)$$

devin

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} u = \frac{2}{R} w, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) - \frac{A}{R}\left[\frac{1}{A}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} u\right] = 0. \tag{3.3}$$

Acestea permit eliminarea deplasărilor u și v, obținîndu-se o ecuație pentru w

$$\Delta w + 2\frac{A^2}{R} w = 0 . \tag{3.4}$$

Relaţiile (1.2) asigură că u şi v fiind daţi, w dedus din relaţia (3.2), satisface de la sine (3.4).

Pentru obţinerea deplasărilor u şi v, se poate folosi relaţia (2.7), pe care de asemenea o transcriem în deplasări, utilizînd relaţiile elasticităţii, precum şi expresia deformaţiei de lunecare

$$\omega = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} v.$$

Separînd partea reală de cea imaginară în $F(\zeta) = A^2(S + i\,T_1)$ transcrisă în deplasări, se obţine

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial A}{\partial \alpha} v &= \frac{1+\sigma}{Eh} \operatorname{Re} F(\zeta), \\ A\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial A}{\partial \alpha} u &= \frac{1+\sigma}{Eh} \operatorname{Jm} F(\zeta). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Făcînd transformarea de funcţie definită de

$$u = Au^* \quad , \quad v = A v^*$$

se obţine sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^*}{\partial \beta} &= \frac{1+\sigma}{Eh}\frac{1}{A^2} \operatorname{Re} F(\zeta), \\ \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial v^*}{\partial \beta} &= \frac{1+\sigma}{Eh}\frac{1}{A^2} \operatorname{Jm} F(\zeta). \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. Soluţia în deplasări

Soluţia generală a sistemului asociat omogen lui (3.6) este dată de

$$U(\zeta) = u^* + i\,v^*, \tag{4.1}$$

$U(\zeta)$ fiind olomorfă în domeniul în care şi sistemul asociat omogen lui (3.6) este satisfăcut. Soluţia particulară a sistemului neomogen se poate găsi punînd

$$u_0^* = \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \quad , \quad v_0^* = \frac{\partial P}{\partial \alpha} - \frac{\partial Q}{\partial \beta}. \tag{4.2}$$

Rezultă pentru P şi Q două ecuaţii de tip Poisson

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{1+\sigma}{Eh}\frac{1}{A^2} \operatorname{Re} F(\zeta), \\ \Delta Q &= \frac{1+\sigma}{Eh}\frac{1}{A^2} \operatorname{Jm} F(\zeta), \end{aligned} \tag{4.3}$$

care au ca soluţii potenţiali newtonieni

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1+\sigma}{2\pi\, Eh}\int_D \frac{\operatorname{Re} F(\zeta_1)}{A^2} \ln r\, d\sigma, \\ Q &= -\frac{1+\sigma}{2\pi\, Eh}\int_D \frac{\operatorname{Jm} F(\zeta_1)}{A^2} \ln r\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pentru u şi v se găsesc expresiile

$$u_0^* = -\frac{1+\sigma}{2\pi Eh}\left\{\int_D \frac{1}{A}\left[\operatorname{Re} F(\zeta_1)\frac{\partial}{\partial\beta}\ln r + \operatorname{Jm} F(\zeta_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln r\right]d\sigma\right\},$$
$$v_0^* = -\frac{1+\sigma}{2\pi Eh}\left\{\int_D \frac{1}{A}\left[\operatorname{Re} F(\zeta_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln r - \operatorname{Jm} F(\zeta_1)\frac{\partial}{\partial\beta}\ln r\right]d\sigma\right\}. \tag{4.5}$$

Alegem pe $U(\zeta)$ în aşa fel încît u şi v, daţi de relaţiile

$$u = A(\operatorname{Re} U(\zeta) + u_0^*) \qquad v = A(\operatorname{Jm} U(\zeta) + v_0^*) \tag{4.6}$$

să satisfacă condiţiile de contur.

Astfel dacă se dau $F(\zeta)$ şi $U(\zeta)$ prin cîte o condiţie la limită, se pot determina deplasările şi în plus şi funcţia $\Phi(\zeta)$ prin partea sa reală şi cea imaginară.

În adevăr, din relaţiile elasticităţii şi din cele geometrice se poate deduce

$$\operatorname{Re}\Phi(\zeta) = -\frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)}\left[-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right]$$
$$\operatorname{Jm}\Phi(\zeta) = \frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{A}{2R}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial v}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}v\right\} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\alpha}u\right].$$

5. Funcţiile de tensiune şi funcţia $\Phi(\zeta)$.

În cele ce urmează se vor căuta ecuaţiile satisfăcute de funcţiile de tensiune în cazul stării de eforturi pure şi de momente pure. Pentru aceasta se utilizează «dicţionarul» stabilit prin analogia statico-geometrică, aşa cum a fost enunţată de A. L. Goldenweizer.

Reţinem doar pe cele necesare

$$T_2 \longleftrightarrow -\chi^{(1)},\quad T_1 \longleftrightarrow -\chi^{(2)},\quad S_2 \longleftrightarrow \mathfrak{S}^{(1)},\quad S_1 \longleftrightarrow \mathfrak{S}^{(2)}$$
$$H_2 \longleftrightarrow -\omega^{(1)},\quad G_1 \longleftrightarrow \varepsilon^{(2)},\quad G_2 \longleftrightarrow \varepsilon^{(1)},\quad H_1 \longleftrightarrow -\omega^{(2)} \tag{5.1}$$
$$a \longleftrightarrow u\ ,\quad b \longleftrightarrow v\ ,\quad c \longleftrightarrow w.$$

Deformaţiile notate cu indice sus reprezintă componentele energetice ale deformaţiei, adică acelea care asigură aplicabilitatea teoremelor generale energetice.

În plus

$$F = \frac{2Eh}{1-\sigma^2} \longleftrightarrow -D' = \frac{3}{2Eh^2} \tag{5.2}$$
$$\sigma \longleftrightarrow -\sigma \tag{5.3}$$

relaţia (5.3) arătînd că noile expresii, deduse prin aplicarea analogiei statico-geometrice nu sînt simple transformări cu ajutorul legii lui Hooke.

Aceasta cu o restricţie şi anume: deformaţiile se exprimă cu ajutorul a trei funcţii u, v, w, în timp ce eforturile se leagă prin intermediul a patru funcţii a, b, c şi ν; astfel aplicînd analogia unor relaţii valabile în tensiuni, se pot obţine relaţii valabile, dar şi relaţii false în deformaţii. Relaţiile ce se obţin, apli-

cînd analogia unor expresii în deplasări, sînt însă riguros adevărate. Cu acestea din egalităţile (3.4) şi (3.6) se deduce grupul de ecuaţii

$$\Delta c + 2\frac{A^2}{R^2}c = 0 \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha} b = \frac{2}{A} \operatorname{Jm} \Phi(\zeta) \\ &\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial b}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha} a = -\frac{2}{A} \operatorname{Re} \Phi(\zeta). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Conform celor expuse mai sus, ecuaţia (5.4) este riguros adevărată, relaţiile (5.5) trebuie să fie verificate prin calcul direct. O verificare directă se poate face transcriind relaţiile de definiţie a stării de eforturi pure şi de momente pure, în funcţii de tensiune.

În plus mai este necesară o relaţie, ce se poate obţine eliminînd între relaţiile

$$N_1 = 0, \qquad N_2 = 0$$

scrise în funcţii de tensiune, funcţia c.

Din cele trei relaţii astfel deduse, se obţin prin eliminarea lui c, ecuaţiile (5.5). Prin eliminarea lui a şi b, se deduce ecuaţia (5.4).

După cum se observă, sistemul în a şi b este identic ca structură sistemului (3.5). Aplicînd transformarea $a = Aa^*$, $b = Ab^*$, se obţine

$$\begin{aligned} &\frac{\partial b^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial a^*}{\partial \beta} = \frac{2}{A^2} \operatorname{Jm} \Phi(\zeta) \\ &\frac{\partial a^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial b^*}{\partial \beta} = -\frac{2}{A^2} \operatorname{Re} \Phi(\zeta). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Printr-un raţionament analog celui de la punctul anterior, soluţia particulară a sistemului omogen este dată de

$$\begin{aligned} a_0^* &= -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{1}{A^2}\left[\operatorname{Jm} \Phi(\zeta_1) \frac{\partial}{\partial \beta} \ln r - \operatorname{Re} \Phi(\zeta_1) \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln r \right] d\sigma \\ b_0^* &= -\frac{1}{\pi}\int \frac{1}{A^2}\left[\operatorname{Jm} \Phi(\zeta_1) \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln r + \operatorname{Re} \Phi(\zeta_1) \frac{\partial}{\partial \beta} \ln r \right] d\sigma, \end{aligned}$$

iar soluţia generală a celui omogen, de

$$\mathcal{A}(\zeta) = a^* + i b^*, \tag{5.7}$$

$\mathcal{A}(\zeta)$ fiind olomorfă în domeniul variabilei $\zeta = \alpha + i\beta$, în care este satisfăcută partea omogenă a ecuaţiilor (5.6). Funcţia c se determină prin

$$\frac{2}{R}c = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial b}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha} a \tag{5.8}$$

analogă lui (3.2).

Funcţiile $\mathcal{A}(\zeta)$ şi $\Phi(\zeta)$ fiind date prin cîte o condiţie pe conturul domeniului, rezultă funcţiile a, b, c şi deci funcţia $F(\zeta)$ prin partea sa reală şi cea imaginară, exprimată în a, b şi c.

6. Starea de eforturi şi de momente pure

Starea de eforturi şi de momente pure este o soluţie exactă a sistemului de ecuaţii cu momente al învelitorii sferice.

Ea satisface ecuaţiile de echilibru, precum şi cele de continuitate ale deformaţiei, deoarece este o soluţie banală a sistemului omogen de ecuaţii, dedusă în lucrarea [1]. Cu ea se pot da soluţii, care satisfac numai două condiţii pe contur. Acestea pot fi date sau în momente, dînd Φ (ζ) pe contur şi una din deplasările u, v, sau într-unul din eforturile tangenţiale şi una din deplasările tangenţiale.

Starea de eforturi şi de momente pure poate fi introdusă în calculul curent ca o metodă simplificată analog stării de membrană, deoarece prezintă multe avantaje faţă de aceasta şi anume:

1) Este o soluţie exactă a sistemului de ecuaţii al învelitorii sferice;

2) Se iau în considerare momentele de încovoiere şi de torsiune ce apar în învelitoare;

3) Se pot pune două condiţii pe contur; acestea pot fi puse şi în momente sau deplasarea pe normală w, spre deosebire de starea de membrană, unde nu putem dispune decît de elementele tangenţiale.

În plus, toate ecuaţiile ce apar: (3.6) şi (5.6), în cazul stării de eforturi şi de momente pure, sînt identice ca formă sistemului de ecuaţii al stării de membrană, deci la fel de simple.

În afară de aceasta, starea de eforturi şi de momente pure este necesară la construirea oricărei soluţii a sistemului omogen; astfel apare ea în cazul forţelor concentrate.

7. Aplicaţia pentru calculul la forţe concentrate

Vom presupune că există o stare de eforturi şi de momente pure astfel ca u, v, w, să fie funcţii doar de α. Se deduce în aces caz

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(\zeta) &= \mathfrak{F}_1(\alpha), \\ \operatorname{Jm} F(\zeta) &= \mathfrak{F}_2(\alpha). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Relaţiile de monogenitate ale lui Cauchy, dau însă

$$\frac{\partial \operatorname{Re} F(\zeta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \operatorname{Jm} F(\zeta)}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\alpha)}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial \operatorname{Jm} F(\zeta)}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \operatorname{Re} F(\zeta)}{\partial \beta} = -\frac{\partial \mathfrak{F}_1(\alpha)}{\partial \beta} = 0$$

şi deci

$$F(\zeta) = \text{const. (complexă)}. \tag{7.2}$$

Interpretarea fizică a acestei constante este dată de transcrierea relaţiei (6.2) în eforturi

$$S = \frac{C_1}{A^2}, \quad T_1 = \frac{C_2}{A^2}. \tag{7.3}$$

Dacă $C_1 \neq 0$ și $C_2 \neq \varnothing$ atunci asupra calotei sferice, rămasă prin decuparea de-a lungul unui paralel, ar acționa un cuplu neechilibrat și respectiv o distribuție uniformă de eforturi paralele cu axa polilor, neechilibrate.

Problema fiind tratată în cazul sistemului omogen, aceste eforturi nu pot fi echilibrate decît de forțe sau de momente concentrate, ce apar ca poluri ale tensiunilor interioare.

După cum se observă, prima constantă corespunde acțiunii asupra sferei a unui moment de torsiune, în pol de vector, paralel cu axa polilor, cea de a doua, unei forțe concentrate.

În cele ce urmează, se caută forma deplasărilor în cel de al doilea caz, cînd $C_2 = 0$. Notînd cu P_z valoarea forței, se deduce

$$F(\zeta) = i \frac{P_z}{2\pi} R. \tag{7.4}$$

Sistemul de ecuații Poisson (4.3) devine

$$\Delta P = 0 \quad , \quad \Delta Q = \frac{1+\sigma}{Eh} \frac{P_z}{\pi R},$$

pentru care o soluție particulară este dată de

$$P = 0 \quad , \quad \frac{dQ}{d\alpha} = \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{ch} \alpha \left(\frac{\alpha}{\operatorname{ch} \alpha} + \operatorname{sh} \alpha \right).$$

Introducînd-o în (4.6), în care se ia $U(\zeta) = 0$, se deduce

$$u = \frac{1+\sigma}{2Eh} \frac{P_z}{2\pi} \left(\operatorname{sh} \alpha + \frac{\alpha}{\operatorname{ch} \alpha} \right),$$

$$v = 0, \tag{7.5}$$

$$w = \frac{1+\sigma}{2Eh} \frac{P_z}{2\pi} (1 - \alpha \operatorname{th} \alpha),$$

ultima relație fiind dată de (3.2).

Aceste expresii concordă cu cele găsite de A. L. Goldenweizer, tratînd separat starea de eforturi pure și pe cea de momente pure, în cazul forțelor concentrate, pe o cale mai laborioasă.

În plus, se mai arată în lucrarea citată, că aceste deplasări tind mai repede la infinit, cînd ne apropiem de punctul de aplicare al forței P, decît tind în cazul plăcii plane, ceea ce arată că ele mai corespund și acțiunii unei dislocări în pol. Această dislocare poate fi înlăturată prin adăugarea unei soluții judicios alese, a stării de tensiune mixte.

Calculul precedent arată cu prisosință necesitatea studiului concomitent al celor două stări de tensiune, de eforturi pure și de momente pure sub aspectul unei singure stări: starea de eforturi și de momente pure se impune deci în mod natural în cazul sferei.

СОСТОЯНИЕ ЧИСТЫХ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ ТОНКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор указывает на наличие у тонких сверических оболочек унитарного состояния напряжений: «состояние чистых усилий и моментов». Далее представлены уравнения при смещениях, усилиях и функции напряжения, а также их решения для этого состояния напряжения.

В виде примера автор применяет вышеуказанные результаты при вычислении концентрированных сил.

ÉTAT D'EFFORTS ET DE MOMENTS PURS DE LA SURFACE MINCE SPHÉRIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'Auteur montre l'existence d'un état unitaire de tensions, d'un état d'efforts et de moments purs, dans les enveloppes sphériques. On indique ensuite les équations des déplacements, des efforts et des fonctions de tension, ainsi que leurs solutions générales pour cet état de tension.

Comme exemple, l'Auteur applique ces résultats aux calculs des forces concentrées.

BIBLIOGRAFIE

1. A. L. Goldenweĭzer, *Isledovanie napriajenovo sostoiania sfericeskoi obolociki.* Prikladnaia matematika i mehanika, 1944, t. VIII, v. 6.
2. — *Teoria uprughih tonkih obolocek.* Gosudarstvenoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî, Moscova, 1953.
3. V. V. Novojilov, *Teoria tonkih obolocek.* Cudpromghiz, Moscova 1951.
4. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Gründlagen.* J. Springer, Berlin, 1924.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

ÎNCERCĂRI LA COMPRESIUNE PE BETOANE CONFECŢIONATE CU TREI TIPURI DE CIMENT

DE

MIRCEA MIHAILESCU şi ION UNGUREANU

1. OBIECTUL ŞI SCOPUL STUDIULUI

Încercările expuse în acest studiu s-au efectuat cu trei tipuri de ciment: *portland*, *alitic* şi *belitic* în scopul de a preciza influenţa lor asupra *comportării la compresiune* a betoanelor, considerînd următorii parametri variabili:

— *vîrsta betonului*;

— *raportul* $\frac{A}{C}$;

— *modul de păstrare*;

şi păstrînd constante:

— *dozajul de ciment*;

— *compoziţia granulometrică a agregatelor*;

— *modul de confecţionare şi de încărcare.*

Rezistenţa la compresiune a betoanelor, sub influenţa diferiţilor factori care intervin, a fost mult cercetată şi literatura tehnică romînească cuprinde numeroase lucrări interesante [1] al căror obiect însă, este diferit de al nostru.

2. SOLICITAREA

Se expun numai încercările de compresiune statică efectuate pe cuburi, urmărind dependent de calitatea şi vîrsta betoanelor să se determine:

— *valoarea rezistenţei de rupere şi variaţia sa în timp*;

— *diagramele eforturi unitare — deformaţii*;

— *valoarea deformaţiei maxime*;

— *raportul dintre rezistenţa la microfisurare şi rezistenţa la rupere.*

Încercările s-au efectuat conform prevederilor *STAS*-ului nr. 389/1950 cu o viteză de încărcare de 5 kg/cm²/sec.

Maşina la care s-a încercat este o presă tip *Loesenhauser* de 500 tone.

3. FORMA PROBEI ŞI PRINDEREA LA MAŞINA DE ÎNCERCAT

Desigur, pentru studiu, *forma prismatică* poate să redea mai bine comportarea reală a elementelor (stîlpi, pile de poduri etc.) la care intervine compresiunea simplă, totuşi pentru practică s-a standardizat *cubul* de 20 cm latură care pe lîngă alte avantaje oferă şi posibilităţi mai comode pentru încercări.

Comparînd rezistenţele de rupere la compresiune, cînd probele sînt aşezate obişnuit în maşina de încercat, s-a constatat că valoarea obţinută pe prismă este circa 0,85 din rezistenţa măsurată pe cub.

Rezistenţa sporită în cazul cubului se datoreşte acţiunii de fretare produsă de frecarea între platane şi suprafaţa de contact a betonului, acţiune care la prismă are o influenţă mult mai mică datorită înălţimii ei mai mari.

Pe cale teoretică [2], [3] s-a arătat, pentru un perete plan de formă pătrată, împiedicat să se deformeze pe cele două laturi pe care se aplică o presiune dată, că eforturile principale maxime sînt cu 30 % mai mici decît atunci cînd se poate deforma liber.

Pentru a obţine pe cub valori ale rezistenţei de compresiune la fel cu cele obţinute pe prismă, s-au experimentat diferite procedee care să înlăture efectul frecării.

Dispozitivele imaginate sînt însă greu de realizat şi manipulat.

De aceea practic se încearcă la presa obişnuită de compresiune fără o precauţiune specială considerînd, pe baza rezultatelor obţinute, că efectul frecării reprezintă circa 0,15 spor de rezistenţă în cazul cubului.

4. NUMĂRUL PROBELOR. VARIAŢIA REZULTATELOR. COEFICIENT DE OMOGENEITATE

În studiul unui fenomen se urmăreşte atît punerea în evidenţă a factorilor care au o influenţă *constantă*, cît şi limitele de variaţie ale factorilor *întîmplători*.

Pentru aceasta se efectuează un număr mare de probe, valoarea medie a rezultatelor caracterizînd comportarea constantă, iar eroarea medie pătratică, limitele de variaţie ale abaterilor fortuite.

Referindu-ne *la media teoretică* ce s-ar calcula pe un număr foarte mare de probe, *abaterea medie patratică teoretică* este dată de expresia

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}, \tag{1}$$

în care s-a notat cu:

$\bar{x}$, valoarea medie aparentă (determinată pe un număr restrîns de n probe);

x_i, una din valorile măsurate;

n, numărul rezultatelor considerate.

Raportînd abaterea medie pătratică la media aritmetică se obţine *coeficientul de variaţie* în procente:

$$c = \pm \frac{\sigma}{\bar{x}} \% . \tag{2}$$

Precizia determinării rezultatului creşte, cu cît numărul de încercări este mai mare.

Importanţa pe care o prezintă numărul de probe reiese, dacă ne punem următoarea problemă: dintr-un ansamblu de valori repartizate după o lege normală în jurul valorii centrale X, dacă se extrag n valori oarecare, la care corespunde media x şi abaterea medie pătratică σ, ce probabilitate este ca valoarea lui X să fie cuprinsă în intervalul $\bar{x}-\alpha\sigma$ şi $\bar{x}+\alpha\sigma$, α fiind un număr între $\frac{1}{4}$ şi 3.

Răspunsul se poate obţine din tabloul nr. 1 calculat de M. Dumas (citat după [4]).

Tabloul nr. 1

Probabilitatea raportată la numărul de probe astfel ca valoarea reală să fie cuprinsă în intervalul $\bar{x}-\alpha\sigma$ şi $\bar{x}+\alpha\sigma$

n \ α	0,250	0,375	0,500	0,750	1,000	1,500	2,000	3,000
2	p=0,156	0,228	0,295	0,410	0,500	0,626	0,705	0,795
4	0,306	0,438	0,550	0,715	0,818	0,920	0,959	0,986
6	0,400	0,560	0,686	0,846	0,924	0,980	0,993	0,999
8	0,471	0,646	0,773	0,912	0,967	0,995	0,999	~ 1
10	0,528	0,710	0,830	0,949	0,985	0,999	~ 1	
12	0,575	0,761	0,875	0,970	0,993	~ 1		
14	0,616	0,801	0,906	0,982	0,997			
16	0,652	0,833	0,928	0,989	0,998			

în care n este numărul de probe din care s-a calculat media $\bar{x}$; α este coeficient pe lîngă σ, iar p, probabilitatea.

Din tabloul nr. 1 se vede că dacă media este calculată pe două probe, X are probabilitatea 0,500 de a fi cuprins în intervalul $(\bar{x}-\sigma)$ şi $(\bar{x}+\sigma)$ şi de 0,795 de a fi cuprins în intervalul $(\bar{x}-3\sigma)$ şi $(\bar{x}+3\sigma)$.

Calculînd media pe patru probe, probabilitatea ca X să fie cuprinsă în intervalul $x-\sigma$ şi $x+\sigma$ creşte la 0,818.

Expresia

$$k=\frac{\bar{x}-\alpha\sigma}{\bar{x}} \tag{3}$$

se numeşte *coeficient de omogeneitate* pentru o probabilitate dată în tabloul nr. 1 funcţie de numărul de probe.

Aplicînd aceste formule s-a obţinut cel mai mare *coeficient de variaţie* şi cel mai mic *coeficient de omogeneitate*, în cazul betoanelor cu ciment belitic şi raport $\frac{A}{C}=0{,}65$ la 28 zile; a rezultat că abaterea medie pătratică teoretică este de 14 kg/cm², valoarea medie fiind 136 kg/cm².

Conform tabloului nr. 1, pentru $n=4$ rezultă probabilitatea 0,818 ca valoarea reală, care s-ar determina pe foarte multe probe, să fie cuprinsă în intervalul:

$$136 - 14 = 122 \text{ kg/cm}^2,$$
$$136 + 14 = 150 \text{ kg/cm}^2,$$

coeficientul de variaţie fiind

$$c = \frac{14}{136} = 0{,}103$$

şi *coeficientul de omogeneitate*

$$k = \frac{122}{136} = 0{,}897.$$

Înmulţind abaterea medie pătratică cu $\alpha = 1{,}5$, adică $1{,}5 \times 14 = 21$, se obţine după acelaşi tablou, probabilitatea 0,920 ca valoarea reală să fie cuprinsă între valorile

$$136 - 21 = 115 \text{ kg/cm}^2$$
$$136 + 21 = 157 \text{ kg/cm}^2,$$

coeficientul de variaţie fiind: $c = \frac{21}{136} = 0{,}154$

şi coeficientul de omogeneitate $k = \frac{115}{136} = 0{,}846.$

Procedînd la fel s-a găsit pentru aceeaşi probabilitate la cimentul alitic $c = 4{,}5$ % şi $k = 0{,}955$, iar la cimentul portland $c = 5{,}5$ % şi $k = 0{,}945$.

5. REZISTENŢA DE COMPRESIUNE A CIMENTURILOR

Compuşii principali ai cimenturilor încercate se comportă la compresiune pe pastă în felul următor:

Silicatul tricalcic (C_3S) este elementul principal, care contribuie la creşterea rezistenţelor betonului pînă la 28 de zile. Rezistenţa silicatului tricalcic hidratat creşte şi după 28 de zile, dar mai puţin.

Păstrarea în mediu umed nu influenţează asupra rezistenţei silicatului tricalcic.

Silicatul bicalcic (C_2S) hidratat dă rezistenţe scăzute pînă la 7 zile, dar după o lună rezistenţele cresc ajungînd la un an cam la aceleaşi valori ca ale silicatului tricalcic.

Păstrarea în apă a silicatului bicalcic hidratat dă rezistenţe sporite faţă de păstrarea în regim mixt.

— Gelul produs de hidrosilicatul bicalcic are o structură compactă care se îndeasă tot mai intim pe măsură ce se continuă hidratarea în adîncime a boabei de clinker.

— Compusul cristalin rezultat prin hidratarea *aluminatului tricalcic* (C_3A) este în general poros şi cu rezistenţă slabă. Păstrat în apă rezistenţele lui scad în timp. Adăugînd un procent de 15 % C_3A, se măreşte rezistenţa acestuia pînă la

3 zile, dar se reduce sensibil mai tîrziu, pentru că structura relativ rară a lui C_3A hidratat împiedică îndesarea intimă a gelului rezultat din C_3S.

Feroaluminatul tetracalcic (C_4AF) sporește rezistența cimentului la vîrstă mică, influența lui în timp resimțindu-se mai puțin.

Tabloul nr. 2

Compoziția mineralogică a cimenturilor folosite

Tipul cimentului	Compoziția mineralogică %				Rezistența pe mortar normal kg/cm²					
					Întindere			Compresiune		
	C_3S	C_2S	C_3A	C_4AF	3 zile	7	28	3	7	28
Portland	44	32	11	11	26	31	35	329	454	523
Alitic	47	30	1	13	27	31	40	213	404	544
Belitic	29	50	0,7	17	17	22	30	137	211	309

Valorile subliniate reprezintă marca cimenturilor.

Examinînd variația în timp a rezistențelor acestor constituenți, se pot anteevalua proprietățile cimenturilor studiate în funcție de alcătuirea lor chimică, care apare în tabloul nr. 2.

Astfel cimentul portland pentru că are cel mai ridicat procent de aluminat tricalcic, va avea rezistențe mai mari la vîrste mici (înainte de 28 zile). La vîrste mai înaintate rezistențele cele mai bune trebuie să le atingă cimentul alitic cu cel mai ridicat procent de silicat tricalcic.

Rezistențele obținute de cimentul belitic la circa 180 de zile se apropie sensibil de cele ale cimentului alitic.

Raportul *apă-ciment* ridicat va provoca scăderea rezistențelor, mai sensibil în cazul cimentului de tip belitic, întrucît structura acestui ciment hidratat conține cea mai ridicată cantitate de geluri. Îndesarea gelurilor în timp (care corespunde fenomenului de întărire) este mai sensibil influențată, decît structura cristalină, de cantitatea de apă suplimentară, care nu e legată chimic sau adsorbită.

Păstrarea în mediu umed va contribui la îmbunătățirea rezistențelor în cazul cimentului de tip belitic, din cauza comportării bune a lui C_2S ținut în apă, și va micșora rezistențele, în cazul cimentului portland, datorită conținutului de aluminat tricalcic ale cărui rezistențe scad la păstrarea în apă.

Cu aceste premize, în studiul de față s-a urmărit să se precizeze *cantitativ influența constituției chimice a cimenturilor asupra rezistenței de compresiune a betoanelor.*

6. CONFECȚIONAREA, PĂSTRAREA ȘI NOMENCLATURA PROBELOR

Betoanele folosite s-au confecționat cu agregate din cariera Cățelu de lîngă București, care au fost spălate și sortate după curba granulometrică indicată pentru betoane *STAS* nr. 1 667—50. Înainte de a fi puse în operă, agregatele au fost uscate.

Malaxarea betonului s-a făcut cu o *betonieră de 180 litri cu ax orizontal.*

Betoanele confecţionate cu $\frac{A}{C} = 0{,}50$, s-au vibrat circa 30 sec. pe o masă cu 3 000 oscilaţii/minut.

Betoanele confecţionate cu $\frac{A}{C} = 0{,}65$ au avut o răspîndire de circa 55 cm şi s-au îndesat cu mistria direct în cofraj.

Păstrarea în mediu mixt s-a făcut ţinînd probele o zi în cofraj, 6 zile sub apă şi restul în atmosferă cu 80 % umiditate şi la o temperatură de circa 18 °C.

La păstrarea în mediu umed s-au ţinut probele o zi în cofraj şi restul sub apă, temperatura camerei fiind de 18 °C.

Notarea probelor s-a făcut folosind două litere şi un indice.

Prima literă arată felul cimentului: *alitic* (*A*), *belitic* (*B*) sau *portland* (*P*).

Indicele corespunde raportului *apă — ciment* şi anume: 1 reprezintă raportul $\frac{A}{C} = 0{,}50$, iar 2, raportul $\frac{A}{C} = 0{,}65$.

Ultima literă reprezintă regimul de păstrare: *mixt* (*M*) sau *umed* (*U*).

De exemplu proba A_1M înseamnă o probă cu ciment alitic, cu raport $\frac{A}{C} = 0{,}50$ şi regim de *păstrare mixt*.

7. REZULTATELE ÎNCERCĂRILOR

Rezultatele încercărilor s-au grupat şi prelucrat astfel, încît pentru fiecare parametru considerat (care apare în titlul unui paragraf) să reiasă deosebirile dintre cele trei cimenturi studiate.

7. 1. Variaţia în timp a rezistenţelor de rupere la compresiune

Examinînd la betoanele confecţionate cu trei cimenturi şi raportul $\frac{A}{C} = 0{,}5$ păstrate în mediu mixt, *creşterea rezistenţelor de rupere* (diagramele din figura 1 şi tabloul nr. 3) şi *variaţia raportului rezistenţei de rupere* R_b *faţă de marca cimentului* R_c (diagramele din figura 2 şi tabloul nr. 3) se constată:

— La 7 zile betonul confecţionat cu ciment portland atinge 67 % din rezistenţa la 28 de zile, în timp ce pentru betoanele confecţionate cu ciment alitic şi belitic se obţine 56 % şi 46 % din valoarea la 28 de zile.

Rezistenţele betoanelor la 28 de zile raportate la mărcile cimentului dau 74 % în cazul cimentului portland şi 65 % la cimentul alitic respectiv 62 % la cimentul belitic.

— La 180 de zile cea mai mare creştere a rezistenţelor faţă de valoarea la 28 de zile se înregistrează la cimentul belitic, unde se obţine 145 %, în timp ce la betoanele confecţionate cu ciment alitic şi portland se înregistrează 121 % şi 124 %.

În general raportul $\frac{R_b}{R_c}$ rezultă a fi cel mai mare pentru cimentul portland; la vîrste pînă la 28 de zile pentru cimentul alitic, acest raport are valori mai mici decît pentru cimentul portland, dar mai mari decît ale cimentului belitic. După

Tabloul nr. 3

Rezistențele de rupere la compresiune (R_b) și rapoartele: $\frac{\text{Rezistența betonului } (R_b)}{\text{Marca cimentului } (R_c)}$

pentru betoanele A_1M, B_1M, P_1M, în intervalul 3...180 de zile

Denumirea probei	3 zile		7 zile		14 zile		28 zile		56 zile		90 zile		180 zile	
	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c
A_1M	105,00	0,1930	195,75	0,3598	291,33	0,5355	345,50	0,6351	367,66	0,6758	398,75	0,7329	420,00	0,7720
B_1M	64,00	0,1734	105,75	0,2865	166,33	0,4507	288,75	0,6199	269,00	0,7289	286,75	0,7771	332,33	0,9006
P_1M	182,00	0,3479	260,50	0,4980	334,00	0,6386	387,50	0,7409	429,66	0,8215	460,00	0,8795	482,66	0,9228

Tabloul nr. 4

Rezistențele de rupere la compresiune (R_b) și rapoartele: $\frac{\text{Rezistența betonului } (R_b)}{\text{Marca cimentului } (R_c)}$

pentru betoane A_2M, B_2M, P_2M în intervalul 3...180 de zile

Denumirea probei	3 zile		7 zile		14 zile		28 zile		56 zile		90 zile		180 zile	
	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c
A_2M	46,66	0,0857	121,25	0,2228	179,33	0,3296	236,50	0,4347	283,66	0,5214	295,00	0,5422	323,00	0,5937
B_2M	31,00	0,0840	52,50	0,1422	86,66	0,2348	136,75	0,3705	185,66	0,5031	190,00	0,5149	194,00	0,5257
P_2M	104,66	0,2001	167,25	0,3197	243,66	0,4658	288,75	0,5521	318,33	0,6086	338,25	0,6467	360,66	0,6895

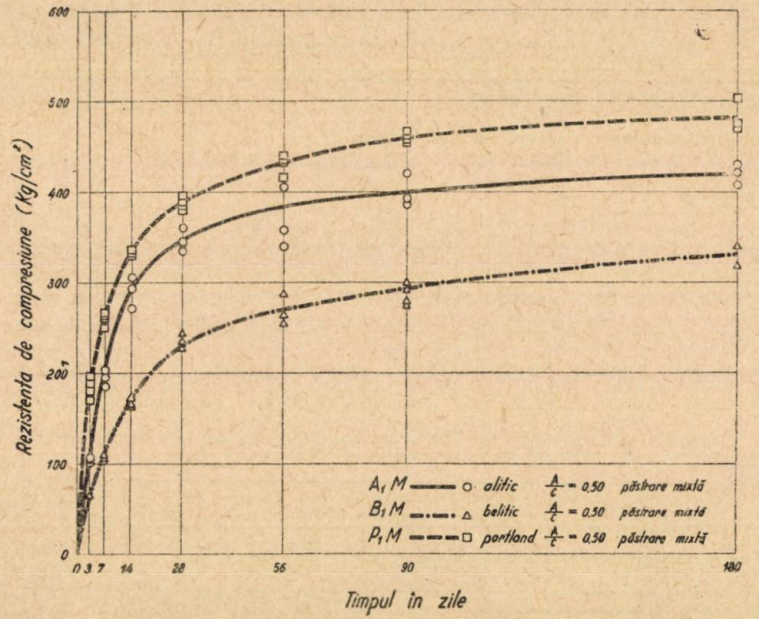


Fig. 1. — Rezistențele de compresiune la betoanele $A_1 M$, $B_1 M$, $P_1 M$, în intervalul 3...180 de zile

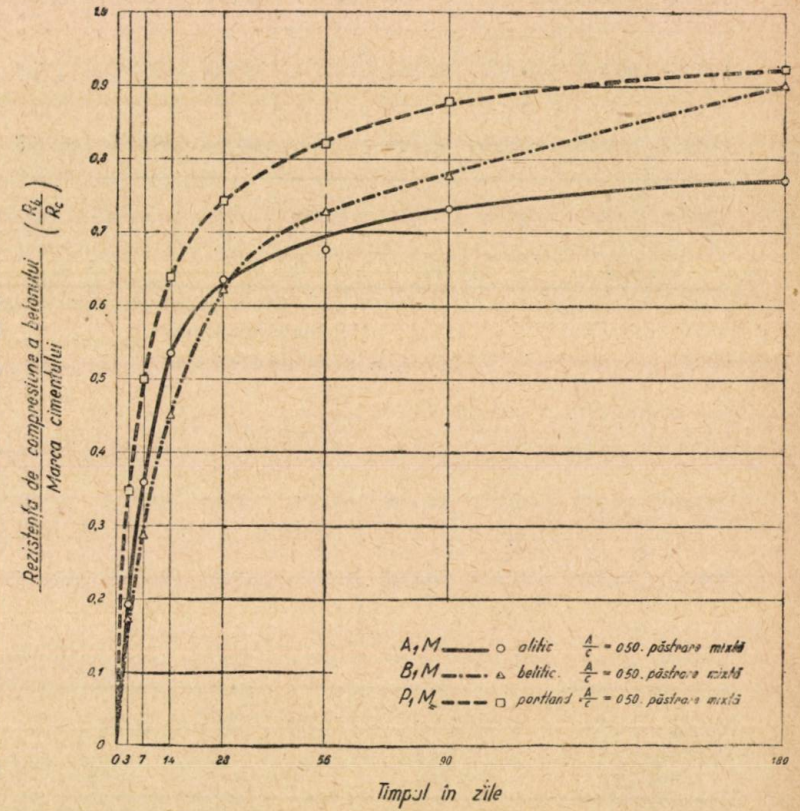


Fig. 2. — Rezistențele de compresiune ale betoanelor $A_1 M$, $B_1 M$, $P_1 M$, raportate la mărcile cimenturilor în intervalul 3...180 de zile.

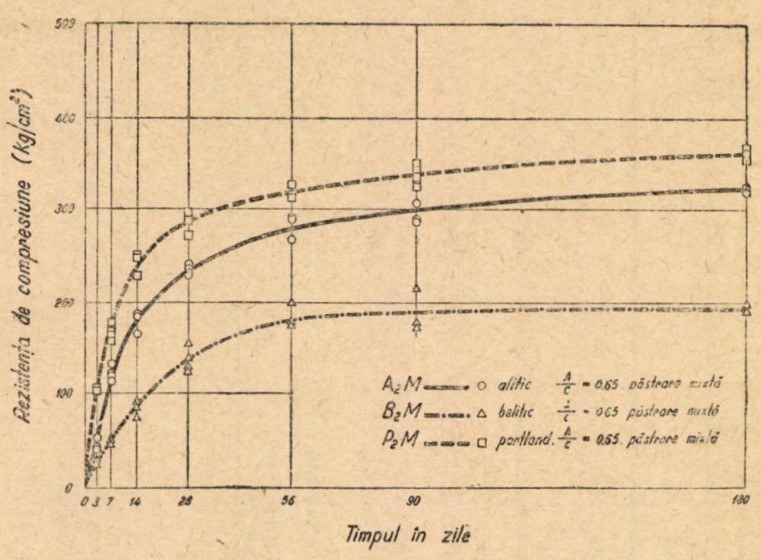


Fig. 3. — Rezistențele de compresiune în timp la betoanele A_2M, B_2M, P_2M, în intervalul 3 ... 180 de zile.

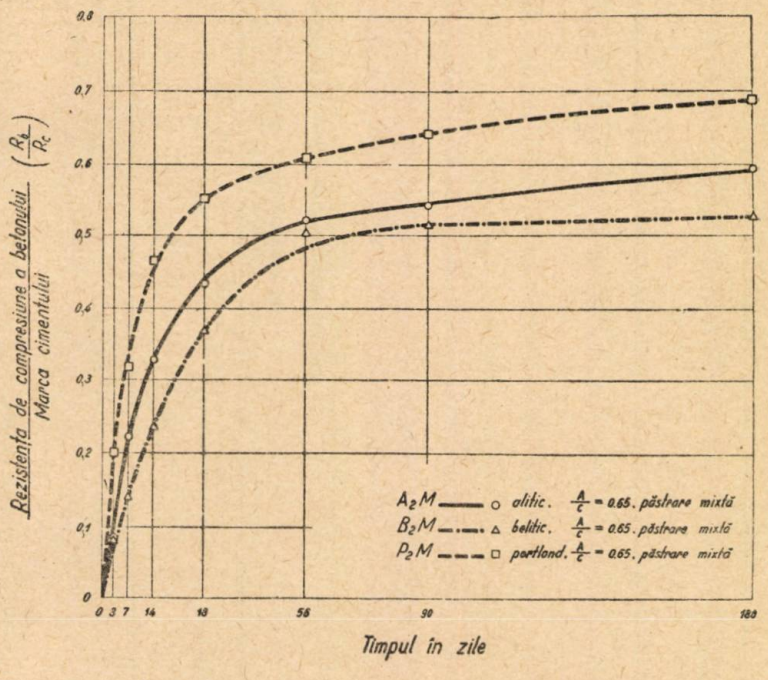


Fig. 4. — Rezistențele de compresiune ale betoanelor A_2M, B_2M, P_2M, raportate la mărcile cimenturilor, în intervalul de 3 ... 180 de zile.

Tabloul nr. 5

Rezistențele de rupere la compresiune R_b și rapoartele $\frac{\text{rezistența betonului } (R_b)}{\text{marca cimentului } (R_c)}$ pentru betoane A_2U, B_2U, P_2U în intervalul 3 ... 360 de zile

Denumirea probei	3 zile		7 zile		14 zile		28 zile		56 zile		90 zile		180 zile		360 zile	
	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c	R_b	R_b/R_c
A_2U	43,00	0,0790	105,00	0,1930	166,33	0,3057	234,75	0,4315	304,33	0,5594	324,00	0,5955	342,66	0,6298	360,00	0,6617
B_2U	25,33	0,0686	46,50	0,1260	84,00	0,2276	127,50	0,3455	193,33	0,5239	234,25	0,6348	336,00	0,9105	373,5	1.0121
P_2U	120,66	0,2307	198,75	0,3800	246,00	0,4703	276,50	0,5286	320,00	0,6118	338,25	0,6467	359,00	0,6864	367,5	0,7026

Tabloul nr. 6

Variația rezistenței de rupere la compresiune (R_b) funcție de raportul $\frac{\text{apă}}{\text{ciment}}$ la betoanele confecționate cu ciment alitic, belitic și portland păstrate în mediu mixt, în intervalul 3 ... 180 de zile

Denumirea probei		3 zile		7 zile		14 zile		28 zile		56 zile		90 zile		180 zile	
		R_b	R_{b_1}/R_{b_2}	R_b	R_{b_1}/R_{b_2}	R_b	R_{b_1}/R_{b_2}	R_b	R_{b_1}/R_{b_2}	R_b	R_{b_1}/R_{b_2}	R_b	R_{b_1}/R_{b_2}	R_b	R_{b_1}/R_{b_2}
A_1M	R_{b_1}	105,00	2,250	197,75	1,614	291,33	1,624	345,50	1,460	367,66	1,296	398,75	1,351	420,00	1,300
A_2M	R_{b_2}	46,66		121,25		179,33		236,50		283,66		295,00		323,00	
B_1M	R_{b_1}	64,00	2.064	105,75	2,014	166,33	1,919	228,75	1,672	269,00	1,448	286,75	1,509	332,33	1,713
B_2M	B_{b_2}	31,00		52,50		86,66		136,75		185,66		190,00		194,00	
P_1M	R_{b_1}	182,00	1,738	260,50	1,557	334,00	1,370	387,50	1,341	429,66	1,349	460,00	1,359	482,66	1,338
P_2M	R_{b_2}	104,66		167,25		243,66		288,75		318,33		338,25		360,66	

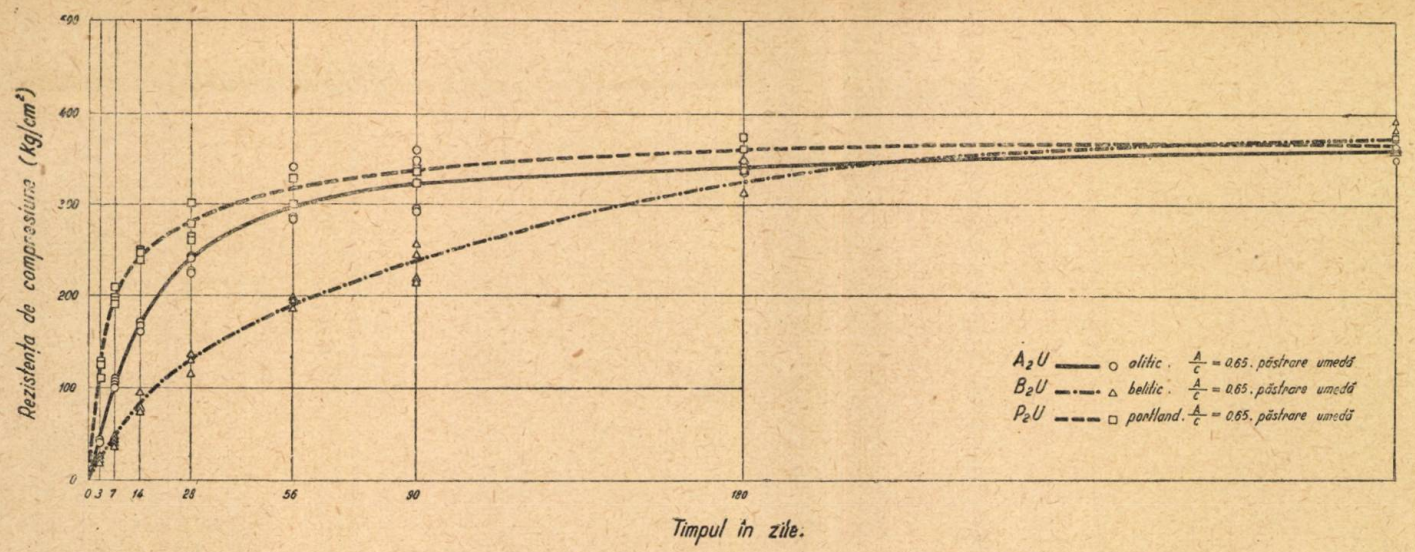


Fig. 5. — Rezistențele de compresiune la betoanele A_2U, B_2U, P_2U, în intervalul 3 ... 360 de zile.

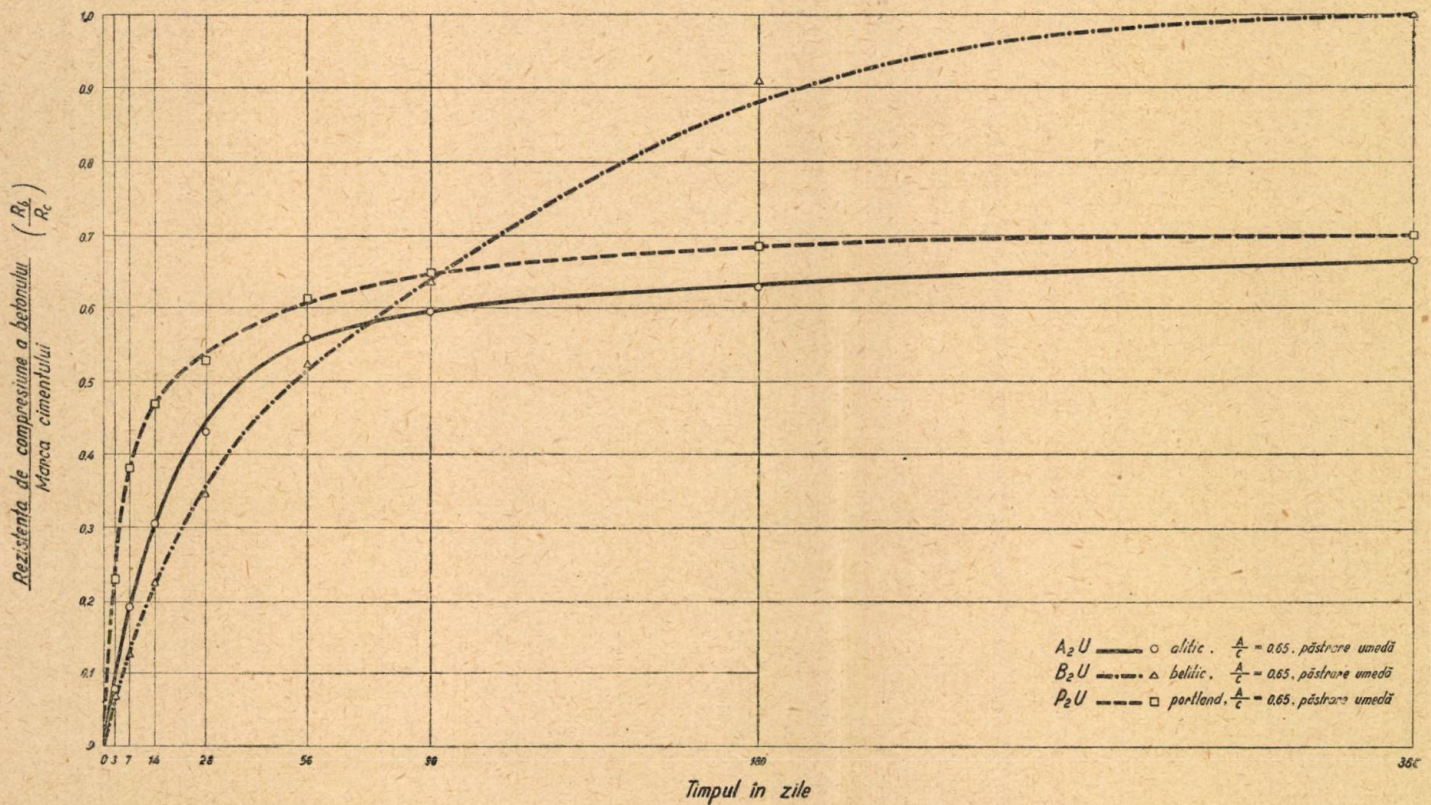


Fig. 6. — Rezistențele de compresiune ale betoanelor A_2U, B_2U, P_2U raportate la mărcile cimenturilor în intervalul 3 ... 360 de zile.

MUSZAŁA

28 de zile, pentru cimentul belitic, raportul $\frac{R_b}{R_c}$ devine mai mare decît pentru cimentul alitic, rămînînd totuși mai mic decît pentru cimentul portland.

La 180 de zile raportul $\frac{R_b}{R_c}$ pentru cimentul belitic depășește valoarea obținută la cimentul portland.

În diagramele din figura 3 corespunzătoare tabloului nr. 4 s-a reprezentat variația în timp a rezistențelor la betoane confecționate cu $\frac{A}{C} = 0{,}65$ păstrate în mediu mixt; se constată:

— Rezistențele la 7 zile reprezintă, față de cele găsite la 28 de zile, 58 % pentru betonul cu ciment portland, 51 % pentru betonul cu ciment alitic și 38 % pentru betonul cu ciment belitic.

Raportînd rezistențele obținute la 28 de zile la marca cimenturilor utilizate (diagramele din fig. 4 corespunzătoare tabloului nr. 4) s-a găsit 55 % în cazul cimentului portland, 43 % la cimentul alitic și 37 % pentru cimentul belitic.

Creșterea rezistențelor la 180 de zile față de valorile obținute la 28 de zile reprezintă 142 % la cimentul belitic, 136 % la cimentul alitic și 124 % în cazul betoanelor confecționate cu ciment portland.

Analizînd variația rezistențelor raportate la marca cimentului, în această situație se deduce că acest raport este cel mai ridicat la cimentul portland, care atinge pe beton la 180 de zile o rezistență de 69 % din marca cimentului, apoi cimentul alitic care la aceeași vîrstă înregistrează 59 %, iar cimentul belitic 52 % din mărcile respective.

Diagramele din figurile 5 și 6 corespunzătoare tabloului nr. 5 arată variația rezistențelor în timp la betoane confecționate cu $\frac{A}{C} = 0{,}65$, păstrate în mediu umed.

Se observă:

— Rezistențele la 7 zile ating, față de rezistențele la 28 de zile, următoarele valori procentuale: 72 % la betoanele confecționate cu ciment portland, 45 % la betoanele confecționate cu ciment alitic și 36 % în cazul cimentului belitic.

— Rezistențele betoanelor la 28 de zile dau în procente, față de marca cimenturilor folosite, 53 % la betoanele cu ciment portland, 43 % la cele confecționate cu ciment alitic și 34 % la betoanele confecționate cu ciment belitic.

— Urmărind comportarea betoanelor în timp, se observă în intervalul 28 ... 180 de zile o creștere, raportată la valoarea înregistrată la 28 de zile, de 130 % la cimentul portland, 146 % la cimentul alitic și 263 % la cimentul belitic.

La 360 de zile, cele mai mari eforturi de compresiune s-au înregistrat pe cuburile confecționate cu ciment belitic ($R_c = 373$ kg/cm²), la betoanele cu ciment portland s-a găsit $R_c = 367{,}5$ kg/cm² și la cele cu ciment alitic $R_c = 360$ kg/cm².

La păstrarea în mediu umed, raportul rezistențelor de compresiune față de marca cimentului $\left(\frac{R_b}{R_c}\right)$ a dat cea mai mare valoare pentru cimentul belitic: la 180 de zile $\frac{R_b}{R_c} = 91$ %, iar la 360 de zile $\frac{R_b}{R_c} = 70$ %; în aceleași intervale de timp s-au obținut pentru cimentul portland $\frac{R_b}{R_c} = 69$ % (180 de zile) și

$\frac{R_b}{R_c} = 70\ \%$ (360 de zile), iar pentru cimentul alitic $\frac{R_b}{R_c} = 63\ \%$ (180 de zile) şi $\frac{R_b}{R_c} = 66\ \%$ (360 de zile).

Considerînd rezistenţele obţinute s-a căutat să se verifice o serie de formule existente în literatură.

Astfel, înlocuind valorile R_{b28} şi R_{b7} rezultate din încercări, în formule de tipul

$$R_{b28} = R_{b7} + a\sqrt{R_{b7}}, \tag{4}$$

în care R_{b28} este rezistenţa betonului la 28 de zile, iar R_{b7} rezistenţa betonului la 7 zile, au rezultat următoarele valori pentru a:

ciment *alitic* $a = 10 \ldots 13$;
ciment *belitic* $a = 11 \ldots 12$;
ciment *portland* $a = 6 \ldots 9$.

O altă formulă analizată este următoarea:

$$R_{bt} = R_{b28}\frac{at^{2/3}}{b + t^{2/3}} \tag{5}$$

în care s-a notat cu:

R_{bt}, rezistenţa betonului la vîrsta t;
R_{b28}, rezistenţa betonului la vîrsta de 28 de zile;
t, vîrsta betonului în zile.

Considerînd $b=1$, în cazul cimenturilor studiate, s-au găsit pentru vîrste pînă la $t=180$ de zile, valorile de mai jos pentru a:

ciment *alitic* $a = 1{,}20 \ldots 1{,}80$;
ciment *belitic* $a = 1{,}50 \ldots 2{,}80$;
ciment *portland* $a = 1{,}10 \ldots 1{,}40$.

7.2. Variaţia rezistenţei betoanelor în funcţie de coeficientul K al compoziţiei mineralogice

S-a căutat să se scoată în evidenţă influenţa coeficientului K formulat de A. E. Şeikin [5] şi anume: raportul dintre volumul structurii cristaline a pietrii de ciment şi acela al compoziţiei gelice, a cărui expresie este

$$K = \frac{\frac{C_3S}{228} + \frac{C_3A}{270} - 2\frac{C_4AF}{486}}{\frac{C_3S}{228} + \frac{C_2S}{172} + \frac{C_4AF}{486}}. \tag{6}$$

În diagramele din figura 7 s-a reprezentat variaţia rezistenţelor la betoane funcţie de coeficientul K pentru cele trei cimenturi studiate, menţinînd constante: dozajul de ciment, raportul $\frac{A}{C}$ modul de confecţionare şi păstrare.

S-au calculat pentru diferite vîrste de încercare, trei familii de diagrame, primele două corespunzînd betoanelor cu $\frac{A}{C} = 0{,}50$ şi $\frac{A}{C} = 0{,}65$ păstrate în mediu mixt şi a treia pentru betoanele cu $\frac{A}{C} = 0{,}65$ păstrate în mediu umed.

Desigur componenţa cristalină influenţează favorabil rezistenţa betonului, însă trebuie făcută o diferenţiere între acţiunea structurii cristaline provenită din hidratarea lui C_3A şi aceea a lui C_3S, pe care nu o face S e i k i n.

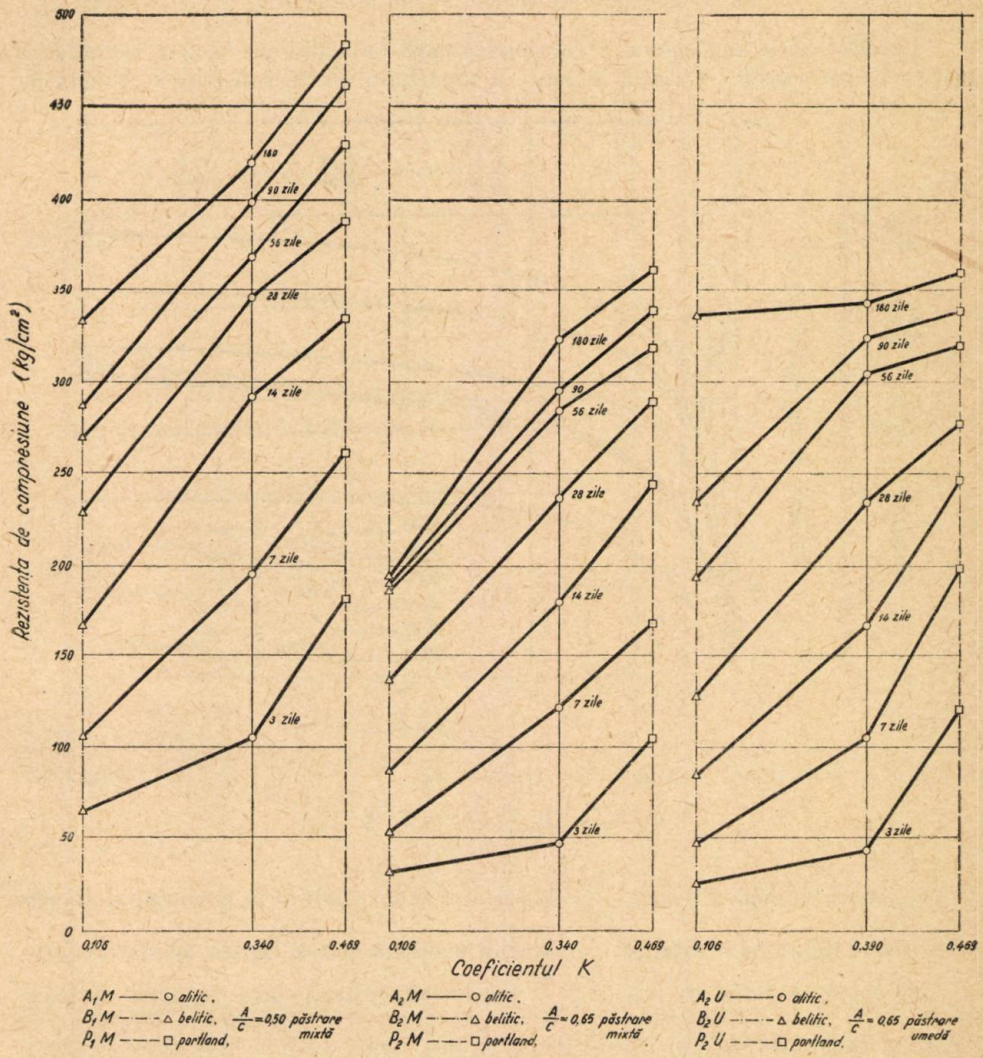


Fig. 7. — Variaţia rezistenţei de compresiune funcţie de coeficientul k al compoziţiei mineralogice.

Astfel se constată că la orice vîrstă, rezistenţele betonului cresc o dată cu creşterea lui K, dar la vîrste foarte tinere, pînă la 7 zile, este preponderentă influenţa hidroaluminatului tetracalcic, care se observă prin diferenţa între rezistenţele obţinute la betoanele confecţionate cu ciment portland şi betoanele cu ciment alitic (curbele au concavitatea îndreptată în sus).

După 7 zile predomină influenţa structurii cristaline a hidroxidului de calciu rezultat din hidroliza lui C_3S. Curbele au concavitatea îndreptată în jos.

Odată cu trecerea timpului influenţa lui C_3A se face tot mai puţin simţită în schimb apare mai evidentă acţiunea lui C_3S.

7.3. Rezistenţele betoanelor funcţie de raportul $\frac{A}{C}$

În diagramele din figura 8 corespunzătoare tabloului nr. 6, s-a reprezentat pentru fiecare ciment, variaţia în timp a raportului dintre rezistenţele betoanelor

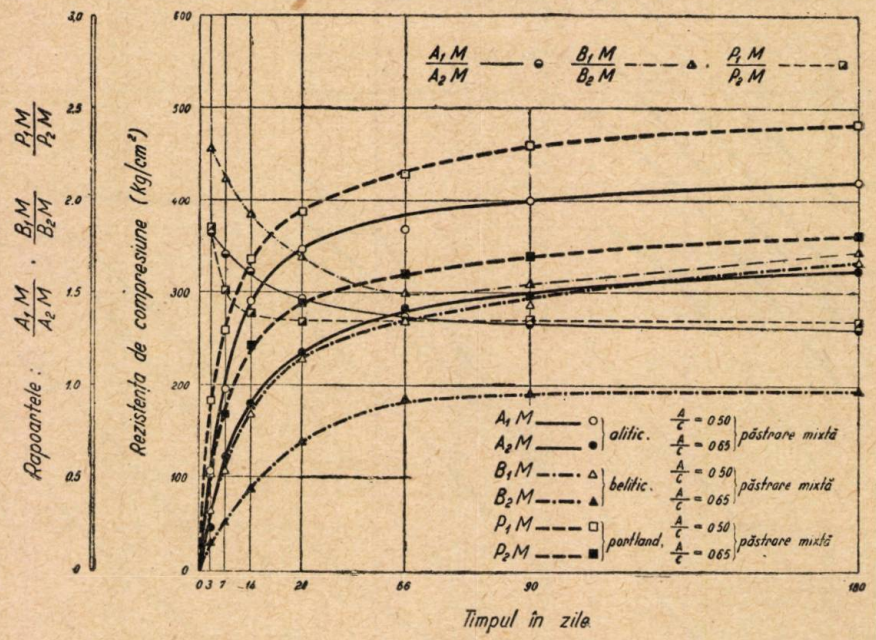


Fig. 8. — Rezistenţele de compresiune şi rapoartele $\frac{A_1M}{A_2M}$, $\frac{B_1M}{B_2M}$, $\frac{P_1M}{P_2M}$ la betoanele A_1M, A_2M, B_1M, B_2M, P_1M, P_2M.

confecţionate cu două rapoarte $\frac{A}{C} = 0{,}5$ şi $\frac{A}{C} = 0{,}65$, păstrate în mediu mixt. Concomitent s-au figurat şi rezistenţele betoanelor pentru a putea repera aceste rapoarte.

Se constată astfel că raportul $\frac{A}{C}$ mare, influenţează prin scăderea rezistenţelor, în cazul păstrării în mediu mixt, cel mai mult asupra cimentului belitic şi în mai mică măsură asupra probelor de ciment alitic şi portland.

Comportarea slabă a cimentului de tip belitic la rapoarte *apă-ciment* mari se datoreşte mai ales faptului că el leagă chimic şi prin adsorbţie un procent redus de apă, lăsînd, faţă de celelalte cimenturi, o cantitate mai mare de apă liberă (evaporabilă) care micşorează rezistenţa pietrei de ciment.

În diagramele din figura 9 s-au reprezentat pentru cele trei tipuri de ciment rezistenţele de rupere obţinute pe betoane confecţionate cu două rapoarte $\frac{A}{C} = 0{,}5$ şi $\frac{A}{C} = 0{,}65$ păstrate în mediu mixt, la diferite vîrste de încercare.

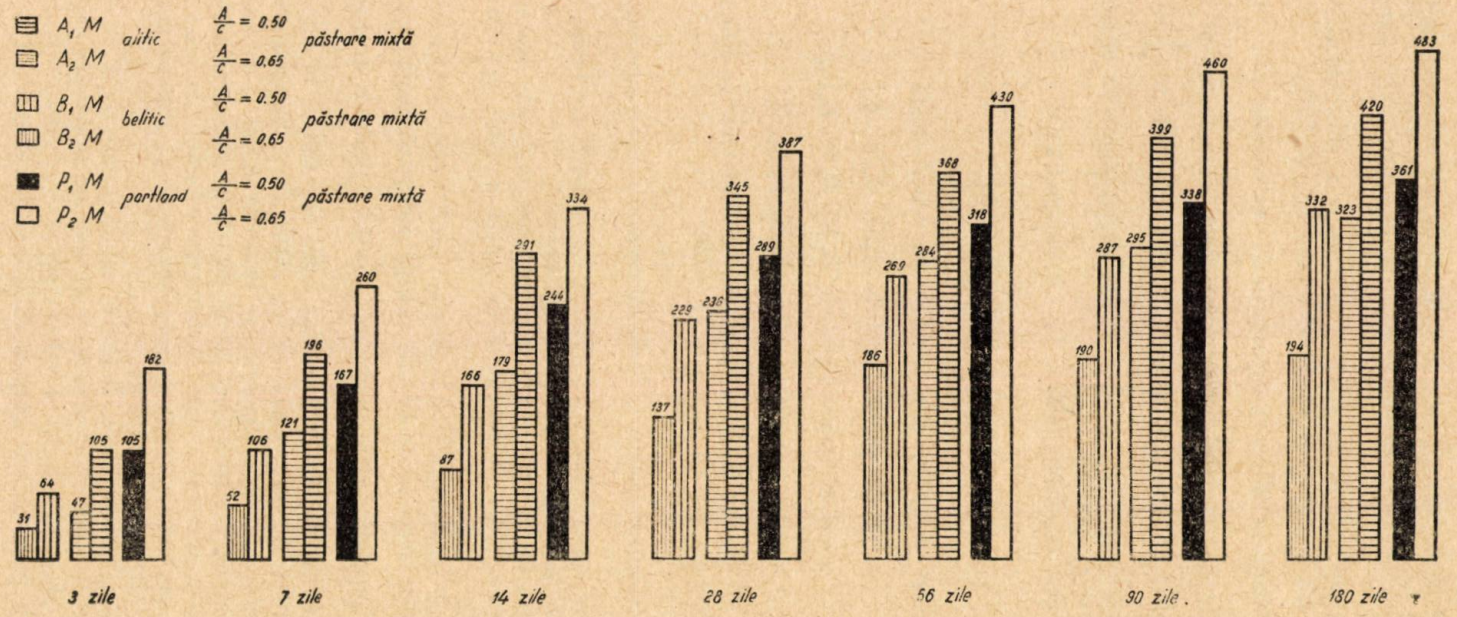


Fig. 9. — Variația rezistenței de compresiune în funcție de raportul $\frac{\text{apă}}{\text{ciment}}$ la betoanele A_1M, A_2M, B_1M, B_2M, P_1M, P_2M.

Se constată că la vîrste tinere pînă la 28 de zile scăderea de rezistenţă, cînd se trece de la $\frac{A}{C} = 0{,}50$ la $\frac{A}{C} = 0{,}65$, rămîne la cimentul belitic aproape constantă în toată această perioadă de circa 50 %, în timp ce la cimentul alitic variază între 50 % şi 70 %, iar la cimentul portland între 60 % şi 75 %.

La vîrste înaintate influenţa raportului $\frac{A}{C}$ se resimte mai puţin. Cu toate acestea la 180 de zile, în cazul betoanelor confecţionate cu ciment belitic, se înregistrează o scădere de rezistenţă de 40 %, cînd se trece de la $\frac{A}{C} = 0{,}50$ la $\frac{A}{C} = 0{,}65$, obţinîndu-se în acelaşi timp scăderea de rezistenţă de numai 23 % pentru cimenturile alitic şi portland.

Aplicînd legea experimentală a lui Skramtaev

$$R_{b28} = \alpha R_c \left(\frac{C}{A} - 0{,}5\right). \tag{7}$$

s-au obţinut pentru coeficientul α, următoarele valori medii:

$\alpha = 0{,}418$ pentru probele A_1M, A_2M, A_2U;

$\alpha = 0{,}367$ pentru probele B_1M, B_2M, B_2U;

$\alpha = 0{,}511$ pentru probele P_1M, P_2M, P_2U.

Se observă că pentru cimentul portland se obţine un coeficient foarte apropiat de cel indicat de Skramtaev ($\alpha = 0{,}5$).

7.4. Diagramele eforturi unitare — deformaţii pentru betoanele încercate la 28 de zile

Încercările la compresiune s-au efectuat pe cuburi de beton cu latură de 20 cm, viteza de încărcare fiind de 5 kg/cm²/sec.

Pentru citirea deformaţiilor s-a montat între platanele maşinii de încercat un microcomparator fixat de braţul unui suport metalic, aşa cum se vede în figurile 10 şi 11.

În figura 12 corespunzătoare tabloului nr. 7 s-au reprezentat diagramele *eforturi unitare-deformaţii* la 28 de zile pentru betoanele confecţionate cu ciment alitic, belitic şi portland, avînd raportul $\frac{A}{C} = 0{,}50$ păstrate în mediu mixt.

Diagrama corespunzătoare cimentului alitic este liniară în intervalul de rezistenţă de la 0 la 0,6 R_b. În porţiunea 0,6 ... 0,75 R_b se înregistrează o schimbare bruscă de curbură (în timpul încercărilor la unele cuburi s-au auzit trosnituri), care corespunde apariţiei microfisurilor şi deci începutului distrugerii betonului.

De la limita de fisurare în sus diagrama are o formă curbilinie analoagă materialelor plastice, iar peste această valoare, betoanele intră într-o stare de dezechilibru, care duce imediat la rupere.

Scurtarea înregistrată pînă la limita de microfisurare, 0,65 R_b este de aproximativ 1,8 mm/m, iar pentru valoarea 0,90 R_b, care ar reprezenta practic rezistenţa maximă a betonului, s-a obţinut o deformaţie de aproximativ 3 mm/m, valoarea atinsă la capătul palierului de curgere fiind de circa 6 mm/m.

La diagrama trasată pentru cimentul belitic s-a observat că limita de microfisurare este mai scăzută, cuprinsă între 0,51 și 0,65 R_b porțiunea curbă de comportare elastoplastică întinzîndu-se pînă la circa 0,80 R_b.

Scurtarea la limita de microfisurare variază între 2 și 3 mm/m.

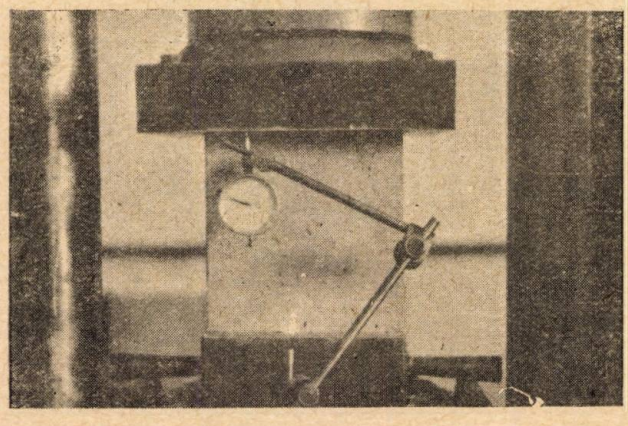


Fig. 10. — Cubul așezat în mașina de încercat și microcomparatorul pentru înregistrarea deformațiilor.

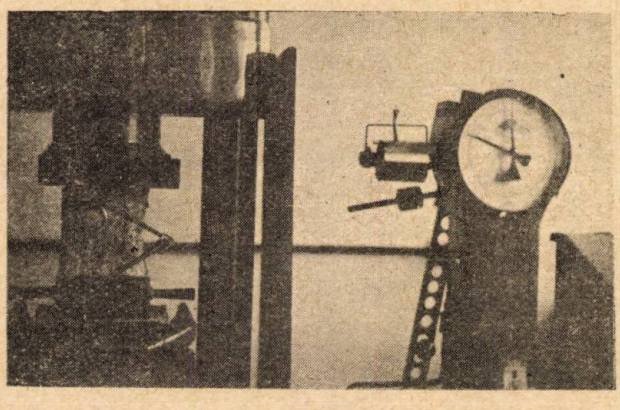


Fig. 11. — Vedere în ansamblu a mașinii de încercat: cubul a ajuns aproape de stadiul de rupere.

Pentru rezistențe de aproximativ 0,9 R_b, s-au înregistrat scurtări între 4 și 5 mm/m ajungînd în momentul ruperii pînă la 7...9 mm/m.

Această comportare, în care predomină caracterul de *plasticitate* trebuie pusă în legătură cu compoziția bogată în geluri a cimentului belitic.

Diagrama corespunzătoare betoanelor confecționate cu ciment portland are un profil apropiat de acel al materialelor *elastice*. Rezistențele la limita de microfisurare sînt în jurul valorii 0,8 R_b, iar ruperea betonului se produce aproape brusc fără palier de plasticitate.

Scurtările la limita de microfisurare sînt în jur de 2,2 mm/m, iar deformațiile maxime la rupere nu depășesc cu mai mult de 10 % această valoare.

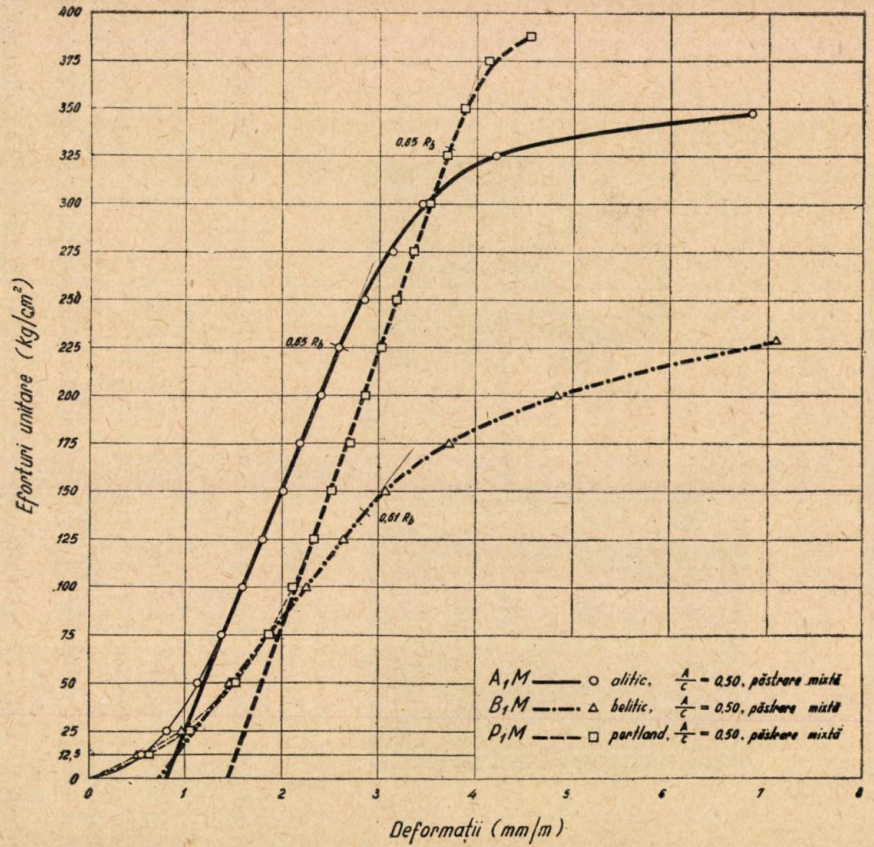


Fig. 12. — Diagrama eforturi unitare — deformații la betoanele A_1M, B_1M, P_1M la vîrsta de 28 de zile.

Tabloul nr. 7

Eforturi unitare — deformații la probele A_1M, B_1M, P_1M la vîrsta de 28 de zile (valori medii)

Nr. crt.	R_b kg/cm²	ε mediu (mm/m)		
		A_1M	B_1M	P_1M
1	0	0,00	0,00	0,00
2	12,5	0,55	0,51	0,62
3	25	0,81	0,96	1,05
4	50	1,13	1,47	1,53
5	75	1,38	1,90	1,87
6	100	1,60	2,25	2,11
7	125	1,80	2,63	2,33
8	150	2,01	3,08	2,51
9	175	2,18	3,73	2,70
10	200	2,40	4,85	2,86
11	225	2,58		3,03
12	228,75		7,08	
13	250	2,85		3,18
14	275	3,14		3,36
15	300	3,45		3,53
16	325	4,20		3,70
17	345,5	6,83		
18	350			3,88
19	375			4,08
20	387,5			4,55

Caracterul accentuat elastic al comportării acestor betoane se datorește structurii cristaline, care predomină în piatra de ciment portland.

Examinînd comparativ diagramele din figura 12 reiese că modulul de elasticitate este mai mare la cimentul portland și alitic și sensibil mai scăzut la betoanele confecționate cu ciment belitic.

Tabloul nr. 8

Eforturi unitare—deformații la probele A_2M, B_2M, P_2M la vîrsta de 28 de zile (valori medii)

Nr. crt.	R_b kg/cm²	ε mediu (mm/m)		
		A_2M	B_2M	P_2M
1	0	0,00	0,00	0,00
2	12,5	0,42	0,40	0,27
3	25	0,63	0,83	0,32
4	50	0,88	1,31	0,78
5	75	1,15	1,78	1,01
6	100	1,42	2,23	1,26
7	125	1,61	3,18	1,50
8	136,75		4,63	
9	150	1,91		1,72
10	175	2,03		1,88
11	200	2,35		2,08
12	225	2,72		2,41
13	236,50	3,67		
14	250			2,55
15	275			3,06
16	288,75			3,53

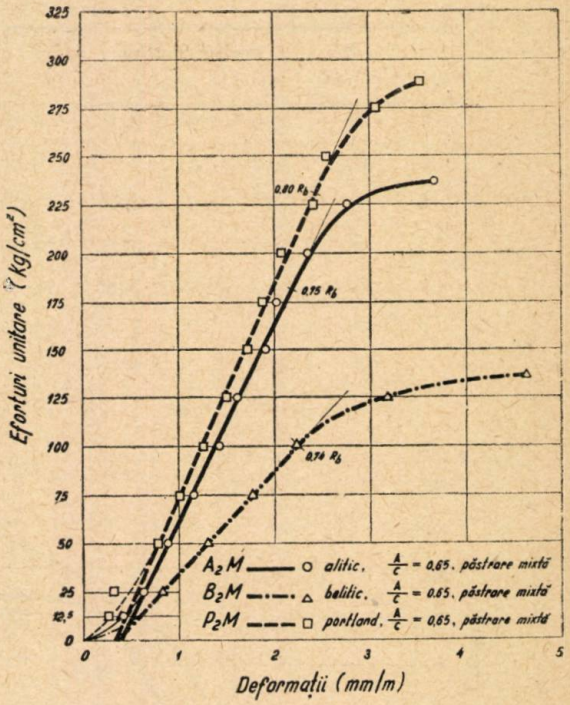


Fig. 13. — Diagrama eforturi unitare — deformații la betoanele A_2M, B_2M, P_2M la vîrsta de 28 de zile.

Diagramele din figura 13 corespunzătoare tabloului nr. 8, sînt trasate pentru betoanele confecționate cu $\frac{A}{C} = 0{,}65$ păstrate în mediu mixt. Din examinarea lor se constată pentru cimenturile portland și alitic o comportare foarte apropiată (modulul de elasticitate și scurtarea la rupere sînt sensibil egale, numai rezistența de rupere este ceva mai mare pentru betonul cu ciment portland), în timp ce la cimentul belitic modulul de elasticitate apare pronunțat mai scăzut.

În comparație cu situația anterioară $\left(\frac{A}{C} = 0{,}50\right)$, valorile modulului de elasticitate au scăzut la cele trei cimenturi, scurtările la rupere crescînd la 3 mm/m pentru cimentul portland, fiind însă mai mici la cimentul *A* și *B*.

În figura 14, corespunzătoare tabloului nr. 9, s-au trasat curbele pentru betoanele cu $\frac{A}{C} = 0{,}65$ păstrate în mediu umed. Din observarea lor rezultă că

păstrarea în mediu umed a influenţat cel mai mult asupra betoanelor cu ciment portland. Astfel modulul de elasticitate a scăzut faţă de situaţia anterioară, (păstrare în mediu mixt) valoarea lui fiind mai mică decît aceea obţinută pentru cimentul alitic. Limita de microfisurare a coborît la 0,72 R_b faţă de 0,87 R_b, cît s-a înre-

Tabloul nr. 9

Eforturi unitare — deformaţii la probele A_2U, B_2U, P_2U la vîrsta de 28 de zile (valorii medii)

Nr. crt.	R_b kg/cm²	ε mediu (mm/m)			Nr. crt.	R_b kg cm²	ε mediu (mm m)		
		A_2U	B_2U	P_2U			A_2U	B_2U	P_2U
1	0	0,00	0,00	0,00	9	150	2,47		1,78
2	12,5	0,52	0,27		10	175	2,77		2,13
3	25	0,80	0,57	0,33	11	200	3,08		2,56
4	50	1,25	1,15	0,68	12	225	3,45		3,08
5	75	1,62	1,70	1,00	13	234,75	4,58		
6	100	1,88	2,39	1,08	14	250			3,91
7	125	2,18	3,86	1,51	15	275			4,86
8	127,5		5,48		16	276,5			7,27

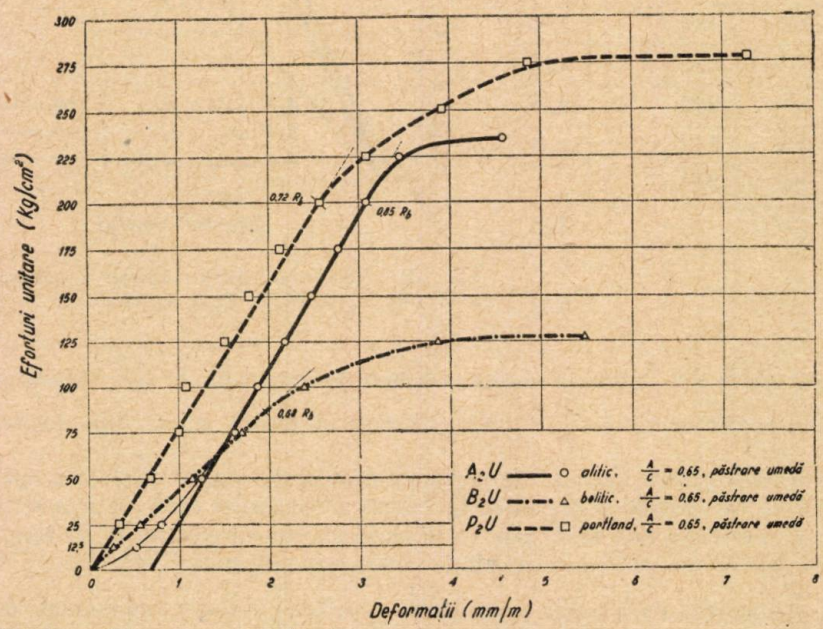


Fig. 14. — Diagrama eforturi unitare — deformaţii la betoanele A_2U, B_2U, P_2U la vîrsta de 28 de zile.

gistrat la păstrarea în mediu mixt. Ruperea nu se mai face brusc, ci este precedată de o zonă bine marcată de plasticitate. Scurtările la rupere cresc pînă la 7 mm/m.

Păstrarea în mediu umed influenţează în mai mică măsură rezultatele obţinute pentru cimentul alitic (diagrama rămîne aceeaşi ca pentru păstrare în mediu mixt). În cazul betoanelor cu ciment belitic păstrarea în apă încetineşte cu puţin întărirea lui pentru vîrsta de 28 de zile.

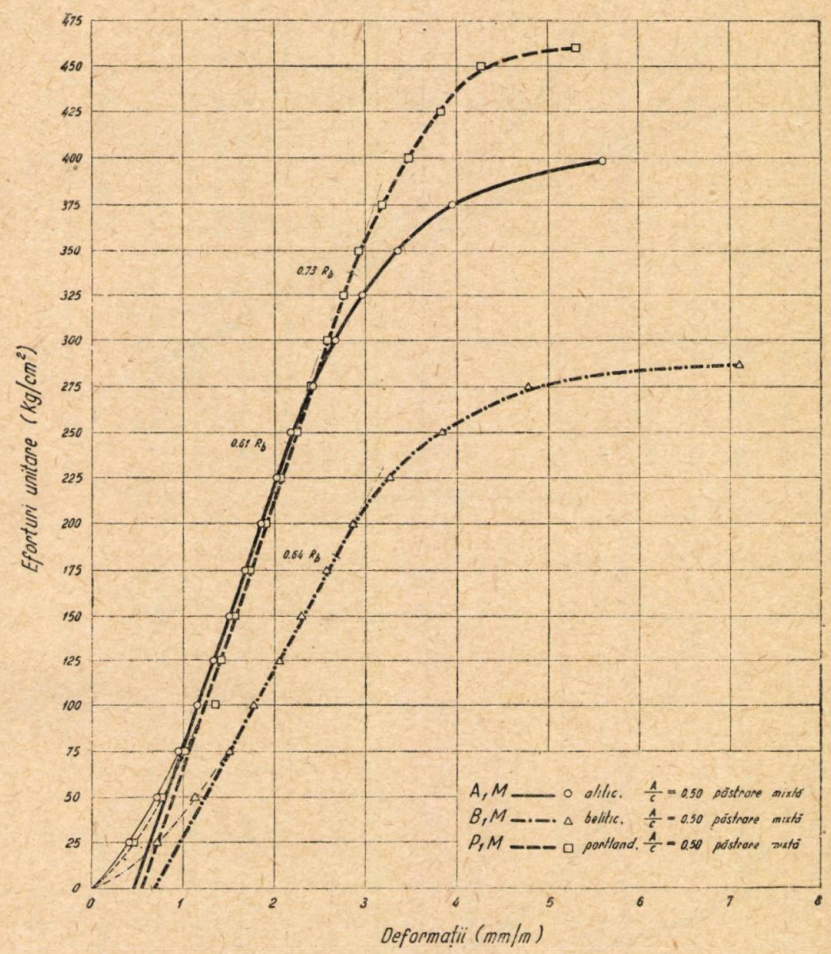


Fig. 15. — Diagrama eforturi unitare — deformaţii la betoanele A_1M, B_1M, P_1M la vîrsta de 90 de zile.

Diagramele eforturi unitare — deformaţii din figurile 15, 16 şi 17 se referă la încercări efectuate la 90 de zile de la turnare; observîndu-le, reiese clar că betoanele confecţionate cu ciment alitic şi portland au o comportare sensibil asemănătoare în intervalul (0...0,70 R_r) deosebindu-se în apropierea ruperii (0,70...1 R). Ruperea are un caracter mai casant la betoanele cu ciment portland datorită structurii sale mai accentuat cristaline.

Spre deosebire de aceste cimenturi, diagramele trasate pentru betoanele confecţionate cu ciment belitic, au un aspect în care predomină caracterul plastic.

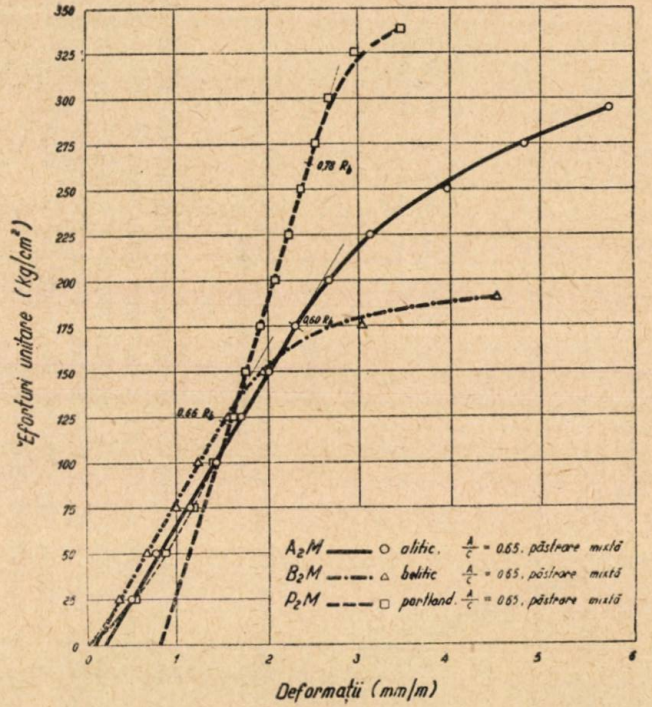


Fig. 16. — Diagrama eforturi unitare — deformații la betoanele A_2M, B_2M, P_2M la vîrsta de 90 de zile.

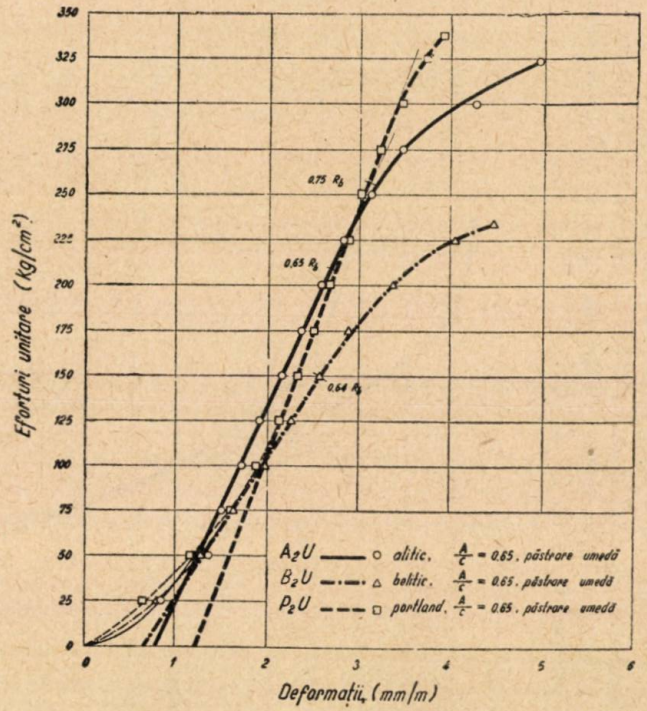


Fig. 17. — Diagrama eforturi unitare — deformații la betoanele A_2U, B_2U, P_2U la vîrsta de 90 de zile.

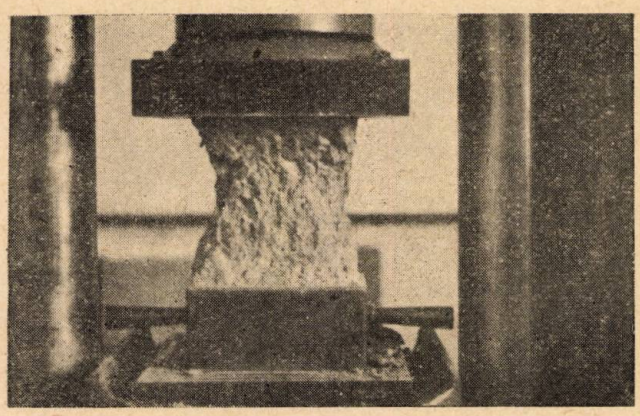


Fig. 18. — Un cub din proba $P_1 M$ la vîrsta de 90 de zile în stadiul de rupere.

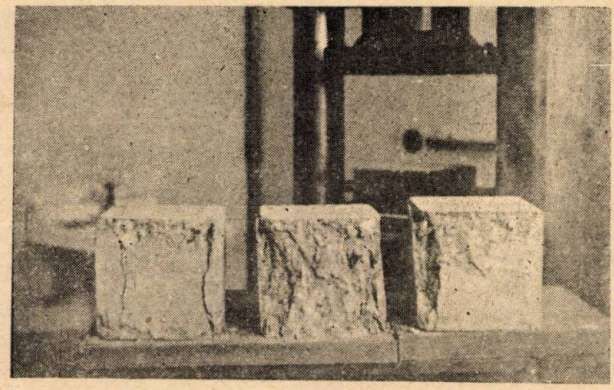


Fig. 19. — Cuburile $A_1 M$ rupte la vîrsta de 180 de zile.

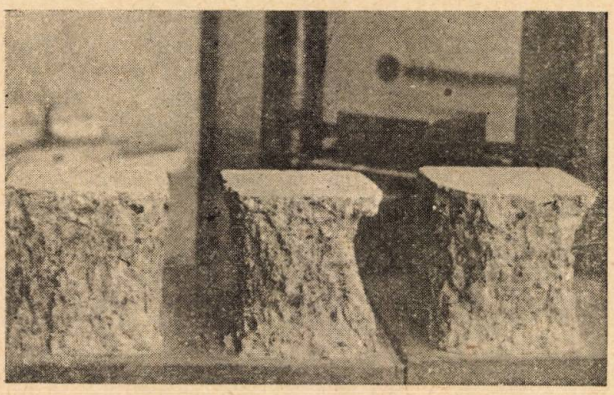


Fig. 20. — Cuburile $P_1 M$ rupte la vîrsta de 180 de zile.

În comparaţie cu încercările de la 28 de zile se remarcă la toate cele trei cimenturi o creştere a modulilor de deformaţie şi în general o micşorare a deformaţiei totale la rupere.

În figura 18 se vede un cub din proba P_1M la vîrsta de 90 de zile, în stadiul de rupere. Se observă planurile de rupere care tind să se apropie de 45°.

În figurile 19 şi 20 se pot vedea cuburile A_1M şi P_1M rupte la vîrsta de 180 zile.

8. CONCLUZII

Încercările efectuate au confirmat rolul hotărîtor al compoziţiei mineralogice a cimenturilor asupra proprietăţilor mecanice ale betoanelor studiate.

A reieşit clar în evidenţă, acţiunea compuşilor principali C_3S, C_2A *şi mai puţin a lui* C_4AF; *de asemenea a rezultat distinct influenţa rapoartelor* $\frac{A}{C}$ *şi a modurilor de păstrare mixt şi umed.*

Proprietăţile compuşilor mineralogici, în legătură cu întărirea betonului, prezentate în introducere s-au regăsit la examinarea betoanelor studiate.

La toate vîrstele pînă la 180 de zile, pentru toate situaţiile încercate, rezistenţele obţinute pe betoanele confecţionate cu ciment portland au fost superioare celor obţinute cu ciment alitic, cu toate că marca cimentului alitic era puţin mai mare decît a cimentului portland.

Această neconcordanţă s-ar putea explica prin aceea că la încercările făcute s-au folosit rapoarte $\frac{A}{C}$ mult mai mari decît cele care se utilizează la încercările pe pastă de ciment.

Deşi încercările s-au făcut cu deosebită atenţie, totuşi din lipsa unui aparat special, limita de microfisurare şi deformaţiile limită ale betoanelor nu se pot considera că au fost în mod riguros puse în evidenţă.

Concluzii definitive pentru aplicaţiile practice chiar în cazul comportării la compresiune a betoanelor studiate nu pot fi trase, decît după ce se vor determina caracteristicele curgerii lente şi ale contracţiei.

ИСПЫТАНИЕ НА СЖАТИЕ БЕТОНОВ ИЗ ТРЕХ ТИПОВ ЦЕМЕНТА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе изложены результаты испытаний на сжатие бетонов, изготовленных из трех типов цемента, с целью уточнить влияние их минералогического состава на свойства бетонов. Даны результаты испытаний в интервале 0—180 дней для бетонов, изготовленных с двумя соотношениями вода/цемент и выдержанных в двух режимах.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Сопротивление на сжатие бетонов A_1M, B_1M, P_1M в интервале 3—180 дней после отливки.

Рис. 2. — Сопротивление на сжатие бетона A_1M, B_1M, P_1M соответственно маркам цемента, в интервале 3—180 дней после отливки.

Рис. 3. — Сопротивление на сжатие в зависимости от времени бетонов A_2M, B_2M, P_2M в интервале 3—180 дней после отливки.

Рис. 4. — Сопротивление на сжатие бетонов $A_2 M$, $B_2 M$, $P_2 M$ соответственно маркам цемента в интервале 3—180 дней после отливки.

Рис. 5. — Сопротивление на сжатие бетонов $A_2 U$, $B_2 U$, $P_2 U$ в интервале 3—360 дней после отливки.

Рис. 6. — Сопротивление на сжатие бетонов $A_2 U$, $B_2 U$, $P_2 U$ соответственно маркам цементов, в интервале 3—360 дней после отливки.

Рис. 7. — Изменение сопротивления на сжатие в зависимости от коэффициента k минералогического состава.

Рис. 8. — Сопротивление на сжатие и отношения $\frac{A_1 M}{A_2 M}$, $\frac{B_1 M}{B_2 M}$, $\frac{P_1 M}{P_2 M}$ бетонов $A_1 M$, $A_2 M$, $B_1 M$, $B_2 M$, $P_1 M$, $P_2 M$.

Рис. 9. — Изменение сопротивления на сжатие в зависимости от отношения вода/цемент бетонов $A_1 M$, $A_2 M$, $B_1 M$, $B_2 M$, $P_1 M$, $P_2 M$.

Рис. 10. — Куб, помещенный в машину для испытания, и микрокомпаратор для регистрирования деформации.

Рис. 11. — Общий вид машины для испытания; куб находится почти в стадии разлома.

Рис. 12. — Диаграмма единичных усилий — деформация бетонов $A_1 M$, $B_1 M$, $P_1 M$ 28-дневной отливки.

Рис. 13. — Диаграмма единичных усилий — деформация бетонов $A_2 M$, $B_2 M$ $P_2 M$ 28-дневной отливки.

Рис. 14. — Диаграмма единичных усилий — деформация бетонов $A_2 U$, $B_2 U$, $P_2 U$ 28-дневной отливки.

Рис. 15. — Диаграмма единичных усилий — деформация бетонов $A_1 M$, $B_1 M$, $P_1 M$ 90-дневной отливки.

Рис. 16. — Диаграмма единичных усилий — деформация бетонов $A_2 M$, $B_2 M$, $P_2 M$ 90-дневной отливки.

Рис. 17. — Диаграмма единичных усилий — деформация бетонов $A_2 U$, $B_2 U$, $P_2 U$ 90-дневной отливки.

Рис. 18. — Пробный куб $P_1 M$ 90-дневной отливки в стадии разлома.

Рис. 19. — Кубы $A_1 M$, разломанные через 180 дней, после отливки.

Рис. 20. — Кубы $P_1 M$, разломанные через 180 дней, после отливки.

ESSAIS DE RÉSISTANCE À LA COMPRESSION DES BÉTONS PRÉPARÉS AVEC TROIS QUALITÉS DE CIMENT

RÉSUMÉ

Les Auteurs exposent les résultats des essais de résistance à la compression des bétons préparés avec trois qualités de ciment, essais dont le but a été de préciser l'influence de la composition minérale sur les propriétés des bétons. On indique les résultats obtenus dans l'intervalle de 0 à 180 jours, pour des bétons préparés avec deux rapports eau-ciment et conservés suivant deux régimes.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Résistances à la compression des bétons $A_1 M$, $B_1 M$, $P_1 M$, dans l'intervalle de 3 à 180 jours.

Fig. 2. — Résistances à la compression des bétons $A_1 M$, $B_1 M$, $P_1 M$, rapportées aux marques des ciments, dans l'intervalle de 3 à 180 jours.

Fig. 3. — Résistances à la compression en raison du temps des bétons $A_2 M$, $B_2 M$, $P_2 M$, dans l'intervalle de 3 à 180 jours.

Fig. 4. — Résistances à la compression des bétons $A_2 M$, $B_2 M$, $P_2 M$, rapportées aux marques des ciments, dans l'intervalle de 3 à 180 jours.

Fig. 5. — Résistances à la compression des bétons $A_2 U$, $B_2 U$, $P_2 U$, dans l'intervalle de 3 à 360 jours.

Fig. 6. — Résistances à la compression des bétons A_2U, B_2U, P_2U, rapportées aux marques des ciments, dans l'intervalle de 3 à 360 jours.

Fig. 7. — Variation de la résistance à la compression, fonction de coefficient k, de la compcsition minéralogique.

Fig. 8. — Résistances à la compression et les rapports $\frac{A_1M}{A_2M}$, $\frac{B_1M}{B_2M}$, $\frac{P_1M}{P_2M}$, des bétons A_1M, A_2M, B_1M, B_2M, P_1M, P_2M.

Fig. 9. — Variation de la résistance à la compression en fonction du rapport eau-ciment pour les bétons A_1M, A_2M, B_1M, B_2M, P_1M, P_2M.

Fig. 10. — Le cube disposé dans la machine à essais et le micro-comparateur pour l'enregistrement des déformations.

Fig. 11. — Vue d'ensemble de la machine à essais: le cube touche au stade de rupture.

Fig. 12. — Diagramme efforts unitaires-déformations des bétons A_1M, B_1M, P_1M, à 28 jours.

Fig. 13. — Diagramme efforts unitaires-déformations des bétons A_2M, B_2M, P_2M, à 28 jours.

Fig. 14. — Diagramme efforts unitaires - deformations des bétons A_2U, B_2U, P_2U, à 28 jours.

Fig. 15. — Diagramme efforts unitaires-déformations des bétons A_1M, B_1M, P_1M, à 90 jours.

Fig. 16. — Diagramme efforts unitaires-déformations des bétons A_2M, B_2M, P_2M, à 90 jours.

Fig. 17. — Diagramme efforts unitaires-déformations des bétons A_2U, B_2U, P_2U, à 90 jours.

Fig. 18. — Un cube de l'échantillon P_1M, arrivé, à 90 jours, au stade de rupture.

Fig. 19. — Rupture des cubes A_1M, à 180 jours.

Fig. 20. — Rupture des cubes P_1M, à 180 jours.

BIBLIOGRAFIE

1. C. C. Teodorescu, *Rezistenţa betoanelor*. Analele Ministerului Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor, 1943, nr. 3.
2. St. Timoshenco, *Elements of Strength of Materials*. Londra, 1950.
3. A. S. Kalmanok, *Problemele încercării la compresiune*. Culegerea Cercetări asupra teoriei construcţiilor, Moscova, 1952.
4. M. M. Prot, *Méthodes modernes d'essai des matériaux*. Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, 1950, nr. 156.
5. A. E. Şeikin, *Cauzele inconstanţei funcţiei* $R_b = f\left(\frac{A}{C}\right)$. VNITO konstruktori, Gosstroiizdat, Moscova, 1949.
6. V. Nicolau şi colectiv, *Introducere în teoria betonului*. ESAC, Bucureşti, 1954.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

INFLUENŢA COMPOZIŢIEI MINERALOGICE A CIMENTULUI ASUPRA ADEZIUNII DINTRE BETON ŞI ARMĂTURĂ

DE

M. WEISSENBERG şi S. CIUNGU

1. Aşa cum au arătat studiile întreprinse în special de cercetătorii sovietici, proprietăţile fizico-mecanice ale betonului sînt puternic influenţate de compoziţia mineralogică a cimentului utilizat. Ca urmare, şi comportarea elementelor de beton armat trebuie să reflecte, într-o oarecare măsură atenuată desigur de prezenţa armăturilor, influenţa compoziţiei mineralogice a cimentului.

Studii recente [1] au arătat că adeziunea dintre beton şi armătură este de fapt rezultatul suprapunerii a trei factori deosebiţi: *încleierea* betonului de armătură (aderenţa propriu-zisă); *frecarea* dintre beton şi armătură, datorită presiunii betonului pe bara de armătură, ca urmare a fenomenului de contracţie; *încleştarea* dintre beton şi armătură, provocată de pătrunderea laptelui de ciment în neregularităţile de laminare ale oţelului beton obişnuit. Pentru betoane armate cu asemenea oţeluri, rolul hotărîtor îl are cel de al treilea factor, încleştarea dintre beton şi armătură [1], [2].

Compoziţia mineralogică a cimentului îşi manifestă influenţa asupra fiecăruia dintre cei trei factori componenţi ai adeziunii, făcînd să varieze de la un tip de ciment utilizat la altul atît valoarea globală, cît şi unele caracteristici speciale ale adeziunii.

2. Prezentul studiu are drept obiectiv analizarea acestei influenţe, făcînd parte dintr-un ansamblu de cercetări asupra proprietăţilor fizico-mecanice ale betonului, simplu şi armat, în funcţie de compoziţia mineralogică a cimenturilor utilizate.

Au fost studiate trei cimenturi: un ciment cu predominanţa silicatului tricalcic (alit) denumit ciment *A*; un ciment cu predominanţa silicatului bicalcic (belit), denumit ciment *B*, şi un ciment cu compoziţie asemănătoare celei a cimentului portland, denumit ciment *P*. Toate cimenturile au fost măcinate la Institutul de cercetări şi încercări ale materialelor de construcţii, I. C. I. M. C., special pentru încercările din cadrul ansamblului de cercetări amintit mai sus.

Compoziţia clinkerelor măcinate şi mărcile de ciment obţinute sînt arătate în tabloul nr. 1.

Parametrii principali, care au fost variaţi în cursul încercărilor, în afara compoziţiei cimentului, sînt acei consideraţi ca putînd modifica tocmai influenţa compoziţiei mineralogice asupra adeziunii: raportul apă-ciment (au fost făcute încercări cu raportul $\frac{a}{c} = 0{,}65$ şi raportul $\frac{a}{c} = 0{,}50$); diametrul armăturii ($\varnothing$ 12 şi $\varnothing$ 30); vîrsta (pentru raportul $\frac{a}{c} = 0{,}65$, s-au făcut încercări la 7,28 şi 90 de zile; pentru raportul $\frac{a}{c} = 0{,}50$, la 28 şi 90 de zile). S-au întrebuinţat armături din oţel OL 38.

Tabloul nr. 1

Tipul	C_3S%	C_2S %	C_3A%	C_4AF %	Marca cimentului kg/cm²
Clinker *A*	47,7	29,8	2,1	18,0	544
Clinker *B*	26,0	53,0	1,2	17,0	369
Clinker *P*	44,0	32,0	11,0	11,0	523

3. S-a căutat a se utiliza o metodă de încercare adecvată stărilor de tensiune asemănătoare celor mai des întîlnite în elementele de construcţii, respectiv o schemă de încărcare de natura încovoierii.

Pentru o mai uşoară determinare a efortului din armătură în timpul încercării, s-a urmărit asigurarea unui braţ de pîrghie interior (între punctul de aplicare al rezultantei eforturilor de compresiune şi cel al rezultantei eforturilor de întindere) uşor măsurabil. S-a adoptat pentru aceasta principiul introducerii unei articulaţii la mijlocul elementului experimental, ca şi în încercările cercetătorilor sovietici K. V. Mihailov [1] şi V. I. Muraşev [3].

Elementul experimental este însă realizat în mod deosebit, fiind alcătuit din două părţi identice de beton, turnate deodată, într-un cofraj unic şi avînd o armătură unică, dar distanţate între ele, în zona centrală, cu aproximativ 4 cm (fig. 1). În spaţiul dintre cele două semigrinzi se introduce la încercare o piesă metalică pentru transmiterea efortului din zona comprimată a betonului (fig. 2). Rolul ei este tocmai acela de a realiza articulaţia dorită şi deci de a permite o determinare uşoară a braţului de pîrghie interior.

Elementele experimentale au fost încercate la o presă pentru încovoiere, de 3,5 t. Pentru măsurarea deplasărilor relative ale armăturii faţă de beton, la fiecare capăt al armăturii se aşează cîte un ceas microcomparator; la unele încercări s-au pus microcomparatoare atît la capetele dinspre exterior, cît şi la capetele dinspre interior ale armăturii (fig. 3).

Schema de încărcare utilizată este reprezentată în figura 4.

Lungimea de ancoraj varia în general între 12 *d* şi 20 *d*, în funcţie de diametrul armăturii şi de raportul apă-ciment al betonului respectiv.

Lungimea fiecărei jumătăţi de grindă a trebuit să fie mai mare decît lungimea de ancoraj (creîndu-se în zona centrală o porţiune de armătură neaderentă), pentru că puterea limitată a presei făcea necesare braţe de pîrghie destul de mari în vederea obţinerii efortului care produce lunecarea armăturii în beton.

Întreruperea adeziunii pe porţiunea mediană şi spaţiul de circa 4 cm dintre cele două semigrinzi au fost realizate cu ajutorul nisipului umezit şi bine bătut

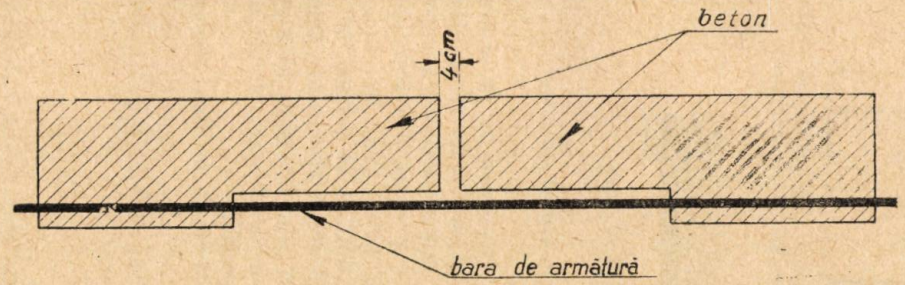


Fig. 1. — Elementul experimental.

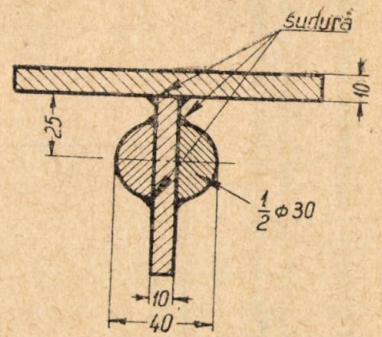


Fig. 2. — Dispozitiv pentru transmiterea efortului de compresiune din beton.

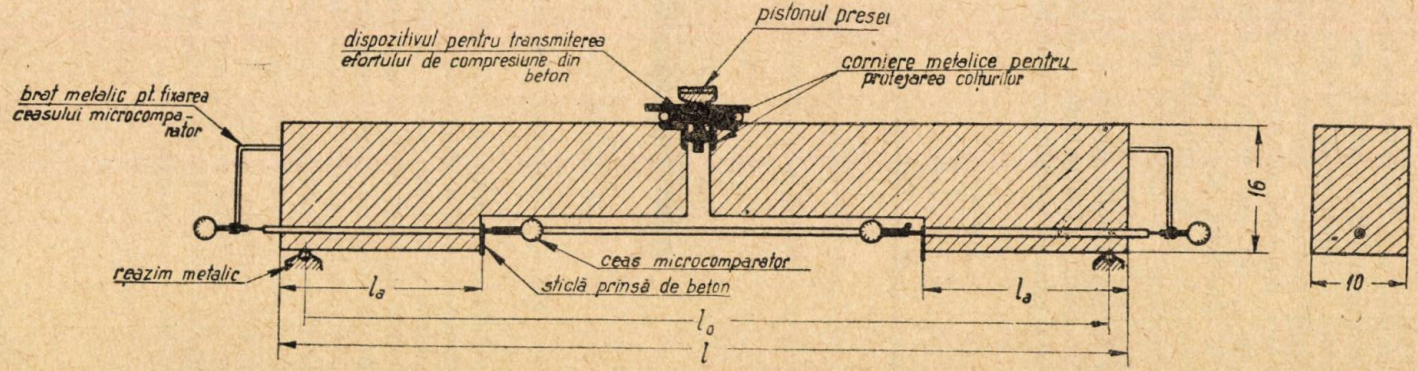


Fig. 3. — Elementul experimental înainte de încercare.

şi a unor piese metalice introduse în cofraj (fig. 5). Regimul de păstrare a fost mixt: 7 zile în nisip umed şi restul în aer.

Pentru a împiedica o reducere prea mare a braţului de pîrghie interior, fără a întrerupe încercarea, pentru a descărca şi a modifica poziţia pieselor, la elementele la care lungimea armăturii neaderente ($l - 2\ la$) era mare şi cînd erau de prevăzut săgeţi mari, se aşezau între beton şi armătura neaderentă scurtături de oţel-beton de un diametru adecvat (fig. 6).

În fotografiile din figurile 7, 8, 9 şi 10 sînt arătate diferite aspecte de la încercarea unui element experimental.

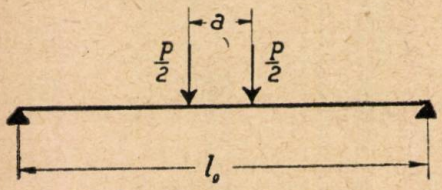


Fig. 4. — Schema de încărcare.

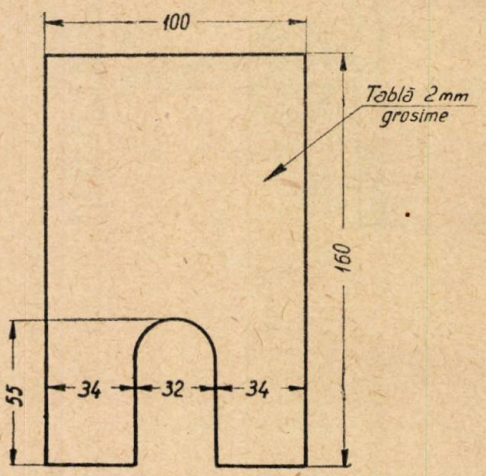


Fig. 5. — Plăcuţă metalică pentru întreruperea adeziunii între semigrinzi

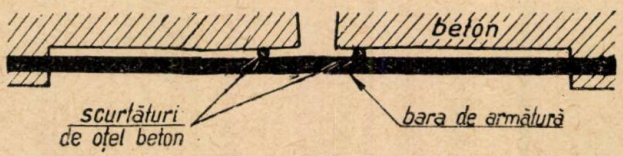


Fig. 6. — Menţinerea braţului de pîrghie interior în dreptul articulaţiei.

La fiecare încercare au fost experimentate cîte trei elemente de acelaşi tip. De asemenea au fost efectuate, pentru fiecare tip şi în fiecare zi de încercare, şi încercările ajutătoare pentru stabilirea rezistenţei la compresiune, a rezistenţei la întindere din încovoiere şi a contracţiei betonului, precum şi a rezistenţei de adeziune determinată prin împingerea armăturii în beton (fig. 11).

4. Rezultatele centralizate ale încercărilor sînt arătate în tabloul nr. 2.

Rezistenţa de adeziune a fost calculată ca o valoare medie pentru lungimea de ancoraj respectivă, împărţind efortul de întindere din armătură la suprafaţa laterală a armăturii înglobate în beton. A fost luat în considerare efortul maxim măsurat şi nu efortul corespunzător începutului lunecării.

Valoarea rezistenţei de întindere, R_t, a fost calculată pe baza încercărilor de încovoiere, cu formula

$$R_t = \frac{M_{\text{rupere}}}{\frac{b\,h^2}{3{,}5}}.$$

Valorile trecute în tabloul nr. 2 sînt determinate prin media valorilor obţinute. Rezultatele foarte depărtate de medie au fost neglijate.

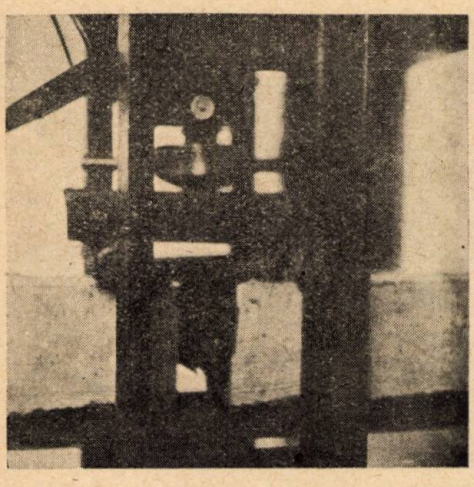


Fig. 7. — Aspecte de la încercarea unui element experimental.

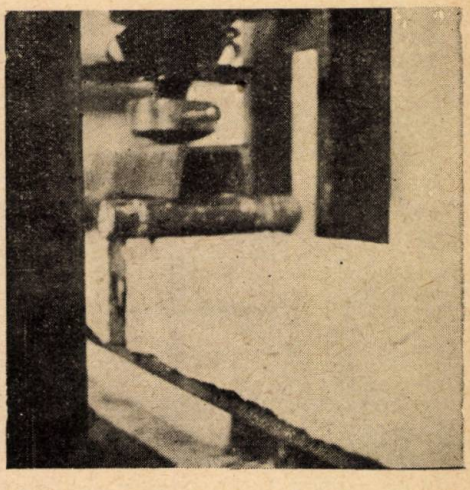


Fig. 8. — Aspecte de la încercarea unui element experimental.

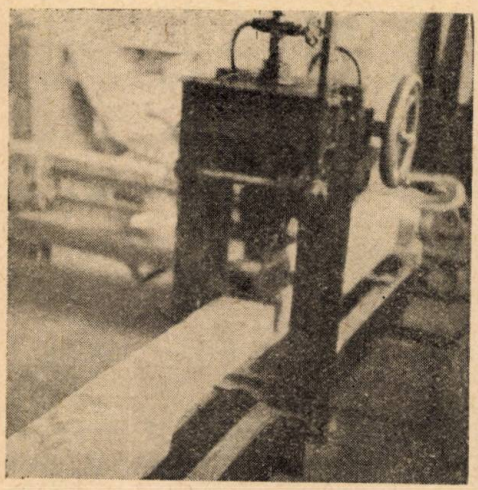


Fig. 9. — Aspecte de la încercarea unui element experimental.

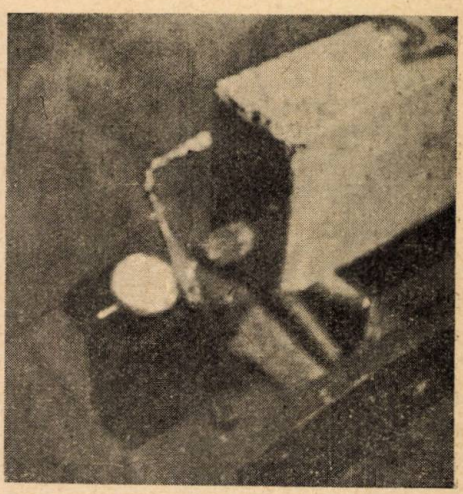


Fig. 10. — Aspecte de la încercarea unui element experimental.

5. *a)* Rezultatele încercărilor efectuate arată că rezistența de adeziune este sensibil influențată de compoziția mineralogică a cimenturilor întrebuințate.

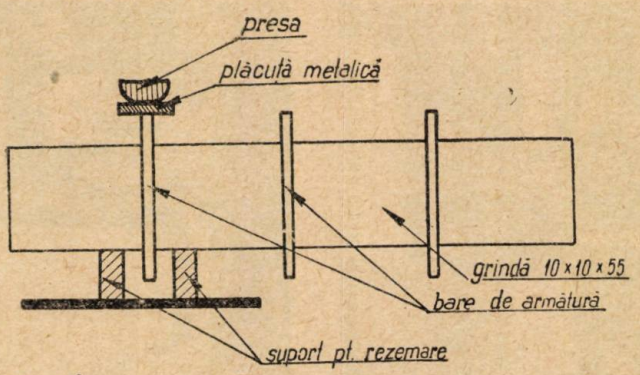


Fig. 11. — Încercare de adeziune prin împingerea armăturii în beton.

În figura 12 este arătată creșterea în timp a rezistenței de adeziune. Rezultă clar că pentru toate tipurile de ciment rezistența de adeziune crește mult mai repede în intervalul 7 ... 28 de zile, decît în intervalul 28 ... 90 de zile.

Valorile absolute la 7 zile sînt mai mici pentru cimentul A (70...85 %) și cimentul B (40...55 %) față de cimentul P. La 28 de zile, valorile pentru cimenturile A și P sînt îndeajuns de apropiate, iar la 90 de zile ele sînt sensibil egale. În schimb betonul executat cu ciment B, deși își mărește rezistența de adeziune ceva mai repede decît cel executat cu ciment P, rămîne încă la valori egale cu numai 55...70 % față de acesta din urmă la 28 de zile și 70...80 % la 90 de zile. În figura 13 sînt arătate comparativ valorile adeziunii pentru betoanele executate cu cimenturi A, B și P la 7, 28 și 90 de zile. În ceea ce privește variația procentuală față de valorile la 28 de zile, ea este cea mai pronunțată la cimentul B, urmat în ordine de cimentul A și P (fig. 14).

Comportarea arătată este pe deplin corespunzătoare compoziției mineralogice a cimenturilor utilizate; ea reflectă tocmai întărirea mai rapidă a silicatului tricalcic și a aluminatului tricalcic decît a silicatului bicalcic și a feroaluminatului tetracalcic.

b) Au fost analizate comparativ și valorile raportului rezistență la compresiune R_c, suprarezistență de adeziune R_a, precum și variația lor în timp (tabloul nr. 2 și figura 15).

Pentru cimenturile A și P, în general raportul $\frac{R_c}{R_a}$ scade puțin în intervalul 7...28 de zile (rezistența de adeziune crește mai repede decît rezistența la compresiune) și se menține sau crește puțin în intervalul 28...90 de zile. Rezistența de adeziune are în intervalul 7...28 de zile o creștere mai rapidă decît rezistența la compresiune, pentru că în primele 7 zile încă nu acționează unul din factorii componenți ai rezistenței la lunecarea armăturii în beton, respectiv contracția (elementele experimentale au fost păstrate în mediu umed primele 7 zile și apoi în aer), și în consecință valoarea lui R_a la 7 zile a fost mică.

După 28 de zile, R_a crește mai încet decît R_c (în literatură se arată de obicei necondiționat că raportul $\frac{R_a}{R_c}$ descrește o dată cu creșterea mărcii [4]).

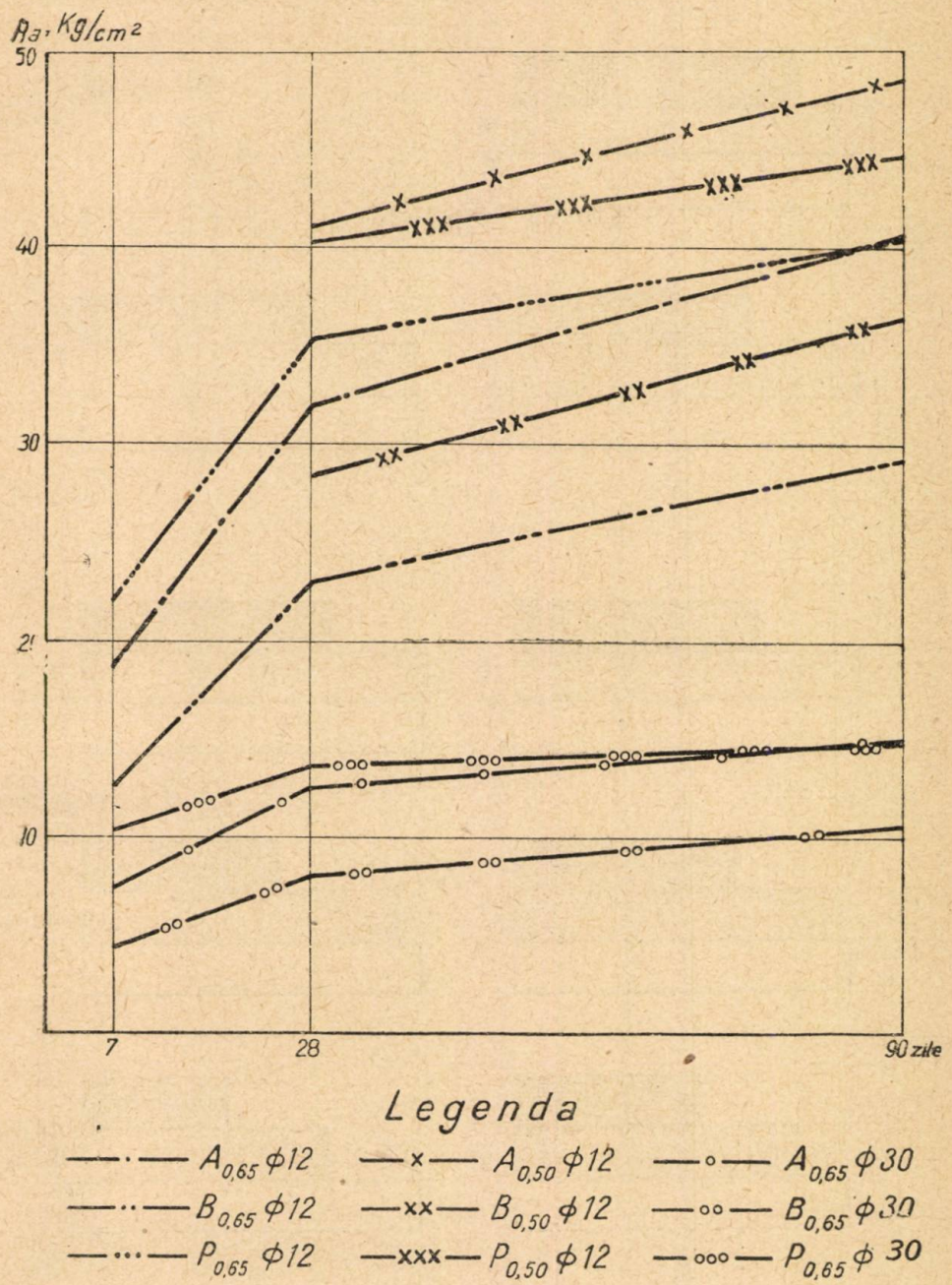


Fig. 12. — Variația în timp a rezistenței de adeziune R_a.

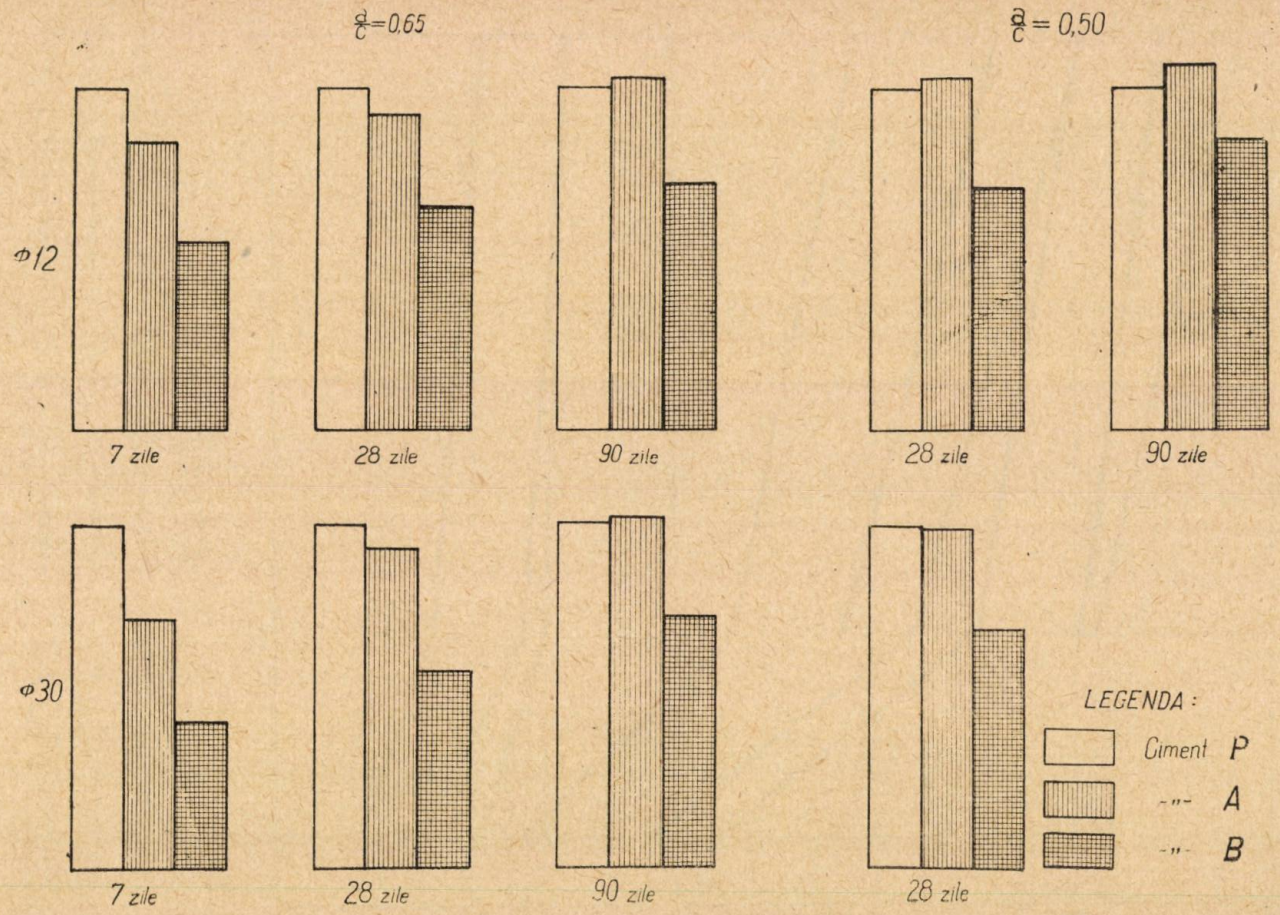


Fig. 13. — Rezistența de adeziune R_a.

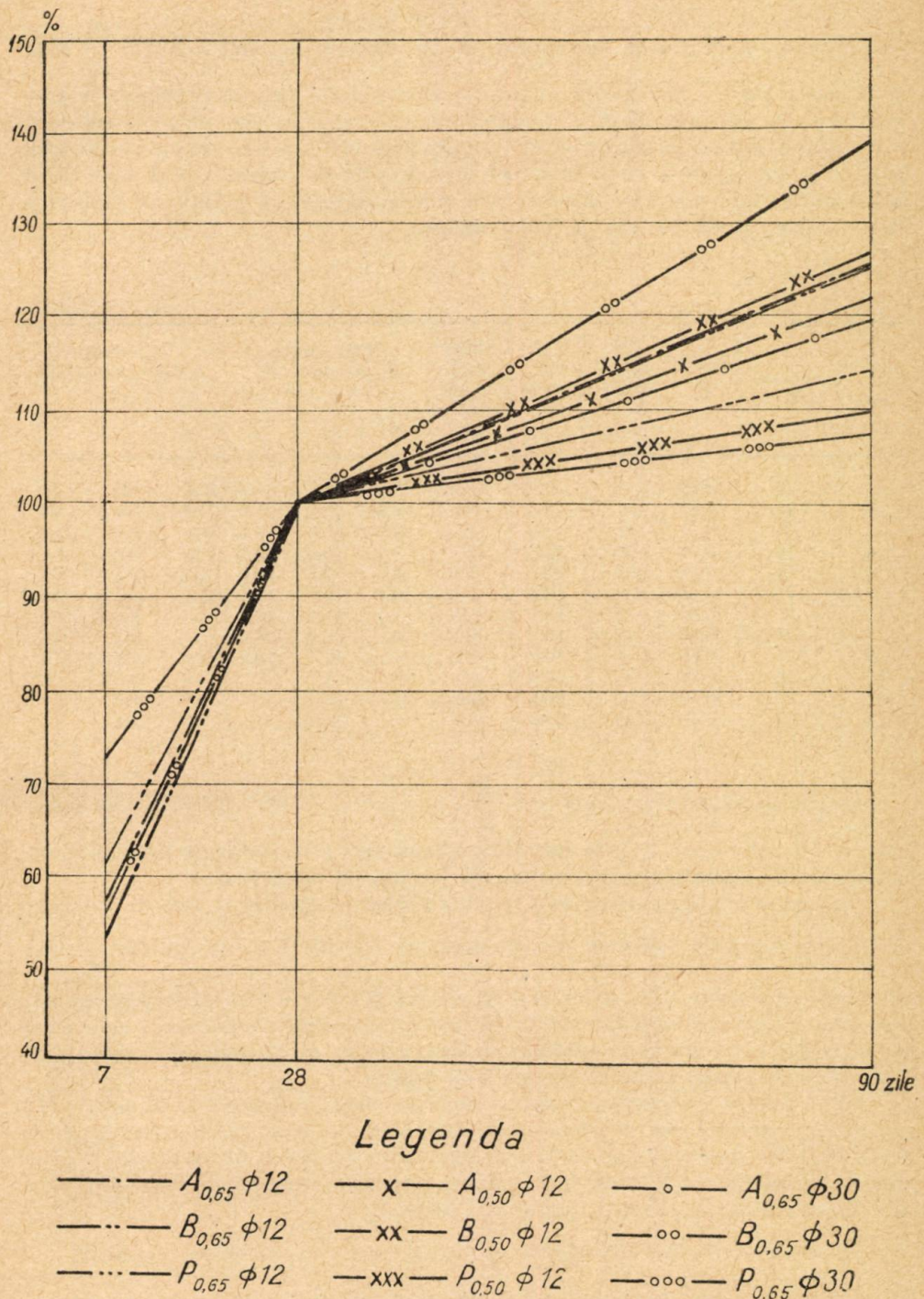


Fig. 14. — Variația procentuală a lui R_a.

Betonul confecţionat cu ciment *B* îşi măreşte sensibil raportul $\frac{R_c}{R_a}$ chiar şi în intervalul 7...28 de zile. Faptul este explicabil prin comportarea relativ mai bună la adeziune decît la compresiune a betoanelor mai plastice, respectiv a betoanelor la care piatra de ciment conţine mai multe geluri, fie din cauza compoziţiei miner logice a cimentului întrebuinţat, fie din cauza vîrstei mai tinere a betonului. Rezistenţa de adeziune este mai apropiată, ca natură, de rezistenţa la întindere, decît de cea la compresiune.

Tabloul

Nr. crt.	Ciment utilizat	Raport $\frac{a}{c}$	Diametrul armăturii mm	Lungimea elementului l, cm	Lungimea de ancoraj l_a, cm	Rezistenţa de adeziune R_a kg/cm²			Rezistenţa de compresiune R_c kg/cm²		
						7	28	90	7	28	90
1	*A*	0,65	12	100	25	18,6	32,1	40,4	124	195	246
2	*B*	0,65	12	100	25	12,2	22,9	28,9	40,4	106,4	138,8
3	*P*	0,65	12	100	25	22,0	35,2	40,3	183	250	293,8
4	*A*	0,65	30	200	50	7,3	12,6	15,1	109	188,1	240
5	*B*	0,65	30	200	50	4,3	7,8	10,8	40,4	106,4	138,8
6	*P*	0,65	30	200	50	10,2	13,6	14,8	158	192,5	286,6
7	*A*	0,50	12	100	20	—	41,1	48,3	—	299,4	373,1
8	*B*	0,50	12	100	20	—	28,4	36,0	—	153	213,1
9	*P*	0,50	12	100	25	—	40,3	44,6	—	317	385
10	*A*	0,50	30	200	35	—	21,1	—	—	299,4	—
11	*B*	0,50	30	200	35	—	15	—	—	157,5	—
12	*P*	0,50	30	200	35	—	21,3	—	—	331	—

Creşterea simţitoare a raportului $\frac{R_c}{R_a}$ în intervalul 28...90 de zile la încercarea nr. 6 (tabloul nr. 2) este datorită probabil unei neconcordanţe între calitatea betonului în elementele experimentale şi în probele ajutătoare.

In ceea ce priveşte comportarea relativă a celor trei cimenturi, este de remarcat că în timp ce pentru betoanele confecţionate cu ciment *A* şi *P*, valorile $\frac{R_c}{R_a}$ sînt în general apropiate, pentru betonul cu ciment *B* valorile sînt totdeauna sensibil mai mici. Explicaţia trebuie căutată desigur tot în comportarea relativ mai bună la întindere, respectiv şi la adeziune, a unui ciment cu conţinut mai ridicat de C_2S, deci de geluri, şi în consecinţă mai plastic.

c) O variaţie asemănătoare are şi raportul dintre rezistenţa la întindere, R_t, şi rezistenţa de adeziune, R_a: scădere în intervalul 7...28 de zile, creştere în intervalul 28...90 de zile (tabloul nr. 2 şi figura 16). Scăderea din intervalul 7...28 de zile se datoreşte tot valorii mai scăzute a rezistenţei de adeziune în primele 7 zile din cauza lipsei contracţiei în această perioadă.

În ceea ce priveşte comportarea relativă a celor trei cimenturi, raportul $\frac{R_t}{R_a}$ este sensibil mai mic pentru betonul confecţionat cu ciment *B*. Într-adevăr, pentru armătura de 12 mm diametru (la ∅ 30 mm datorită efortului total mare din

armături, au intervenit perturbări care au dus la ruperi premature), raportul $\frac{R_t}{R_a}$ variază în general între 0,85 și 1,0 pentru beton cu ciment *A*, între 0,8 și 0,95 pentru beton cu ciment *P* și între 0,6 și 0,8 pentru beton cu ciment *B*. Comportarea relativ mai bună la adeziune $\left(\text{raportul } \frac{R_t}{R_a} \text{ mai mic}\right)$ a betoanelor mai plastice, respectiv a betoanelor în care procentul de geluri din piatra de ciment este mai ridicat, este un fenomen confirmat și de creșterea înceată a raportului

nr. 2

Rezistența de întindere R_t kg/cm²			Aderiunea prin împingerea armăturii în beton kg/cm²			Contracția mm/m		R_c/R_a			R_t/R_a		
7	28	90	7	28	90	28	90	7	28	90	7	28	90
18,3	28	36,8	24	32,7	32,4	0,20	0,40	6,7	6,1	6,1	0,98	0,87	0,91
9,9	15,8	22,5	18,8	34,1	45,7	0,13	0,31	3,3	4,6	4,8	0,81	0,69	0,78
21	29,6	37,8	24	45	42,9	0,12	0,30	8,3	7,1	7,3	0,95	0,84	0,94
19	25,2	34,1	16	13	—	0,16	0,32	14,9	14,9	15,9	2,60	2,00	2,26
9,9	15,8	22,5	8,3	14	18,8	0,17	0,37	9,4	13,6	12,9	2,30	2,03	2,08
19,9	25,4	35,3	15,2	17	26,2	0,17	0,45	15,5	14,2	19,4	1,95	1,87	2,48
—	39	46,8	—	66	72,9	0,12	0,25	—	7,3	7,7	—	0,95	0,97
—	17	23,9	—	25,4	28,5	0,13	0,30	—	5,4	5,9	—	0,60	0,79
—	32,2	38,9	—	56	46,6	0,08	0,60	—	7,9	8,6	—	0,80	0,87
—	39	—	—	31	—	0,12	—	—	14,2	—	—	1,85	—
—	17	—	—	11,7	—	0,13	—	—	10,5	—	—	1,13	—
—	30,6	—	—	22,5	—	0,20	—	—	15,6	—	—	1,44	—

$\frac{R_t}{R_a}$ în perioada 28 . . . 90 de zile, datorită probabil sporirii rețelei cristaline, respectiv micșorării procentului de geluri în timp.

Tot în acest fel se poate explica:

— pe de o parte, valorile ceva mai mici ale raportului $\frac{R_t}{R_a}$ la un beton cu ciment *P* decît la un beton cu ciment *A*, în cazul raportului $\frac{a}{c} = 0{,}50$;

— pe de altă parte, creșterea mai rapidă a raportului $\frac{R_t}{R_a}$ la betonul cu ciment *P* și a raportului $\frac{a}{c} = 0{,}50$.

Într-adevăr, reducerea raportului $\frac{a}{c}$ duce la o micșorare a vitezei de hidratare mai sensibilă pentru cimentul *P*, care conține mai mult C_3A și necesită în consecință mai multă apă de hidratare. În perioada 28...90 de zile însă, creșterea rețelei cristaline este mai înceată la cimentul *P* decît la cimentul *A* făcînd ca raportul $\frac{R_t}{R_a}$ să crească mai repede.

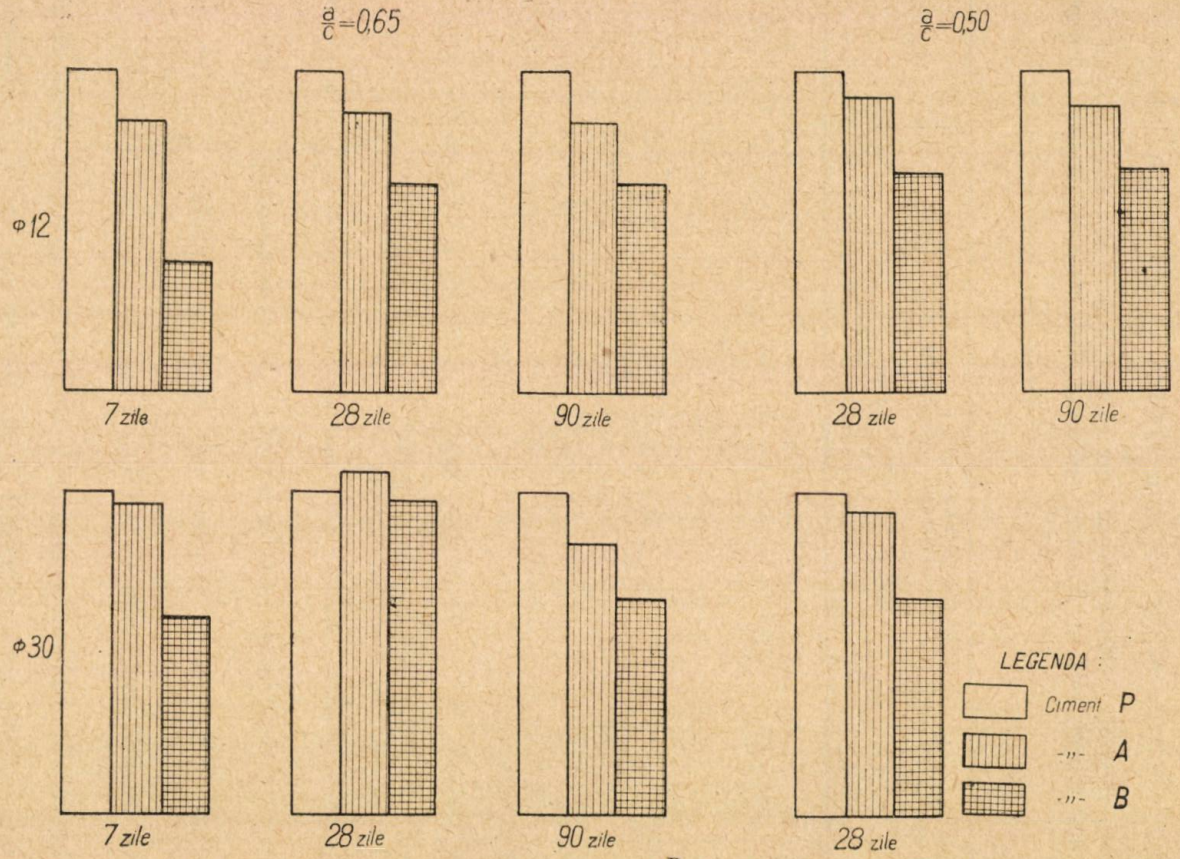


Fig. 15. — Raportul $\frac{R_t}{R_a}$.

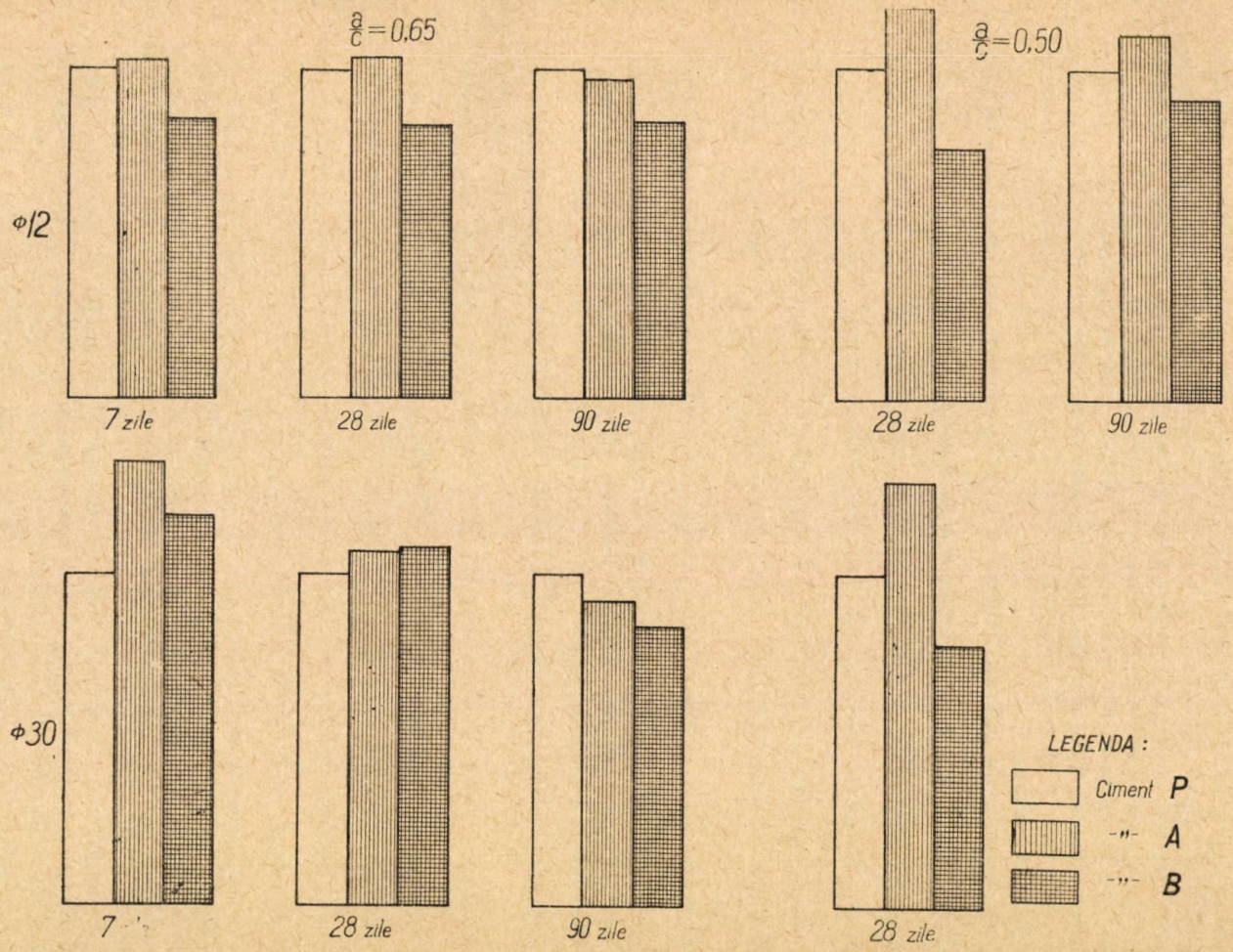


Fig. 16. — Raportul $\frac{R_c}{R_a}$.

Cum încleştarea betonului în neregularităţile armăturii este factorul predominant al adeziunii, este probabil că influenţa plasticităţii betonului asupra adeziunii se manifestă în special prin variaţia acestei încleştări şi mai puţin prin variaţia contracţiei şi a încleierii. Ţinînd seama de observaţiile lui O. I. Berg [6], este probabil că cimenturile mai plastice duc la un număr sporit de microfisuri, iar cimenturile mai puţin plastice la un număr mai redus de microfisuri şi în consecinţă la o deschidere mai accentuată a lor, respectiv la o comportare relativă mai slabă la adeziune. Tot în sensul concentrării la un număr mai redus de microfisuri şi deci a unei comportări relative mai slabe la adeziune acţionează şi sporirea razei de armare (echivalentă în cazul încercărilor din prezentul studiu cu sporirea diametrului armăturii).

d) Valorile absolute ale rezistenţei de adeziune sînt mai mari (în mod obişnuit cu 10...25 %) în cazul betoanelor cu raportul $\frac{a}{c}$ mai mic (tabloul nr. 2 şi figura 12). Fenomenul se datoreşte desigur acelorași cauze ca şi sporirea celorlalte rezistenţe mecanice ale betonului în cazul reducerii raportului $\frac{a}{c}$.

La armătura ⌀ 12 mm (la ⌀ 30 mm, aşa cum s-a arătat, au existat perturbări datorită eforturilor mari din armături), raportul $\frac{R_c}{R_a}$ este mai mare în cazul unui raport $\frac{a}{c}$ mai mic. Fenomenul este explicabil tot prin natura diferită a celor două solicitări comparate, fiind de altfel cunoscut din literatură, aşa cum s-a arătat, faptul că rezistenţa de adeziune creşte mai încet decît rezistenţa la compresiune a betonului respectiv.

În ceea ce priveşte raportul $\frac{R_t}{R_a}$, valorile obţinute sînt în general mai mici în cazul unui raport $\frac{a}{c}$ mai mic. Explicaţia poate fi bazată pe aceeaşi ipoteză a unei mai bune comportări relative la adeziune a betoanelor cu cimenturi avînd un procent mai mare de geluri. Într-adevăr, un raport $\frac{a}{c}$ mai mare sporeşte viteza de hidratare, grăbeşte mărirea reţelei cristaline şi în consecinţă face să crească mai repede R_t decît R_a, să crească deci $\frac{R_t}{R_a}$.

e) Descreşterea rezistenţei medii de adeziune o dată cu creşterea diametrului armăturii este un fenomen cunoscut din literatură. El a fost confirmat în întregime în cadrul încercărilor efectuate (tabloul nr. 2 şi figura 12). Valorile obţinute au arătat însă, în cazul diametrului de 30 mm, o scădere mult mai însemnată a adeziunii decît scăderile menţionate în mod curent în literatură.

Este probabil că această reducere sporită a rezistenţei la smulgerea armăturii din beton se datoreşte faptului că pentru barele groase (⌀ 30 mm), acoperirea de 2,5 cm beton este insuficientă pentru a transmite în bune condiţii efortul însemnat din bară la betonul înconjurător. În betoanele mai slabe de altfel (în special beton cu ciment *B* şi raportul $\frac{a}{c} = 0{,}65$), în timpul încercărilor au apărut fisuri longitudinale, fie pe părţile laterale, fie mai ales pe partea de dedesubt a elemen-

tului experimental (fig. 17). Fisurile sînt datorite probabil apăsării puternice a barei de armătură pe stratul de beton de dedesubt, respectiv eforturilor unitare de întindere însemnate ce iau naștere în beton.

În cazul betoanelor cu raportul $\frac{a}{c} = 0{,}50$, reducerea rezistenței de adeziune în cazul sporirii diametrului armăturii este mai mică decît în cazul betoanelor cu raportul $\frac{a}{c} = 0{,}65$.

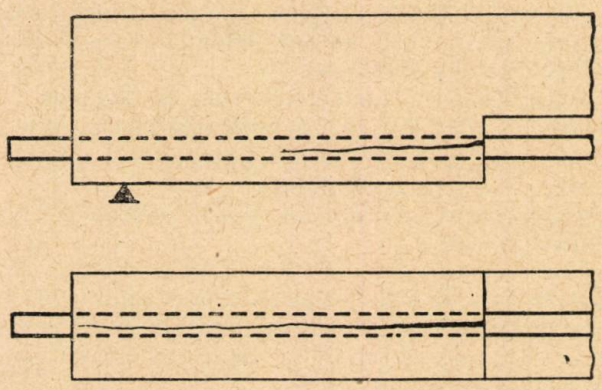


Fig. 17. — Fisuri apărute la ruperea unor elemente cu armătura ∅ 30.

Într-adevăr, în timp ce pentru $\frac{a}{c} = 0{,}65$ (beton cu ciment *P*) raportul $\frac{R_t}{R_a}$ crește cu 123 %, în cazul trecerii de la diametrul 12 mm la diametrul 30 mm, pentru $\frac{a}{c} = 0{,}50$, creșterea este de numai 80 % *).

La încercările suplimentare efectuate asupra unor elemente cu acoperire de 6 cm, chiar pentru $\frac{a}{c} = 0{,}65$, creșterea raportului $\frac{R_t}{R_a}$ a fost de 56 % la 28 de zile și de numai 34 % la 90 de zile (la 7 zile, creșterea a fost însă de 110 %).

6. *a)* În concluzie, studiile întreprinse au arătat în mod clar faptul că există o influență simțitoare a compoziției mineralogice a cimentului utilizat asupra rezistenței de adeziune.

Rezistența ce se opune la lunecarea armăturii în beton este un fenomen complex, influențat de un număr foarte mare de parametri, a căror variație suprapusă poate da naștere chiar la aspecte contradictorii.

Din încercări a reieșit totuși clar faptul că betoanele executate cu ciment *B*, respectiv cu o componentă gelică mai însemnată, au în primele luni rezistențe mai mici de adeziune, dar care cresc mai repede decît cele ale betoanelor cu mai puține

*) Întrucît s-au obținut unele diferențe între șarje deosebite ale unui beton de același tip, s-a preferat să se compare rapoarte de rezistență și nu valori absolute. S-a utilizat raportul $\frac{R_t}{R_a}$ considerîndu-se că rezistența de adeziune este mai apropiată de cea de întindere decît de cea de compresiune.

geluri (ciment *A* și *P*). De asemenea a reieșit în mod convingător faptul că raportul $\frac{R_t}{R_a}$ este mai scăzut cu cît conținutul de geluri al cimentului utilizat este mai mare. Aceasta are drept urmare o distanță mai mică între fisuri în cazul solicitării la încovoiere a elementelor executate cu beton mai plastic.

b) Metoda folosită s-a dovedit a fi comodă, îndeajuns de economică și de precisă. Este de remarcat că rezultatul fiecărei încercări în parte reprezintă prin el însuși un minimum a două valori corespunzătoare celor două capete. Sistemul cu semigrinda metalică [1], [2] necesită operații suplimentare atît în atelier, cît și la încercarea pentru prinderea armăturii de semigrinda metalică.

Încercările ajutătoare efectuate au dat rezultate concordante atît la compresiune, cît și la întindere din încovoiere.

Rezultatele măsurătorilor asupra rezistenței de adeziune, măsurată prin împingerea armăturii în beton, nu au fost însă concludente, atît din cauza unor defecțiuni de turnare, cît și mai ales din cauza greutății de a face să coincidă axa armăturii cu direcția exercitării efortului.

Rezultate neconcordante s-au obținut pentru contracție, datorită probabil metodologiei nesatisfăcătoare.

c) Concluziile studiului vor putea fi adîncite, pe de o parte, cu ajutorul rezultatelor ce se vor obține prin încercările speciale asupra contracției, pe de altă parte, cu ajutorul datelor ce vor fi căpătate asupra legăturii dintre proprietățile vîscoplastice ale betonului și microfisurarea sa, în cadrul încercărilor făcute pentru studierea curgerii lente a betonului.

ВЛИЯНИЕ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА ЦЕМЕНТА НА СЦЕПЛЕНИЕ БЕТОНА С АРМАТУРОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Изучаемый вопрос относится к ряду исследований по физико-механическим свойствам бетона и железобетона в зависимости от минералогического состава применяемых цементов.

В целях выявления влияния этого минералогического состава были произведены испытания цемента с преобладанием трикальциевого кремния (цемент А), цемента с преобладанием двукальциевого кремния (цемент В) и цемента, подходящего по составу к цементу портланд (цемент Р).

В связи с явлением сцепления бетона с арматурой были произведены испытания по истечению 7, 28, 90 дней при отношении водоцемент, равном 0,65 соответственно 0,50. Была применена арматура OL 38 диаметром 12 и 30 мм.

Для испытаний применяется оригинальный метод, основанный на принципе балки, испытываемой на изгиб, с шарнирной связью в средней своей части (В. И. Мурашев и К. В. Михайлов).

В результате испытаний выяснилось следующее.

Бетоны, изготовленные с цементом *B*, то есть с более значительным гелевым составом, обладают в первые месяцы после заливки меньшей сопротивляемостью на сцепление, которая однако увеличивается быстрее, чем у бетонов с меньшим количеством геля (цемент А и Р).

Отношение между сопротивлением на растяжение и средними сопротивлением на сцепление $\frac{R_t}{R_a}$ уменьшается настолько, насколько содержание геля в применяемом цементе больше. Вследствие этого, трещины, образующиеся при усилии на изгиб элементов, выполненных из более пластичных бетонов, находятся на меньшем расстоянии одни от других.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Опытный образец.
Рис. 2. — Приспособление для передачи бетону сжимающего усилия.
Рис. 3. — Опытный образец до испытания.
Рис. 4. — Схема испытания.
Рис. 5. — Металлическая пластинка для прекращения сцепления между полубалками.
Рис. 6. — Удержание внутреннего плеча рычага на уровне шарнира.
Рис. 7. — Различные моменты испытания опытного образца.
Рис. 8. — Различные моменты испытания опытного образца.
Рис. 9. — Различные моменты испытания опытного образца.
Рис. 10. — Различные моменты испытания опытного образца.
Рис. 11. — Испытание на сцепление проталкиванием арматуры в бетоне.
Рис. 12. — Изменение сопротивления сцепления в зависимости от времени.
Рис. 13. — Сопротивление сцепления R_a.
Рис. 14. — Процентное изменение R_a.
Рис. 15. — Отношение $\frac{R_t}{R_a}$.
Рис. 16. — Отношение $\frac{R_c}{R_a}$.
Рис. 17. — Трещины, появляющиеся при изломе частей арматуры ⌀ 30.

INFLUENCE DE LA COMPOSITION MINÉRALOGIQUE DU CIMENT SUR L'ADHÉSION ENTRE LE BÉTON ET LES ARMATURES

(RÉSUMÉ)

Cette étude fait partie d'un ensemble de recherches sur les propriétés physico-mécaniques du béton et du béton armé, en fonction de la composition minéralogique des ciments utilisés.

Pour analyser l'influence de cette composition minéralogique, on a fait des essais avec un ciment dans lequel prédomine le silicate tricalcique (ciment A), un ciment dans lequel prédomine le silicate bicalcique (B) et un ciment dont la composition est semblable à celle du ciment portland (P).

Pour déterminer l'adhésion entre le béton et les armatures, on a fait des essais à des intervalles de 7, 28 et 90 jours, avec des rapports eau-ciment, 0,65 et 0,50. On a utilisé des armatures OL 38, aux diamètres de 12 et 30 mm.

Les Auteurs ont appliqué une méthode originale, basée sur le principe d'une poutre soumise à la flexion, ayant une articulation au milieu, principe adopté par les chercheurs soviétiques V. I. Mourachov et K. V. Mikhaïlov.

Les résultats des essais ont montré que:

Les bétons confectionnés en ciment *B*, c'est-à-dire de composition gélique plus importante, ont, les premiers mois après leur coulée, des résistances plus fai-

bles à l'adhésion, qui augmentent pourtant plus vite que celle des bétons avec moins de gels (ciments A et P).

Le rapport entre la résistance du béton à la tension et la résistance moyenne à l'adhésion $\frac{R_t}{R_a}$ est d'autant plus petit que le contenu de gels du ciment utilisé est plus grand. Ceci a pour conséquence une distance plus petite entre les fissures, dans le cas de la sollicitation à la flexion des éléments exécutés avec des bétons plus plastiques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Elément expérimental.
Fig. 2. — Dispositif de transmission de l'effort de compression du béton.
Fig. 3. — L'élément expérimental avant les essais.
Fig. 4. — Schéma de charge.
Fig. 5. — Plaquette métallique pour l'interruption de l'adhésion entre les demi-poutres.
Fig. 6. — Maintien du bras de levier intérieur en regard de l'articulation.
Fig. 7, 8, 9 et 10. — Quelques aspects des essais d'un élément expérimental.
Fig. 11. — Essai d'adhésion par poussée de l'armature dans le béton.
Fig. 12. — Variations au cours du temps de la résistance d'adhésion.
Fig. 13. — La résistance d'adhésion R_a.
Fig. 14. — Variations de R_a exprimée en pour-cents.
Fig. 15. — Le rapport $\frac{R_t}{R_a}$.
Fig. 16. — Le rapport $\frac{R_c}{R_a}$.
Fig. 17. — Fissures constatées à la rupture de certains éléments à l'armature de diamètre égal à 30.

BIBLIOGRAFIE

1. K. V. Mihailov, *Şteplenie armaturî s betonom.* Isledovanie jelezobetonnîh konstrukţii Moscova, 1952.
2. A. Bichara, *Etude du problème de l'adhérence dans le béton armé.* Cahiers du Centre scientifique et technique du bâtiment, 1951, nr. 12 şi 13.
3. V. I. Muraşev, *Treşcinoustoicivosti, jestkosti i procinosti jelezobetona.* Osnova soprotivlenia jelezobetona, Moscova, 1950.
4. C. V. Sahnovschi, *Construcţii de beton armat.* E.S.A.C., Bucureşti, 1953, vol. I.
5. V. Nicolau, S. Abramovici, Şt. Enescu, N. Mihail, Gh. Stăncu-lescu şi R. Zwiebel, *Introducere în teoria betonului.* E.S.A.C., Bucureşti, 1954, vol. I.
6. O. I. Berg, *K voprosu o procinosti i plasticinosti betona.* DAN, 1950, t. LXX, nr. 4.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

INFLUENȚA COMPOZIȚIEI MINERALOGICE A CIMENTULUI ASUPRA PROPRIETĂȚILOR FIZICO-MECANICE ALE BETONULUI ȘI BETONULUI ARMAT. CURGERE LENTĂ

DE

A. FROIMESCU și V. ILLE

1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA CURGERII LENTE LA BETOANE SIMPLE ȘI ARMATE

Prin curgere lentă se înțelege proprietatea pe care o au betoanele simple și armate de a-și mări deformațiile sub sarcină constantă sau de a-și micșora eforturile unitare atunci cînd sînt menținute sub tensiune și sub lungime constantă (relaxare).

Material experimental pentru identificarea acestui fenomen există încă din 1905—1906 și anume în încercările Comisiei franceze pentru beton armat. Din păcate însă comisia alcătuită aproape exclusiv din teoreticieni și matematicieni, au înlăturat ca neconforme toate datele experimentale referitoare la plasticitatea betonului, ca fiind în completă neconcordanță cu teoriile lor.

De asemenea, s-a remarcat același feomen la un pod de beton armat boltit de 72,50 m deschidere și pleoștire 1: 15, cu trei articulații, care la șase luni de la descintrare căpătase o creștere a săgeții permanente de 13 cm, vizibilă cu ochiul liber.

Din lipsa unor studii mai aprofundate, abia în anii 1928—1930 s-a pus în evidență fenomenul curgerii lente atît calitativ, cît și cantitativ și s-au făcut ipoteze asupra cauzelor fizice care îl provoacă.

De la această dată s-au făcut nenumărate studii și cercetări atît teoretice cît și experimentale. Fenomenul este însă foarte complex, variabilele fiind multiple, așa încît în momentul de față sînt încă deosebit de numeroase problemele la care nu s-a obținut un răspuns satisfăcător.

Ipoteza cea mai acceptabilă asupra fenomenului fizic este aceea dată de Ș e i k i n: curgerea lentă se datorește naturii cristalin-gelice a pietrei de ciment. Componența gelică supusă compresiunilor își mărește deformațiile datorită proprietăților sale vîscoase. Cu timpul, datorită procesului de îmbătrînire a gelurilor, care produce în același timp contracția pietrei de ciment, viscozitatea gelurilor crește și o dată cu ea se amortizează și creșterea deformațiilor.

Amortizarea curgerii lente a componenței gelice se mai explică și prin descărcarea eforturilor în componentele mai rigide ale pietrei de ciment, ale mortarului și betonului: scheletul cristalin al fazei hidratate a pietrei de ciment, agregatele, se încarcă cu eforturi suplimentare pe măsura creșterii deformațiilor în componenta gelică. Acest ultim motiv explică și acțiunea elastică ulterioară (postacțiune elastică) a betoanelor descărcate de sarcini. U l i ţ k i a propus o schemă (fig. 1), care explică mecanismul curgerii lente. Simbolurile 1, 2 și 3 reprezintă proprietățile pietrei de ciment, iar 4 și 5 pe cele ale agregatelor; 1 și 4 reprezintă proprietățile elastice, 3 și 5 pe cele plastice, iar 2 pe cele vîscoase cu amortizarea amintită în timp.

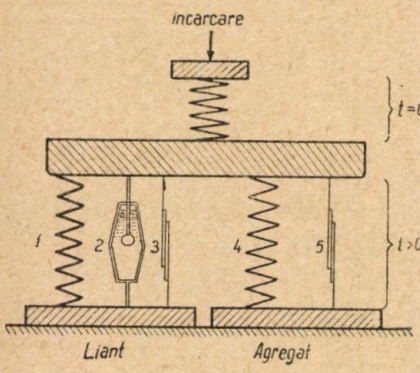


Fig. 1

În ultima vreme, plecînd de la studiile lui B e r g se poate considera că o parte din deformațiile permanente se datoresc apariției și deschiderii progresive a microfisurilor paralele cu direcția efortului.

Materialul experimental existent pînă acum se referea în special la probe comprimate centric și mai puțin la probe încovoiate. Studiile privind creșterea deformațiilor în timp la întindere pură și la smulgerea armăturii din beton sînt pînă acum foarte reduse. Se poate totuși afirma cu certitudine existența curgerii lente în toate cazurile de solicitări amintite mai înainte.

Valorile deformațiilor de curgere lentă depind de foarte mulți factori. Astfel aceste deformații variază în același sens cu raportul apă ciment, cu cantitatea de ciment la m^3 de beton, cu cantitatea de componenți mineralogici ai cimentului care produc geluri, cu finețea de măcinare, și variază în sens contrar cu modulul de elasticitate al agregatelor, cu compactitatea betonului, cu procentul de armare, cu mărimea probelor și cu rezistența betoanelor.

Păstrarea înainte și după încărcare în mediu uscat, eforturile unitare mari și o vîrstă mai mică a betonului în momentul încărcării măresc de asemenea deformațiile de curgere lentă.

Factorii cu care variază mărimea deformațiilor de curgere lentă sînt multipli, ceea ce face ca fenomenul să fie extrem de complex. În ordinea importanței trebuie însă acordată o atenție deosebită compoziției mineralogice a cimenturilor, care în ultima instanță este chiar cauza curgerii lente, așa cum s-a arătat mai înainte. De aceea studiul curgerii lente reprezintă o etapă importantă a studiului general în legătură cu influența compoziției mineralogice a cimenturilor asupra proprietăților fizico-mecanice ale betoanelor simple și armate.

2. OBIECTIVE URMĂRITE ȘI TEHNOLOGIA ÎNCERCĂRILOR

Așa cum s-a menționat mai înainte, scopul principal al studiului de față este cercetarea influenței compoziției mineralogice a cimenturilor asupra curgerii lente, și pentru aceasta s-a lucrat cu cele trei cimenturi A, B și P arătate în alte studii; în mod cu totul analog s-a căutat să se determine și înfluența raportului apă ciment, lucrîndu-se cu două valori diferite: 0,50 și 0,65. În plus, la cimenturile P s-a căutat să se determine și influența procentului de armare.

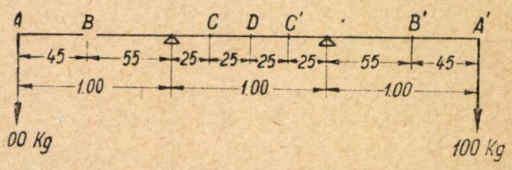
Caracteristicile betoanelor din care s-au confecționat elementele experimentale precum și procentele de armare sînt arătate în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Caracteristicele elementelor încercate

Numirea grinzii	$\frac{A}{C}$	kg ciment la m³	R_{28} kg/cm²	R_{t28} kg/cm²	R_{90} kg/cm²	R_{180} kg/cm²	R_{t90} kg/cm²	R_{t180} kg/cm²	$E_{28}^{compr.}$ kg/cm²	$E_{90}^{compr.}$ kg/cm²	$A_f = A'_f$	$\mu = \mu'$
B_1	0,50	300	94,5	14,55	185,0	200	22,42	28,10	220 000	360 000	3 ⌀ 12	1,41%
B_2	0,65	300	81,9	13,75	148,0	151	20,20	22,70	205 800	266 800	3 ⌀ 12	1,41%
A_1	0,50	300	263,00	24,0	324,6	325	28,90	32,90	370 000	348 400	3 ⌀ 12	1,41%
A_2	0,65	300	145,6	18,62	207,6	250	22,30	24,00	262 000	250 000	3 ⌀ 12	1,41%
P_1^1	0,50	300	233,0	27,10	256,0	299	32,80	30,40	325 000	368 000	3 ⌀ 12	1,41%
P_2^1	0,65	300	193,0	20,60	204,0	205	24,7	23,5	285 000	291 000	3 ⌀ 12	1,41%
P_1^2	0,50	300	233,0	27,10	256,0	299	32,80	30,40	325 000	368 000	2 ⌀ 20	2,62%
P_2^2	0,65	300	193,0	20,60	204,0	205	24,7	23,5	285 000	291 000	2 ⌀ 20	2,62%
P_1^3	0,50	300	233,0	27,10	256,0	299	32,80	30,40	325 000	368 000	3 ⌀ 20	3,93%
P_2^3	0,65	300	193,0	20,60	204,0	205	24,7	23,5	285 000	291 000	3 ⌀ 20	3,93%

În figura 2 sînt arătate caracteristicile geometrice ale elementelor încercate. Pentru a se determina caracteristica curgerii lente, adică raportul dintre deformația totală și cea instantanee, ținînd seama de spațiul disponibil și de imposibilitatea de a bloca multă vreme ceasuri micro-comparatoare, s-a lucrat cu grinzi încovoiate, sarcinile acționînd în consolă, încărcarea făcîndu-se la 28 zile de la turnare.



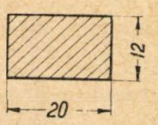


Fig. 2

Măsurătorile s-au făcut cu un micrometru de interior cu precizia de 1/100 mm, elementul de referință fiind o grindă metalică așezată peste grinda încercată. Măsurătorile de săgeți efectuate în cele șapte puncte arătate în figură, permit obținerea axei deformate a grinzilor încercate și prin aceasta o serie de verificări suplimentare.

S-a arătat mai înainte că o parte a curgerii lente se poate explica prin apariția și dezvoltarea în timp a micro-fisurilor. Pentru a se verifica din punct de vedere calitativ această ipoteză, s-au făcut o serie de încercări cu elemente nearmate

confecţionate cu aceleaşi betoane. O parte din grinzi au fost încărcate analog cu grinzile armate, sarcinile fiind însă mai mici (25 kg), iar altă parte au fost păstrate neîncărcate. Comparaţia valorilor R_t între grinzile încărcate şi cele martor, poate permite obţinerea unor concluzii calitative în legătură cu apariţia şi dezvoltarea micro-fisurilor în timp.

3. DATE EXPERIMENTALE

În diagramele din figurile 3, 4, 5 şi 6 se văd valorile măsurate pentru săgeţi în cele 4 puncte arătate în figura 2.

Se poate remarca imediat — aşa cum era şi de aşteptat — că deformaţiile de curgere lentă cresc cu raportul apă/ciment; ele sînt mai mari la cimentul B, mai mici la A şi cele mai reduse la P, rezultînd astfel importanţa deosebită a compoziţiei mineralogice a cimenturilor. De asemenea rezultă foarte clar din datele experimentale obţinute că procentul de armare are o importanţă deosebită, deformaţiile variind în sens invers cu mărimea sa.

În tabloul nr. 2 s-au trecut valorile calculate ale caracteristicei curgerii lente φ'_t stabilite prin relaţia $\varphi'_t = \frac{\Delta_t}{\Delta_0} - 1$ pentru capătul consolei. Valoarea φ'_t ţine seama şi de prezenţa armăturilor care micşorează deformaţiile de curgere lentă prin redistribuirea eforturilor interioare, micşorînd continuu partea preluată de beton.

Tabloul nr. 2

Caracteristica curgerii lente φ'

Grinda	B_1	B_2	A_1	A_2	P_1^1	P_2^1	P_1^2	P_2^2	P_1^3	P_2^3
$A_f = A'_f$	3 ø 12	3 ø 12	3 ø 12	3 ø 12	3 ø 12	3 ø 12	2 ø 20	2 ø 20	3 ø 20	3 ø 20
la 30 zile	1,71	1,07	1,09	1,48	1,07	1,07	0,87	0,83	0,84	0,87
la 60 zile	2,41	1,57	1,79	2,10	1,41	1,50	1,15	1,23	1,00	1,13
la 120 zile	3,06	1,89	2,35	2,64	1,97	1,99	1,66	1,48	1,27	1,27

Observaţie. Valoarea mai mică a măsurii curgerii lente pentru B_2 în raport cu B_1 se explică prin săgeata iniţială mare pe care a căpătat-o.

4. CONSIDERAŢII ASUPRA REZULTATELOR OBŢINUTE ŞI VALABILITATEA LOR

Pentru a putea vedea în ce măsură se poate conta pe rezultatele obţinute trebuie analizată puţin valabilitatea lor.

Pentru aceasta, primul lucru necesar este compararea modulilor de elasticitate instantanee, obţinuţi prin diferite procedee. În tabloul nr. 1 s-au trecut modulii de elasticitate obţinuţi la compresiune pe prisme de $80 \times 20 \times 20$ cm, la eforturi unitare de circa 30 kg/cm^2, corespunzătoare eforturilor reale din grinzile încercate. Întrucît cu siguranţă unele grinzi au fisurat în momentul încărcării, s-a determinat şi modulul de elasticitate la încovoiere (convenţional), considerînd uzual

$$E_b^{\text{încov.}} = 0{,}625\ E_b^{\text{compr.}}.$$

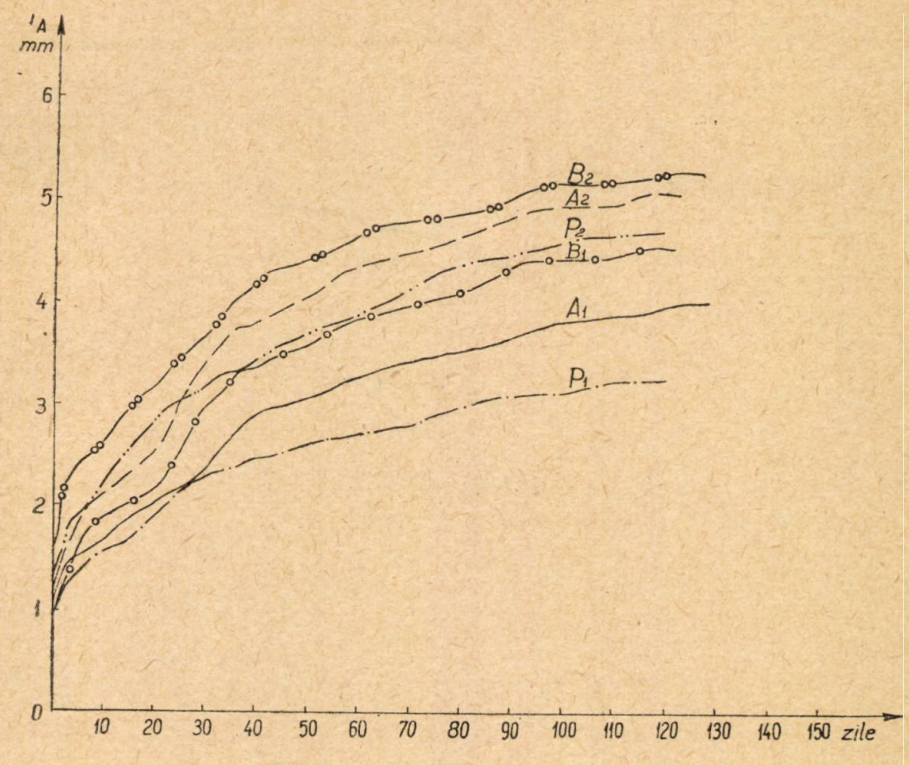

l_A
mm
6
5
4
3
2
1
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 zile
B_2
A_2
P_2
B_1
A_1
P_1

Fig. 3

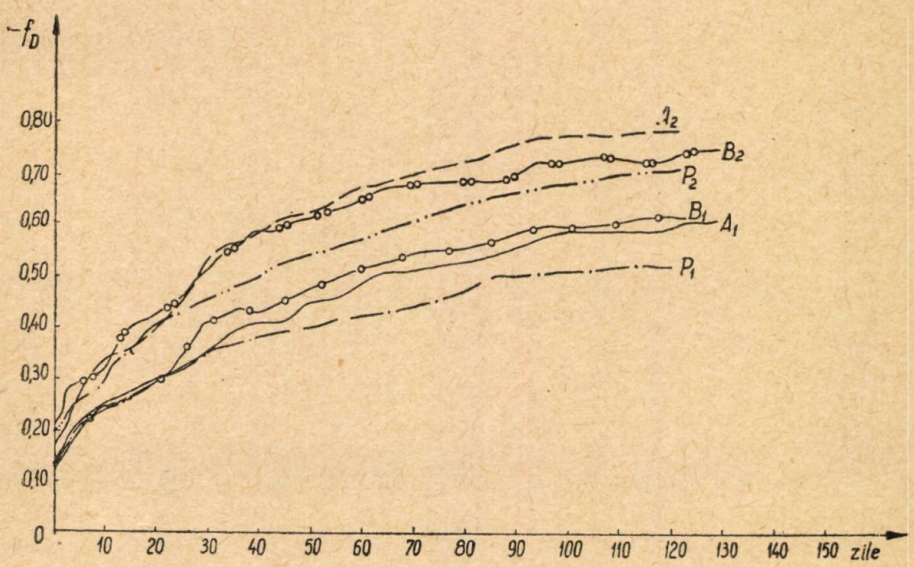

f_D
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 zile
A_2
B_2
P_2
B_1
A_1
P_1

Fig. 4

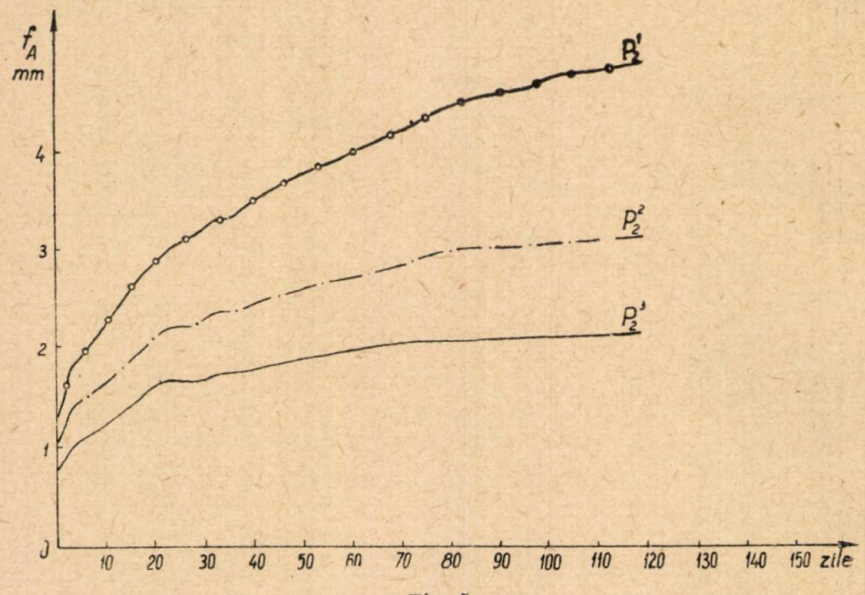

f_A
mm
4
3
2
1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
zile
P_2'
P_2^2
P_2^3

Fig. 5

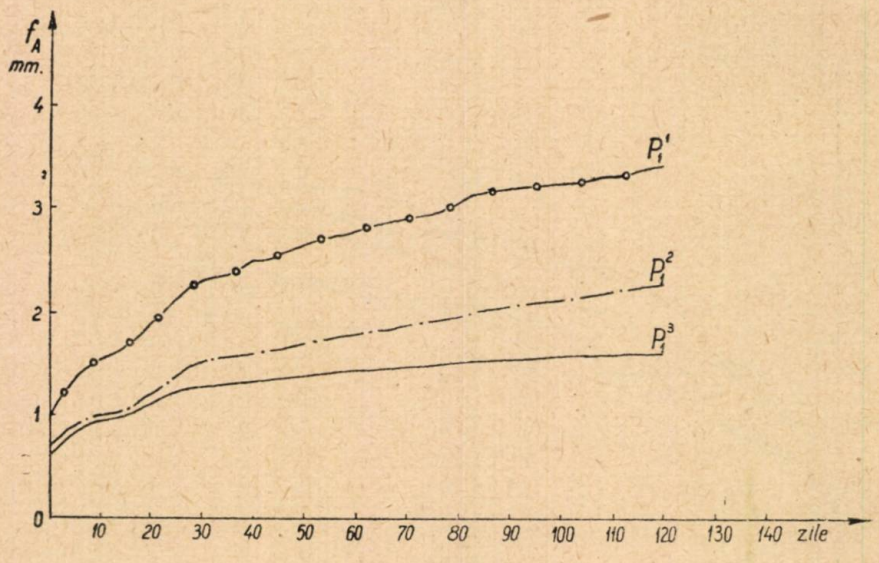

f_A
mm.
4
3
2
1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
zile
P_1'
P_1^2
P_1^3

Fig. 6

Această valoare, considerată ca direct măsurată s-a comparat cu valoarea lui $E_b^{incov.}$ dată de STAS pentru marca corespunzătoare și cu valoarea E_b obținută din compararea săgeții măsurate a capătului consolei cu săgeata calculată în funcție de valoarea E_b ce trebuie determinată.

În tabloul nr. 3 s-au trecut valorile obținute pentru E_b, așa cum s-a arătat mai înainte.

Tabloul nr. 3

Comparația modulilor de elasticitate

Grinda	B_1	B_2	A_1	A_2	P_1^1	P_2^1	P_1^2	P_2^2	P_1^3	P_2^3
$E_b^{compr.}$ din măsurătoare directă	220 000	205 800	370 000	262 000	325 000	285 000	325 000	285 000	325 000	285 000
$E_b^{încov.} = 0{,}625\ E_b^{compr.}$	137 500	128 500	231 000	163 000	203 000	178 000	203 000	178 000	203 000	178 000
$E_b^{încov.}$ din norme corespunzător mărcii	113 400	104 000	202 600	144 000	193 000	176 000	193 000	175 000	193 000	175 000
$E_b^{încov.}$ dedus din săgeți	231 000	98 500	231 000	163 000	214 000	130 000	283 000	134 000	271 000	203 000

Analizînd datele din tabloul nr. 3 se vedea că în anumite cazuri (B_2, P_2^1, P_2^2) modulul de elasticitate dedus din săgeți este mai mic decît celelalte, ceea ce înseamnă că elementele au fisurat mai mult decît se consideră normal. Alte elemente (în special B_1) au fisurat mai puțin decît era de așteptat, și din această cauză modulii de elasticitate deduși din săgeți sînt mai mari decît cei obținuți pe alte căi. În sfîrșit la o serie de grinzi (A_1, A_2, P_1^1), toate valorile obținute pentru încovoiere sînt foarte strînse. În general, în afara elementului B_1, toate celelalte rezultate sînt normale. O mențiune specială trebuie făcută pentru elementul B_2, la care săgeata mare inițială duce la niște caracteristice ale curgerii lente ceva mai mici, îndepărtînd astfel valorile obținute de cele așteptate.

Ținînd însă seama că toate măsurătorile se fac asupra grinzilor, toate calculele din continuare se fac considerînd ca valoare a lui E_0 cea obținută din săgețile reale măsurate pentru capătul consolei.

O altă considerație care trebuie avută în vedere este comparația săgeților de calcul cu cele măsurate în diferitele puncte ale grinzilor. Pentru a elimina atît influența momentului de inerție, cît și a modulului de elasticitate, toate săgețile s-au referit la săgeata capătului consolei, care a fost considerată ca unitate. În tabloul nr. 4 se arată această comparație, schema pentru identificarea secțiunilor fiind în figura 2.

Din analizarea datelor din tabloul nr. 4 rezultă că axa deformată a grinzii, în momentul încărcării, corespunde bine cu cea obținută prin calcul, ceea ce duce la concluzia unui modul de elasticitate constant în lungul grinzii. În plus, deformațiile de curgere lentă cresc proporțional pe tot lungul grinzii, ceea ce înseamnă — ținînd seama că diagrama momentelor încovoietoare din lungul grinzii nu se

Tabloul nr. 4

Comparația săgeților calculate cu cele măsurate

	Zile	*A*		*B*		*C*		*D*	
		1 000		0,482		0,113		0,150	
		Y_A/Y_A	săgeți	Y_B/Y_A	săgeți	Y_C/Y_A	săgeți	Y_D/Y_A	săgeți
B_1	0	1 000	121,20	0,477	57,70	0,106	12,84	0,140	16,93
	30	1 000	329,53	0,477	157,03	0,106	34,84	0,145	45,76
	60	1 000	413,20	0,469	193,13	0,104	42,77	0,137	56,29
	120	1 000	493,20	0,465	229,37	0,106	52,34	0,135	66,43
B_2	0	1 000	200,90	0,499	99,90	0,108	21,56	0,144	28,85
	30	1 000	414,74	0,491	203,23	0,109	45,23	0,145	60,02
	60	1 000	515,00	0,491	252,26	0,103	52,84	0,138	70,72
	120	1 000	579,73	0,467	270,37	0,103	59,34	0,136	78,43
A_1	0	1 000	128,60	0,468	60,10	0,113	14,56	0,146	18,70
	30	1 000	268,93	0,467	125,43	0,109	29,40	0,152	40,70
	60	1 000	359,32	0,462	165,88	0,112	40,45	0,149	53,48
	120	1 000	430,77	0,465	200,60	0,108	46,56	0,151	65,03
A_2	0	1 000	152,40	0,485	74,00	0,116	17,72	0,155	23,57
	30	1 000	379,07	0,479	181,83	0,120	45,72	0,157	59,57
	60	1 000	473,51	0,476	225,25	0,120	56,75	0,155	73,43
	120	1 000	554,40	0,484	268,00	0,117	64,72	0,153	84,57
P_1^1	0	1 000	127,30	0,479	60,90	0,114	14,52	0,151	19,15
	30	1 000	263,97	0,496	130,90	0,112	29,52	0,151	39,98
	60	1 000	306,80	0,494	151,10	0,117	35,95	0,152	46,79
	120	1 000	379,14	0,494	186,90	0,115	43,52	0,150	56,65
P_2^1	0	1 000	173,70	0,496	86,20	0,114	19,80	0,149	25,85
	30	1 000	359,95	0,489	175,95	0,115	41,55	0,147	52,85
	60	1 000	434,70	0,486	211,20	0,113	49,13	0,148	64,35
	120	1 000	519,70	0,481	249,70	0,114	59,30	0,157	81,86
P_1^2	0	1 000	93,50	0,500	46,82	0,124	11,58	0,154	14,42
	30	1 000	175,00	0,495	86,65	0,129	22,58	0,154	27,08
	60	1 000	201,07	0,483	97,08	0,130	26,15	0,162	32,56
	120	1 000	248,15	0,479	118,82	0,129	32,08	0,159	39,42
P_2^2	0	1 000	141,20	0,486	68,60	0,127	17,91	0,161	22,66
	30	1 000	258,95	0,489	126,97	0,133	34,41	0,166	43,16
	60	1 000	300,04	0,494	148,43	0,132	39,74	0,180	54,16
	120	1 000	350,20	0,491	171,60	0,130	45,41	0,167	58,66
P_1^3	0	1 000	82,80	0,477	39,53	0,124	10,29	0,158	13,03
	30	1 000	151,30	0,472	71,36	0,107	16,12	0,163	24,69
	60	1 000	165,94	0,474	78,06	0,127	21,00	0,169	28,03
	120	1 000	187,80	0,477	89,53	0,123	23,03	0,170	32,03
P_2^3	0	1 000	102,80	0,480	49,43	0,145	14,84	0,188	19,26
	30	1 000	192,92	0,478	92,30	0,150	28,96	0,195	37,51
	60	1 000	218,64	0,478	104,26	0,161	35,22	0,188	41,09
	120	1 000	233,30	0,468	109,93	0,154	35,84	0,192	44,76

modifică în timp —că există proporționalitate între solicitare și deformațiile de curgere lentă sau cu alte cuvinte că este valabilă legea lui Hooke la deformațiile de curgere lentă.

Pentru a vedea mai bine în ce măsură variază caracteristica curgerii lente obținute din compararea, în diferite secțiuni, a săgeților la un anumit timp cu

Tabloul nr. 5

Săgeți inițiale totale, necesare determinării caracteristicii curgerii lente (în sutimi de mm)

Grinda		B_1	B_2	A_1	A_2	P_1^1	P_2^1	P_1^2	P_2^2	P_1^3	P_2^3
Punctul *A*	din *P*	91,5	151,5	97,0	115,0	96,0	131,0	70,5	106,5	62,5	77,5
	din *g*	29,7	4,94	31,6	37,4	31,3	42,7	23,0	34,7	20,3	25,3
	total	121,2	200,9	128,6	152,4	127,3	173,7	93,5	141,2	82,8	102,8
Punctul *B*	din *P*	43,0	75,5	44,5	55,5	45,5	65,0	35,5	51,5	29,5	37,0
	din *g*	14,7	24,4	15,6	18,5	15,4	21,2	11,32	17,10	10,03	12,43
	total	57,7	99,9	60,1	74,0	60,9	86,2	46,8	68,6	39,5	49,4
Punctul *C*	din *P*	− 9,50	− 16,0	− 11,0	− 13,5	− 11,0	− 15,0	− 9,0	− 14,0	− 8,0	− 12,0
	din *g*	− 3,3	− 5,6	− 3,6	− 4,2	− 3,5	− 4,8	− 2,6	− 3,9	− 2,3	− 2,8
	total	− 12,8	− 21,6	− 14,6	− 17,7	− 14,5	− 19,8	− 11,6	− 17,9	− 10,3	− 14,8
Punctul *D*	din *P*	− 12,5	− 21,5	− 14,0	− 18,0	− 14,5	− 19,5	− 11,0	− 17,5	− 10,0	− 15,5
	din *g*	− 4,4	− 7,4	− 4,7	− 5,6	− 4,7	− 6,4	− 3,4	− 5.2	− 3,0	− 3,8
	total	− 16,9	− 28,9	− 18,7	− 23,6	− 19,2	− 25,9	− 14,4	− 22,7	− 13,0	− 19,3

Tabloul nr. 6

Variația caracteristicii curgerii lente în diferite secțiuni

Grinda	zile	B_1	B_2	A_1	A_2	P_1^1	P_1^2	P_2^1	P_2^2	P_3^1	P_3^2
Punctul *A*	30	1,71	1,07	1,09	1,48	1,07	1,07	0,87	0,83	0,84	0,87
	60	2,41	1,57	1,79	2,10	1,41	1,50	1,15	1,23	1,00	1,13
	120	3,06	1,89	2,35	2,64	1,97	1,99	1,66	1,48	1,27	1,27
Punctul *B*	30	1,73	1,04	1,09	1,45	1,15	1,04	1,85	0,85	0,81	0,87
	60	2,34	1,52	1,76	2,04	1,48	1,45	1,07	1,16	0,98	1,11
	120	2,98	1,70	2,33	2,63	2,07	1,90	1,53	1,50	1,26	1,23
Punctul *C*	30	1,71	1,10	1,02	1,58	1,03	1,10	0,95	0,92	0,57	0,95
	60	2,33	1,45	1,78	2,20	2,47	1,48	1,26	1,21	1,04	1,37
	120	3,07	1,75	2,20	2,67	2,00	1,99	1,77	1,53	1,24	1,41
Punctul *D*	30	1,40	1,08	1,18	1,53	1,09	1,05	0,88	0,90	0,89	0,95
	60	2,33	1,45	1,86	2,11	1,44	1,49	1,26	1,39	1,15	1,14
	120	2,91	1,71	2,48	2,58	1,95	2,17	1,73	1,58	1,45	1,33

cele inițiale, s-au calculat datele din tabloul nr. 6. Însă pentru că săgețile din curgere lentă se datoresc nu numai încărcării, dar și greutății permanente, în tabloul nr. 5 s-au determinat săgețile inițiale totale, adunînd la săgețile măsurate din încărcare, săgețile provocate de greutatea proprie, calculate în funcție de modulul de elasticitate obținut din compararea săgeților reale cu cele calculate.

În tabloul nr. 6, în săgeţile totale măsurate la timpul t s-au inclus şi cele calculate în momentul încărcării, provocate de sarcina permanentă. Cu alte cuvinte caracteristica curgerii lente, dată în tabloul nr. 6, a fost calculată cu relaţia

$$\varphi_t' = \frac{\text{săgeata măsurată la timpul } t + \text{ săgeata calculată din } g \text{ în momentul încărcării}}{\text{săgeata măsurată din } P + \text{ săgeata calculată din } g \text{ în momentul încărcării}} - 1.$$

Din analizarea datelor din tabloul nr. 6 rezultă foarte clar că se păstrează practic constantă caracteristica curgerii lente, la o aceeaşi durată de încărcare pentru toate secţiunile unei aceleiaşi grinzi. Se poate deci considera ca dovedită experimental valabilitatea legii lui Hooke aplicată la deformaţiile din curgere lentă.

Din cele arătate mai înainte, rezultă că se pot considera ca suficient de juste valorile obţinute pentru caracteristica curgerii lente şi date în tabloul nr. 2. Trebuie însă să se ţină seamă de faptul că aceste valori se referă la caracteristica împiedicată a curgerii lente, elementele fiind armate aşa cum s-a arătat, în tabloul nr. 1.

Întrucît însă ceea ce interesează este determinarea caracteristicii curgerii lente, pentru betonul simplu, căci caracteristica împiedicată este convenţională, trebuie calculată şi această valoare.

5. CONSIDERAŢII TEORETICE PENTRU DETERMINAREA MĂSURII, CURGERII LENTE A BETONULUI SIMPLU

Valorile obţinute pînă acum prin măsurători pentru deformaţiile de curgere lentă se refereau la elemente armate aşa cum s-a arătat în tabloul nr. 1. Pentru a obţine curgerea lentă a betonului simplu trebuie înlăturată influenţa armăturii. Cu alte cuvinte trebuie stabilită o relaţie între caracteristica curgerii lente a betonului simplu notată cu φ_t şi caracteristica împiedicată de armare a curgerii lente, notată cu φ_t'.

Ca ipoteză de bază, se acceptă faptul dovedit experimental, şi în cele precedente, că deformaţiile din curgere lentă ascultă de legea lui Hooke, ele fiind proporţionale cu solicitările.

De asemenea pentru a se putea efectua integrările necesare, ţinîndu-se seama şi de creşterea în timp a modulului de elasticitate al betonului simplu, se consideră că această creştere are loc conform relaţiei

$$E_t = E_0 \, (1+\delta \, \varphi_t),$$

în care E_t este modulul de elasticitate în momentul considerat, E_0 este valoarea aceluiaşi modul în momentul aplicării sarcinei, φ_t reprezintă caracteristica curgerii lente pînă la timpul t, iar δ este un coeficient numeric ce trebuie stabilit de la caz la caz prin încercări.

Relaţia de mai sus, care exprimă o creştere a modulului de elasticitate asemănătoare cu creşterea în timp a curgerii lente, îşi găseşte deplină verificare experimentală în literatură.

În cazul grinzilor experimentale armarea era simetrică $A_f = A_f'$. Dacă se consideră că asupra unui element de lungime unitară $ds = 1$ lucrează un moment încovoietor M, acesta se poate descompune în componenta M_b preluată de beton şi componenta M_a preluată de armătură, la timpul t de la solicitarea elementului, rămînînd în permanenţă valabilă relaţia

$$M = M_b + M_a = \text{constant}. \qquad (1)$$

Sub acțiunea momentului M, în momentul aplicării solicitării, elementul unitar s-a rotit cu unghiul γ. În timpul t, acest unghi crește, ca urmare a dezvoltării deformațiilor de curgere lentă, cu valoarea γ'.

În intervalul de timp dt, ținînd seama de efectul curgerii lente, valoarea unghiului de rotire se mărește cu următoarele cantități:

$\frac{M_b}{E_0 I_b} d\varphi_t$, rotire suplimentară provocată de curgerea lentă $d\varphi_t$ în intervalul de timp dt;

$\frac{dM_b}{E_0 (1+\delta\varphi_t) I_b}$, rotire suplimentară elastică, provocată de creșterea dM_b a momentului preluat de beton, M_b, în intervalul de timp dt, considerînd modulul de elasticitate sporit de la timpul t.

Se consideră existentă condiția de monolit; deci înainte de apariția fisurilor, sau eventual și după apariția lor, se consideră că în timpul curgerii nu au loc lunecări suplimentare între armătură și beton. Rotirea suplimentară a elementului de beton trebuie deci egalată cu rotirea suplimentară a armăturii, cauzată de variația momentului preluat de ea, $d M_a$.

Această egalitate se scrie

$$\frac{dM_a}{nE_0 I_a} = \frac{M_b\, d\varphi_t}{E_0 I_b} + \frac{dM_b}{E_0 (1+\delta\varphi_t) I_b}, \tag{2}$$

în care n este coeficientul de echivalență din momentul încărcării elementului

$$n = \frac{E_a}{E_0}.$$

Dacă se diferențiază relația (1) se obține

$$dM_a = -dM_b, \tag{3}$$

ceea ce înseamnă că datorită curgerii lente, armătura se încarcă cu un moment suplimentar, egal cu acela pe care îl cedează betonul.

Substituind relația (3) în relația (2) se obține, după efectuarea tuturor calculelor, următoarea ecuație diferențială

$$\frac{-dM_b}{\frac{M_b}{I_b}} = \frac{d\varphi_t}{\frac{1}{nI_a} + \frac{1}{(1+\delta\varphi_t) I_b}},$$

care integrată dă

$$M_b = M_{b0}\, e^{-\frac{nI_a}{\delta I_b}\left[\delta\varphi_t - \frac{nI_a}{I_b}\ln\left(1+\frac{\delta\varphi_t}{1+n\frac{I_a}{I_b}}\right)\right]}, \tag{4}$$

în care M_{b0} este momentul pe care îl preia betonul în momentul încărcării, atunci cînd curgerea lentă nu a început încă să se producă.

Scăderea momentului preluat de beton de la începutul aplicării sarcinii și pînă în momentul t, este, așa cum s-a mai arătat, egală cu creșterea de moment preluat de armătură. Valoarea acestei creșteri este

$$\Delta M_a = M_{0b} - M_b = M_{0b}\left\{1 - e^{-\frac{nI_a}{\delta I_b}\left[\delta\varphi_t - \frac{nI_a}{I_b}\ln\left(1+\frac{\delta\varphi_t}{1+n\frac{I_a}{I_b}}\right)\right]}\right\}. \tag{5}$$

Sub acţiunea acestui spor de moment unghiul iniţial de rotire, γ, al elementului unitar, a crescut cu cantitatea γ'

$$\gamma' = \frac{\Delta M_a}{nE_0 I_a} = \frac{M_{0b}}{nE_0 I_a}\left\{1 - e^{-\frac{nI_a}{\delta I_b}\left[\delta\varphi_t - \frac{nI_a}{I_b}\ln\left(1 + \frac{\delta\varphi_t}{1+n\frac{I_a}{I_b}}\right)\right]}\right\}. \tag{6}$$

În momentul aplicării solicitărilor asupra elementului de lungime unitară relaţia (1) se poate scrie sub forma

$$M = M_{0a} + M_{0b}\,. \tag{1'}$$

Ţinîndu-se seama că expresia unghiului de rotire iniţial se poate scrie considerînd valabilă condiţia de monolit:

$$\gamma = \frac{M_{0b}}{E_0 I_b} = \frac{M_{0a}}{nE_0 I_a}\,, \tag{7}$$

se poate obţine în continuare

$$M = M_{0b} + M_{0b}\frac{nI_a}{I_b} = M_{0b}\left(1 + \frac{nI_a}{I_b}\right) = M_{0b}\,\frac{I_b + nI_a}{I_b}\,,$$

de unde

$$M_{0b} = \frac{MI_b}{I_b + nI_a} \text{ şi } \gamma = \frac{M}{E_0(I_b + nI_a)}\,. \tag{8}$$

Înlocuind expresia lui M_{0b} din (8) în (6) se obţine

$$\gamma' = \frac{MI_b}{I_b + nI_a} + \frac{1}{nE_0 I_a}\left\{1 - e^{-\frac{nI_a}{\delta I_b}\left[\delta\varphi_t - \frac{nI_a}{I_b}\ln\left(1 + \frac{\delta\varphi_t}{1+n\frac{I_a}{I_b}}\right)\right]}\right\} \tag{9}$$

sau în continuare

$$\gamma' = \frac{M\varphi_t'}{E_0(I_b + nI_a)} = \gamma\varphi_t'\,, \tag{10}$$

în care

$$\varphi_t' = \frac{I_b}{nI_a}\left\{1 - e^{-\frac{nI_a}{\delta I_b}\left[\delta\varphi_t - \frac{nI_a}{I_b}\ln\left(1 + \frac{\delta\varphi_t}{1+n\frac{I_a}{I_b}}\right)\right]}\right\} \tag{11}$$

reprezintă mărimea împiedicată a curgerii lente prin existenţa armăturilor.

Relaţia (11) reprezintă legătura căutată între φ_t şi φ_t'. Ţinînd seama însă că în cazul considerat trebuie determinat φ_t în funcţie de valoarea φ_t' obţinută prin măsurători, rezolvarea se face numai prin aproximări succesive. Este bine ca prima înlocuire să se facă plecînd de la considerarea constantei modulului de elasticitate în timp, considerînd adică $\delta = 0$. În acest caz relaţia (11) devine

$$\varphi_t' = \frac{I_b}{nI_a}\left(1 - e^{-\frac{nI_a}{I_b + nI_a}\varphi_t}\right), \tag{11'}$$

prima determinare a lui φ_t putîndu-se face mult mai uşor.

6. DETERMINAREA CARACTERISTICII DE CURGERE LENTĂ PENTRU BETONUL SIMPLU

Pentru aplicarea relației (11), în cazul diferitelor grinzi încercate, sînt necesare cîteva determinări și aprecieri cantitative.

Valorile $n = \frac{E_a}{E_0}$ se calculează cu ajutorul tabloului nr. 3. În ceea ce privește valoarea δ, aceasta se poate calcula din expresia

$$\delta = \frac{\frac{E_t}{E_0} - 1}{\varphi}.$$

Pentru aceasta trebuie determinată valoarea $\frac{E_t}{E_0}$. Din tabloul nr. 1 se vede că valorile obținute prin măsurătoarea directă pentru E_{90} nu sînt concludente. Din această cauză se va calcula raportul $\frac{E_t}{E_0}$ plecînd de la relația care dă modulul de elasticitate al betonului în funcție de rezistența de rupere a cuburilor:

$$E_t = \frac{1\,000\,000}{1{,}7 + \frac{360}{R_c}}.$$

Raportul căutat este

$$\frac{E_t}{E_{28}} = \frac{1{,}7\,R_{c\,28} + 360}{1{,}7\,R_c + 360} \times \frac{R_c}{R_{c\,28}}.$$

În tabloul nr. 7 sînt date aceste valori.

Tabloul nr. 7

Rapoartele $\frac{E_t}{E_{28}}$ la betoanele folosite

Beton	B_1	B_2	A_1	A_2	P_1	P_2
$\frac{E_{90}}{E_{28}}$	1,51	1,47	1,10	1,22	1,05	1,03
$\frac{E_{180}}{E_{28}}$	1,57	1,50	1,10	1,32	1,12	1,03

În calculul valorii δ intră și φ_t, care trebuie determinată. Din această cauză calculul trebuie făcut prin aproximări succesive, prima valoare a lui φ_t fiind determinată de relația (11′) ca fiind mai ușor de aplicat.

În urma efectuării calculelor pentru betoanele P la care s-a variat procentul de armare, s-au obținut valorile din tabloul nr. 8.

Din analizarea datelor din tabloul nr. 8 (ca şi de altfel din analizarea diagramelor) rezultă foarte clar împiedicarea curgerii lente de către armătură, precum şi faptul că valoarea curgerii lente obţinută pentru betonul nearmat este aproape aceeaşi (3,22 ... 3,61). Valoarea ceva mai mică obţinută pentru P_1^2 poate fi

Tabloul nr. 8

Caracteristica curgerii lente a betoanelor armate şi nearmate

Betonul	P_1^1	P_1^2	P_1^3
La 60 de zile φ'_t	1,41	1,15	1,00
φ_t	3,22	2,60	3,61
La 120 de zile φ'_t	1,97	1,66	1,27
φ_t	6,96	5,62	—

explicată printr-o calitate ceva mai bună a betonului, care a putut fi mai bine compactat, avînd de pătruns numai printre două bare şi nu prin trei.

Folosind abaca lui Uliţki, în cazul considerat, se ajunge la concluzia unei valori φ_t maximale = 4,50 ceea ce face ca valorile determinate să poată fi considerate ca acceptabile.

Verificarea experimentală a consideraţiilor teoretice făcute mai înainte asupra relaţiei dintre φ_t şi φ'_t este, după cunoştinţele noastre, prima în acest gen.

7. VERIFICAREA CALITATIVĂ A IPOTEZEI EMISE ASUPRA CURGERII LENTE

Aşa cum s-a mai arătat s-a căutat prin cîteva experimentări foarte puţin fine să se cerceteze în ce măsură apar şi se deschid în timp fisurile la elemente din beton simplu. Pentru aceasta s-au executat cîte două elemente asemenea de beton simplu din aceeaşi calitate, avînd aceleaşi caracteristici — mai puţin armătura —

Tabloul nr. 9

Comparaţia eforturilor de întindere din încovoiere

Grinda	B_1	B_2	A_1	A_2	P_1	P_2
$R_{ti} = 1{,}7\ R_t$	24,70	23,30	40,70	31,60	46,00	35,00
$\frac{R_{tef}}{R_{ti}}$	0,525	0,556	0,320	0,411	0,282	0,371

decît celelalte elemente încercate. Una dintre grinzi a fost încărcată, iar cealaltă a servit ca martor.

Eforturile unitare maxime în dreptul reazemelor au fost de $\pm$ 13 kg/cm^2, valorile R_{ti} ale grinzilor fiind date în tabloul nr. 9.

După cum se vede din tablou, solicitările maxime nu depășeau 55 % din rezistența de rupere.

La circa 40 de zile de la încărcare au apărut în grinzile B fisuri vizibile cu ochiul liber, și în grinzile A fisuri vizibile la microscop. Cum contracția nu putea interveni, grinzile avînd un reazem fix și unul mobil, este clar că fisurile au apărut în urma încărcării. Grinzile P nu au fisurat, lucru ce poate fi ușor explicat prin raportul mic dintre efortul unitar efectiv de întindere din încovoiere și R_{ti}.

Încercările la încovoiere ale grinzilor rupte la 60 de zile de la încărcare au dat rezultatele din tabloul nr. 10, elementele încercate avînd 50 cm între reazeme și solicitate fiind de o sarcină centrală.

Tabloul nr. 10

Valorile R_{ti} obținute la încercări

Grinda încovoiată	B_1		B_2		A_1		A_2		P_1		P_2	
	solicitată	martor	solicitată	martor	solicitată	martor	solicitată	martor	solicitată	martor	solicitată	martor
Rezultate R_t parțiale	18,00	15,25	15,22	15,22	29,28	24,19	14,11	14,65	27,6	25,3	23,9	22,8
	18,30	17,70	14,10	20,30	23,06	25.35	10,80	26,99	27,6	27,1	23,9	23,6
	19,55	20,30	15,22	15,30	29,90	24,78	25,22	20,23	29,9	20,9	24,2	22,2
	19,15	—	15,60	—	—	27,00	15,45	—	27,6	17,5	25,9	21,8
	—	—	14,50	—	—	—	20,80	—	26,5	24,8	26,8	24,10
							—	—	25,4	—	—	17,5
Media rezultatelor	18,65	17,75	14,91	16,90	27,41	25,34	17,34	20,62	27,40	23,20	24,9	22,00

Analizarea datelor din tablou arată clar că nu e posibil să se tragă deocamdată o concluzie cantitativă. Explicația valorilor R_t mai mici ale unor probe ce au servit ca martore este probabil faptul că fiind depozitate pe sol, au avut un regim de păstrare mai umed decît cele încărcate, care probabil s-au întărit în condiții mai bune. În orice caz aspectul feței rupte arăta clar o umezeală interioară la elementele martor.

Este necesar ca experiențele să fie reluate și cu o tehnologie perfecționată.

8. CONCLUZII ASUPRA STUDIULUI EFECTUAT

Din analizarea celor expuse pînă acum se pot trage o serie de concluzii. Astfel:

1) În ceea ce privește tehnologia încercărilor ea s-a dovedit acceptabilă, precizia măsurătorilor fiind suficientă. Ar trebui îmbunătățită măsurătoarea săgeților instantanee, iar elementele experimentale să fie mai elastice.

2) În ceea ce privește rezultatele obținute ele sînt în general cele scontate. S-a pus în evidență importanța considerabilă a compoziției mineralogice a cimenturilor, a factorului apă/ciment și a procentului de armare asupra deformațiilor de curgere lentă.

3) S-a pus în evidență foarte clar proporționalitatea dintre solicitări și deformațiile de curgere lentă, confirmîndu-se odată în plus acest principiu.

4) S-a verificat experimental—pentru prima oară după cunoștințele noastre—relația stabilită teoretic între caracteristica curgerii lente a betonului împiedicată de armătură și aceea a betonului simplu.

Studiul va continua. Următoarea serie de elemente va fi încărcată la 14 zile de la turnare pentru a pune în evidență și influența vîrstei de încărcare. În plus, se vor face noi încercări cu grinzi de beton simplu pentru a căuta să verifice mai bine apariția și dezvoltarea în timp a microfisurilor.

ВЛИЯНИЕ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА ЦЕМЕНТА НА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЕТОНА И ЖЕЛЕЗОБЕТОНА (МЕДЛЕННАЯ ТЕКУЧЕСТЬ)

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Настоящая работа является частью целого ряда исследований физико-механических свойств простого бетона и железобетона, в зависимости от минералогического состава применяемого цемента.

В целях установления влияния минералогического состава на явление медленной текучести был использован цемент A, с преобладанием трикальциевого кремния, цемент B, с преобладанием двукальциевого кремния и цемент P (нормальный портланд).

Явление медленной текучести было изучено на бетонных и железобетонных, работающих на изгиб, элементах, выполненных в виде балок, свободно лежащих на опорах и имеющих вертикальную нагрузку.

Помимо определения влияния минералогического состава цемента, были произведены опыты по определению влияния соотношения вода/цемент, а также процента арматур в бетоне.

Загрузка элементов была произведена на 28-й день после отливки бетона, причем измерение стрелы прогиба производилось периодически в 7 местах в каждом элементе.

Разработка результатов опыта выявила следующее.

Деформации медленной текучести возрастают с увеличением отношения вода/цемент.

Деформации медленной текучести более значительны в цементе B. Деформации медленной текучести менее значительны в цементе A и совсем незначительны в цементе P.

Процент арматур в бетоне влияет в большей степени на деформацию медленной текучести, уменьшаясь при ее увеличении.

Деформации медленной текучести пропорциональны нагрузкам.

Теоретически установленное соотношение между характеристикой медленной текучести бетона, затрудненной арматурой, и простого бетона, подтверждается вышеизложенным.

Исследования продолжаются для более ясного установления влияния процента арматур в бетоне, а также появления и развития с течением времени микротрещин.

INFLUENCE DE LA COMPOSITION MINÉRALOGIQUE DU CIMENT SUR LES PROPRIÉTÉS PHYSICO-MÉCANIQUES DU BÉTON ET DU BÉTON ARMÉ. FLUAGE

(RÉSUMÉ)

L'étude fait partie d'un ensemble de recherches sur les propriétés physico-mécaniques du béton et du béton armé, en fonction de la composition minéralogique des ciments utilisés.

Dans le but de mettre en évidence l'influence de la composition minéralogique sur le phénomène de fluage, on a utilisé du ciment A, où prédomine le silicate

tricalcique, du ciment *B*, où prédomine le silicate bicalcique et le ciment *P* (Portland normal).

Le phénomène de fluage a été étudié sur des éléments en béton et en béton armé fléchi, exécutés comme des poutres à appuis simples, à consoles ayant des charges verticales.

En dehors de l'influence de la composition minéralogique, on a cherché à mettre en évidence l'influence du facteur eau-ciment ainsi que celle du pourcentage de l'armature.

Les charges ont été appliquées au bout de 28 jours et la mesure des flèches a été faite périodiquement, en 7 points pour chaque élément.

L'examen des résultats des expériences a permis les constatations suivantes:

Les déformations de fluage augmentent avec le rapport eau/ciment.

Les déformations de fluage sont plus importantes pour le ciment *B*, plus petites pour le ciment *A* et encore moindres pour le ciment *P*.

Le pourcentage de l'armature influence beaucoup les déformations de fluage: elles diminuent lorsque le pourcentage augmente.

Les déformations de fluage sont proportionnelles aux sollicitations.

La relation établie théoriquement entre la caractéristique de fluage du béton, auquel s'oppose l'armature, et celle du béton non armé est pleinement vérifiée dans ce travail.

L'étude sera continuée dans le but de mettre plus clairement en évidence l'influence du pourcentage des armatures ainsi que l'apparition et le développement des microfissures pendant la durée de l'examen de ces phénomènes.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3–4, 1955

TEHNOLOGIA PRELUCRĂRII MATERIALELOR

CERCETĂRI ASUPRA PUTERII ABSORBITE LA TĂIEREA LEMNULUI PRIN AŞCHIERE, ÎN FUNCŢIE DE TEMPERATURA ŞI UMIDITATEA SA

DE

GH. I. PANĂ

INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat influenţa temperaturii şi greutăţii specifice aparente a lemnului asupra puterii pe care o absoarbe la tăierea prin aşchiere cu ajutorul cuţitelor.

Cercetările de faţă trec de la experimentările de laborator, la experimentări în condiţiile din industrie şi studiază procesul tăierii la fierăstrăul circular şi la maşina de frezat obişnuită.

Rezistenţa lemnului la tăiere, respectiv puterea absorbită, are variaţii caracteristice pentru cele trei feluri de unelte principale de aşchiere: ferăstraie circulare, cuţite şi freze.

Se cunosc [2], [3], [4], [5], [6] variaţiile puterii absorbite la tăierea lemnului, în raport cu caracteristicile principale ale speciei lemnoase (umiditatea, greutatea specifică, defectele de structură ale lemnului etc.), ale uneltelor tăietoare (compoziţia chimică şi structura oţelului, unghiurile şi microgeometria vîrfului sau tăişului etc.), regimul de lucru (unghiul de atac, viteza de tăiere, viteza de avans a piesei, grosimea aşchiei etc.).

Un factor important, cu variaţii mari şi deosebit de frecvente, care intervine la tăierea lemnului, este temperatura.

Influenţa acestui factor asupra rezistenţei la tăiere a lemnului nu a fost cercetată şi literatura nu indică lucrări în această direcţie.

Scopul cercetărilor noastre este determinarea influenţei temperaturii lemnului cu diferite umidităţi asupra puterii absorbite la tăierea sa cu pînze de ferăstraie şi cu freze.

Determinarea puterii absorbite prezintă, în afară de interesul ştiinţific, o latură practică de o deosebită importanţă pentru industria de prelucrare mecanică şi manuală a lemnului, prin măsurile imediate ce se pot lua pe această bază în fabrici şi exploatări forestiere cu privire la caracteristicile lemnului (umiditate, temperatură) şi condiţiile sale de prelucrare.

I. METODA DE LUCRU

1. *Mașinile și uneltele tăietoare.* Mașinile și uneltele tăietoare utilizate la experimentări au avut caracteristicile următoare:

a) Fierăstrăul circular de dimensiuni reduse, acționat de un electromotor prin curea de transmisie directă; caracteristicile motorului: 220/380 V, 50 Hz, cos $\varphi = 0{,}87$, 2 850 rot/min, 1,5 kW; turația pînzei 3 800 rot/min.

Pînza de fierăstrău utilizată a avut diametrul egal cu 146 mm, cu ascuțire dreaptă și cu următoarele unghiuri ale dinților: unghiul de atac $\alpha = 1°$, unghiul vîrfului $\beta = 55°$, unghiul spatelui $\gamma = 34°$ și unghiul de tăiere $\delta = 89°$. Viteza de tăiere 29 m/s.

b) Mașina de frezat obișnuită, cu ax vertical, a fost acționată prin curea de transmisie directă, de un electromotor identic cu cel folosit pentru ferăstrăul circular, cu o turație de 5 700 rot/min.

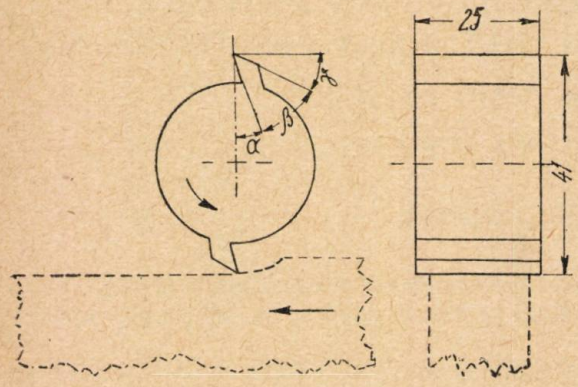


Fig. 1. — Freza utilizată la încercări și caracteristicile sale.

Freza utilizată (fig. 1) a avut caracteristicile următoare: diametrul 41 mm, înălțimea 25 mm, unghiul de atac $\alpha = 15°$, unghiul de ascuțire $\beta = 40°$, unghiul spatelui $\gamma = 35°$ și unghiul de tăiere $\delta = 75°$. Viteza de tăiere 12,2 m/s.

2. *Materialul lemnos.* Lemnul asupra căruia s-au făcut încercările de tăiere a fost din speciile: molid (*Picea excelsa* L.), plop (*Populus alba* L.), fag (*Fagus silvatica* L.) și stejar (*Quercus robur* L.).

Piesele au avut dimensiunile de 600 mm lungime, 150...200 mm lățime și 20 mm grosime. Ele au fost alese din lemn cu greutate specifică aparentă medie pentru fiecare specie.

Probele pentru tăiere la fiecare mașină au fost debitate alăturat din aceeași piesă de lemn, pentru a fi cît mai asemănătoare ca structură.

3. *Modul de efectuare a încercărilor.* Măsurarea puterii absorbite la tăierea lemnului s-a făcut cu ajutorul a două wattmetre.

La fiecare încercare s-a măsurat și puterea absorbită în gol de mașină, spre a se avea prin diferență puterea absorbită la tăierea lemnului și spre a se elimina erorile datorite variațiilor tensiunii curentului. Precizia determinărilor a fost de $\pm$ 2,5 wați. Tăierile s-au făcut la următoarele trepte de temperatură și umiditate a lemnului:

temperatură — 12°, 0°, + 7° și + 18 °C;
umiditate 0 %, 15 % și 70...100 %.

Diferitele trepte de temperatură ale lemnului au fost realizate prin menținerea pieselor, timp de 12 ore în aer liber (iarna) și în atelier, la temperaturile respective.

Tăierile au fost efectuate la locul de condiționare al epruvetelor, prin deplasarea mașinilor respective.

Pentru a se menține lemnul în stare anhidră ($u = 0$ %), piesele s-au păstrat în vase ermetic închise, cu o umiditate relativă a aerului de 5 %, obținută prin

prezența $CaCl_2$; piesele cu umiditate de 15 % au fost ținute în vase similare, fără $CaCl_2$, iar cele îmbibate cu apă ($u = 70 \ldots 100$ %) au fost ținute în cîrpe umede.

Pentru încercările la diferite trepte de temperatură s-au utilizat aceleași piese, spre a se păstra constante celelalte caracteristici ale lemnului.

Numărul pieselor încercate a fost de 24 (cîte două din fiecare specie, pentru fiecare treaptă de umiditate și mașină), iar numărul tăierilor a fost de 120 (cîte cinci încercări pentru fiecare treaptă de temperatură și umiditate).

În încercările efectuate, tăierea lemnului a fost paralelă cu direcția fibrelor, planul de tăiere avînd poziție radială.

II. REZULTATE

Rezultatele sînt prezentate în tabloul nr. 1 și în figurile 2, 3, 4 și 5.

Tabloul nr. 1

Specia lemnoasă	Greutatea specifică g/cm³	Temperatura (°C)												
		−12			0			+7			+18			
		Umiditatea (%)												
		0	15	70...100	0	15	70...100	0	15	70...100	0	15	70...100
Consumul de putere în wați, la tăierea lemnului prin așchiere cu freze														
Molid	0,46	101	88	108	90	103	111	102	109	110	85	115	100
Plop	0,53	124	130	147	118	149	160	118	130	160	112	150	145
Fag	0,63	81	119	135	95	126	156	100	100	140	108	110	130
Stejar	0,72	66	101	112	59	120	130	70	110	130	72	120	105
Consumul de putere în wați, la tăierea lemnului prin așchiere cu pînze de fierăstrău circular														
Molid	0,47	159	214	181	152	156	102	160	192	159	142	231	185
Plop	0,63	247	299	350	205	204	192	246	267		240	332	228
Fag	0,62	218	273	236	158	194	140	208	212	152	187	273	215
Stejar	0,74	228	216	263	214	155	108	230	190	199	220	222	206

Puterea absorbită la tăierea lemnului, atît cu pînzele de fierăstrău circular, cît și cu frezele, variază considerabil în funcție de temperatura și umiditatea lemnului și specia lemnoasă.

Sensul și mărimea acestor variații sînt însă diferite mult în raport cu factorii menționați, la tăierea cu pînze de ferăstrău, față de tăierea cu freze.

1. *Influența temperaturii.* Influența temperaturii lemnului asupra puterii absorbite se manifestă deosebit la tăierea cu pînze de ferăstrău și cu freze.

În medie, în intervalul de la — 12° C pînă la + 18° C, puterea absorbită are variații mult mai mari (100 %) la tăierea cu pînze de fierăstrău decît la aceea cu freze (30 %).

Variațiile înregistrate sînt de asemenea deosebite în raport cu gradul de umiditate al lemnului.

La tăierea cu pînze de fierăstrău se înregistrează la — 12 °C în raport cu + 18 °C (temperatură a lemnului) o creștere de circa 10 % și 24 % a puterii absorbite, respectiv pentru $u = 0$ și $u = 70 \ldots 100$ %, și o scădere de circa 5 %, pentru $u = 15$ %. Caracteristică este însă scăderea mare (30...45 %) a puterii absorbite pentru temperaturile apropiate de 0 °C în raport cu — 12 °C și + 18 °C, la lemnul cu umiditatea mai mare de 15 %.

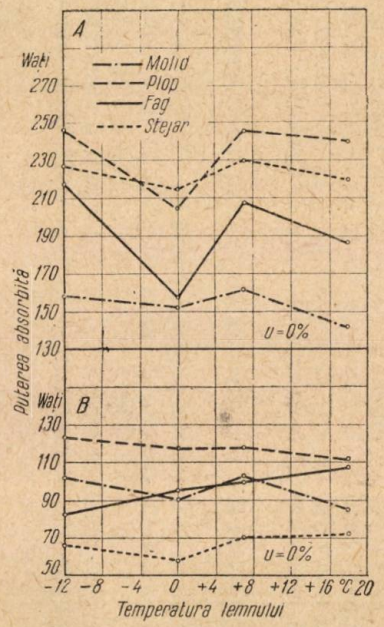


Fig. 2. — Variația puterii absorbite, la tăierea lemnului anhidru, cu pînze de fierăstrău circular (*A*) și freze (*B*) în funcție de temperatura sa.

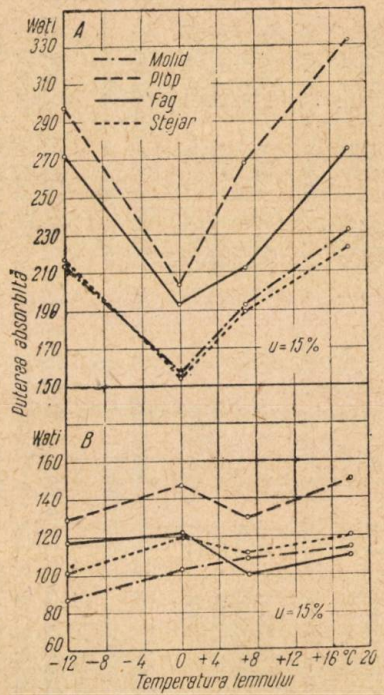


Fig. 3. — Variația puterii absorbite la tăierea lemnului cu umiditate de 15 %, cu pînze de fierăstrău circular (*A*) și freze (*B*), în funcție de temperatura sa.

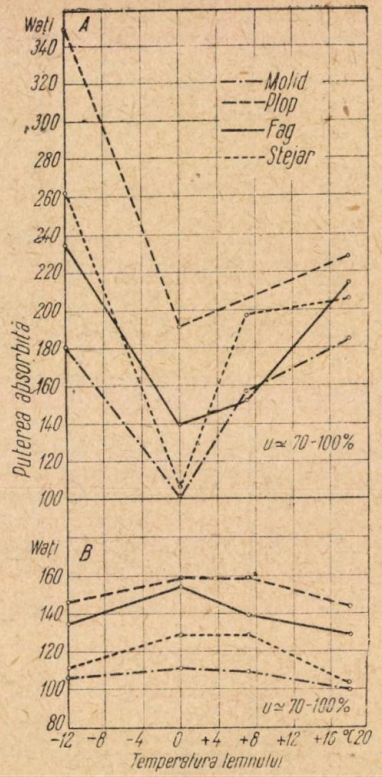


Fig. 4. — Variația puterii absorbite la tăierea lemnului cu umiditatea de 70—100 %, cu pînze de fierăstrău circular (*A*) și cu freze (*B*), în funcție de temperatura sa.

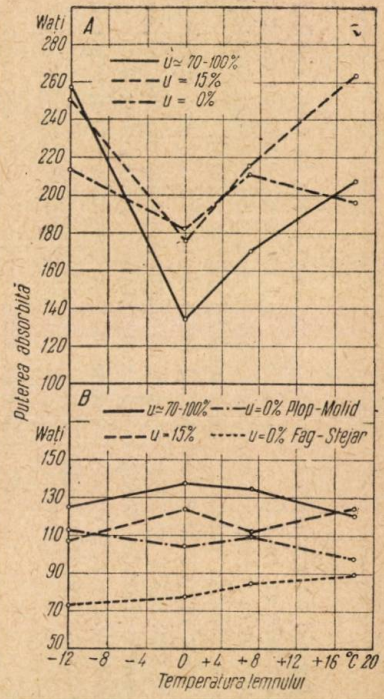


Fig. 5. — Variația puterii absorbite la tăierea lemnului (medie pentru lemnul de molid, plop, fag și stejar) cu diferite umidități, cu pînze de fierăstrău circular și cu freze, în funcție de temperatura sa.

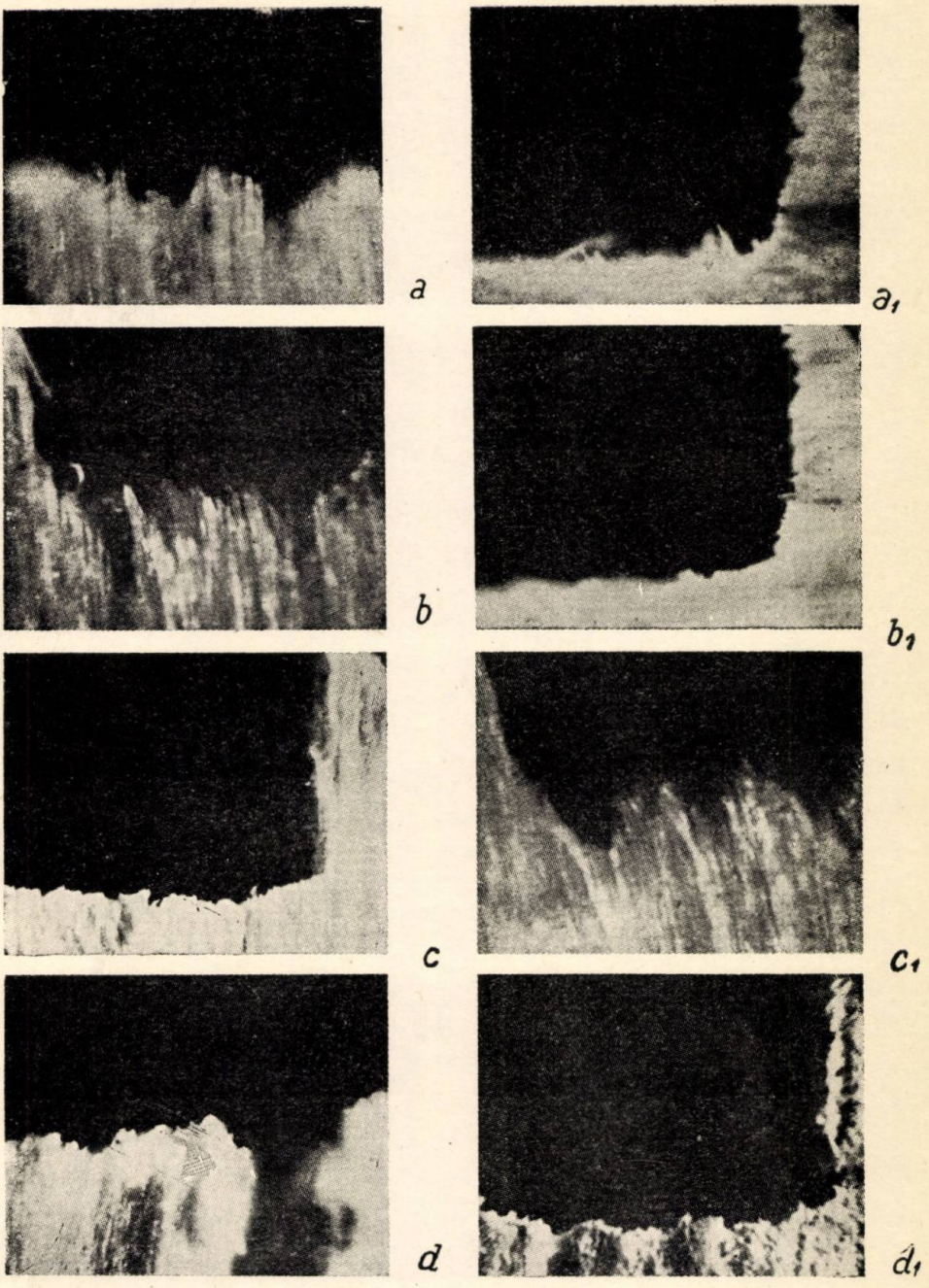
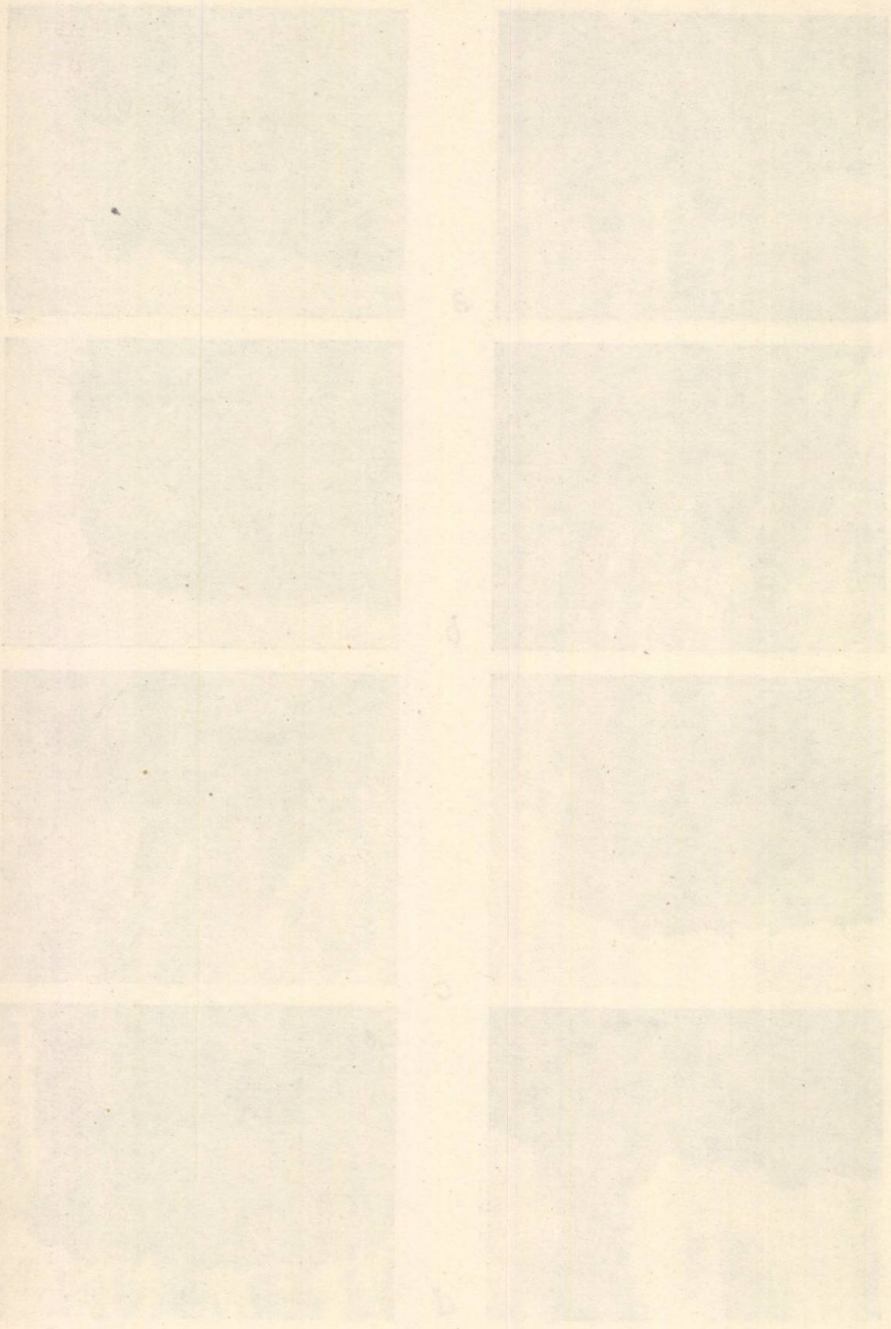


Fig. 6. — Aspectul microscopic al tăieturii executată în lemn cu pînze de fierăstrău circular, în direcție paralelă cu fibrele.

Lemn uscat ($u = 8 \ldots 10\%$): *a)* molid; *b)* plop (mărire × 125); *c)* fag (mărire × 25). *d)* stejar (mărire × 125); a_1) molid; b_1) plop; d_1) stejar (mărire × 25). Lemn umed ($u = 70 \ldots 100\%$): c_1) fag mărire × 125).



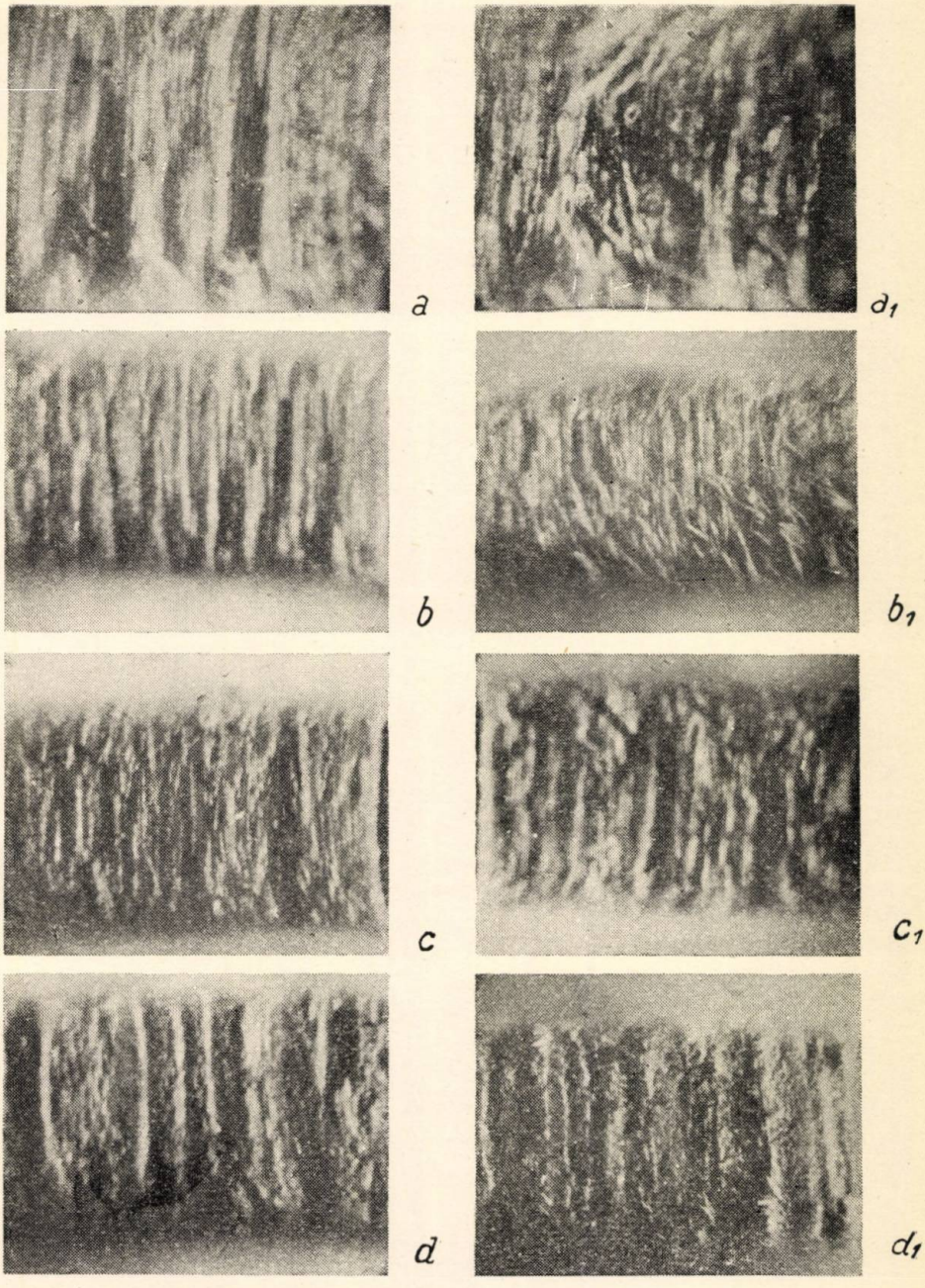


Fig. 7. — Aspectul microscopic al tăieturii executate în lemn cu pînze de fierăstrău circular, în direcție perpendiculară pe fibre.

Lemn uscat ($u = 8 \ldots 10\%$): *a)* molid (mărire × 20); *b)* plop; *c)* fag; *d)* stejar (mărire × 10).
Lemn umed ($u = 70 \ldots 100\%$): a_1) molid (mărire × 20); b_1) plop; c_1) fag; d_1) stejar (mărire × 10).

La tăierea cu freze se remarcă (la $-12\,^{\circ}C$ față de $+18\,^{\circ}C$) o creștere a puterii absorbite cu aproximativ 4 % și 10 % respectiv pentru lemnul cu umiditatea de 70...100 % și anhidru (molid și plop), și o scădere de circa 20 % la lemnul cu umiditatea de 15 % și anhidru (fag și stejar); pentru lemnul umed ($u=70...100$ %) se produce un maxim în apropiere de $0\,^{\circ}C$.

2. *Influența umidității lemnului.* Puterea absorbită la tăierea lemnului cu pînze de ferăstrău, pentru fiecare treaptă de umiditate între limitele de temperaturi din cadrul experimentărilor, este minimă pentru lemnul cu umiditatea de 70... 100 %, crescînd către starea anhidră și umiditatea de 15 %, cînd atinge un maxim. Diferențele înregistrate sînt de la 0...30 %, fiind maxime în zona temperaturilor pozitive.

La tăierea cu freze puterea absorbită este minimă pentru lemnul anhidru, medie pentru lemnul cu umiditatea de 15 % și maximă pentru lemnul verde. Creșterile față de lemnul anhidru sînt respectiv de aproximativ 25 % și 50 %. Diferențele sînt mai accentuate în jurul temperaturii de $0\,^{\circ}C$.

3. *Influența speciei lemnoase.* Atît la tăierea cu pînze de fierăstrău cît și cu freze, puterea absorbită la tăiere variază mult în raport cu structura materialului, deosebită după specia lemnoasă.

În raport cu temperatura lemnului, variația puterii absorbite, are același mers general la tăierea diverselor specii lemnoase, cu excepția lemnului anhidru, la care puterea absorbită scade pentru lemnul de fag și stejar și crește pentru lemnul de molid și plop, o dată cu scăderea temperaturii.

Se remarcă deci influența deosebită pe care o are umiditatea în raport cu specia lemnoasă asupra puterii absorbite la tăiere.

De exemplu, la tăierea cu freze, lemnul de stejar anhidru absoarbe cantitatea cea mai mică de putere dintre toate speciile cercetate, iar la $u=70...100$ % ocupă un loc mai ridicat ca lemnul molid, care opune cea mai mică rezistență la tăiere. La tăierea cu pînze de fierăstrău lemnul de fag cu $u=15$ % absoarbe cu circa 25 % mai multă putere la tăiere decît cel de stejar cu aceeași umiditate, iar lemnul cu $u=70...100$% absoarbe aproximativ aceeași putere; lemnul de stejar în stare anhidră are o rezistență la tăiere mai mare ca cel de fag (circa 10...15 %).

Lemnul de plop, cu orice umiditate, opune cea mai mare rezistență la tăiere, iar lemnul de molid (excepție la $u=0$ %) cea mai mică; fagul și stejarul ocupînd poziții intermediare.

Diferențele cele mai mari se înregistrează pentru lemnul cu $u=70...100$ % la tăierea cu pînze (≈ 140 wați pentru molid și 360 wați pentru plop) și pentru lemnul anhidru la tăierea cu freze (65 wați pentru stejar și 115 wați pentru plop).

★

Rezultatele obținute scot în evidență comportarea diferită a lemnului la tăiere în raport cu felul uneltelor tăietoare, temperatura, umiditatea și structura sa.

Variația acestor elemente se manifestă la rîndul său printr-o variație ca sens și mărime a rezistenței la tăiere.

Eforturile care se produc și corelația dintre ele este extrem de complexă.

Formulele teoretice pentru calcularea puterii absorbite la tăiere [5], [6] ținînd seama numai de o serie de eforturi statice ideale (rezistența la compresiune și forfecare) și făcînd abstracție de elasticitatea materialului și forța de frecare, nu pot conduce la rezultate juste. În acest caz valorile obținute pentru puterea absorbită sînt, de cele mai multe ori, mult diferite de cele reale.

La tăierea *) cu pînze de fierăstrău pentru calculul puterii absorbite se introduc în formule rezistența la compresiune perpendicular pe fibre și la forfecare transversală, ori în realitate se mai produc și eforturi de forfecare longitudinală perpendiculară, încovoiere, și mai ales eforturi de *tracțiune* paralelă și perpendiculară pe fibre.

La tăierea cu freze (cuțite în general) se ia în considerare rezistența la forfecare longitudinală paralelă și se omite rezistența la *tracțiune* perpendicular și paralel cu fibrele, despicare, încovoiere și forfecare transversală.

În realitate eforturile nu se produc așa cum se consideră teoretic. Forfecarea perfectă se produce rar la tăierea cu pînze de fierăstrău. Acest lucru îl demonstrează microfotografiile prezentate **) (fig. 6 și 7), în care se vede clar că dintele de fierăstrău nu foarfecă ci *smulge* fibrele ***) atît cu muchia vîrfului, cît și cu muchiile fețelor laterale, deci efortul principal este de *tracțiune* (tracțiune paralelă cu muchia vîrfului și perpendiculară cu muchia fețelor), iar nu de forfecare sau compresiune perpendiculară care se iau obișnuit în calcule.

Eforturile care se produc la tăiere sînt sub acțiunea sarcinilor dinamice iar nu statice și ele variază la fiecare poziție a uneltei tăietoare, și se transformă (de exemplu forfecarea longitudinală la tăierea cu frezele, care se transformă treptat către sfîrșitul tăierii în forfecare transversală etc.). De asemenea, rezistența la tăiere variază în mod diferit după caracteristicile lemnului (temperatură, umiditate, structură) în raport cu caracteristicile uneltei tăietoare (unghiurile dinților sau tăișului) și regimul de lucru (viteza de avans a piesei și viteza de tăiere a uneltei).

Formulele elaborate pentru calcularea puterii absorbite la tăierea lemnului iau în considerare rezistența acestuia pentru diferite trepte de umiditate și o treaptă de temperatură (fără a fi specificată, probabil 20 °C).

În cazul schimbării temperaturii lemnului, pentru diferite trepte de umiditate (fig. 5), puterea absorbită la tăiere prezintă variații deosebite în raport cu umiditatea, fapt care confirmă o schimbare a raportului de valori între elasticitate și rezistențe. Lemnul umed și cu temperaturi mai ridicate este mai elastic și fragil, iar cel uscat și la temperaturi scăzute, mai rigid și tenace. Variațiile puterii absorbite sînt explicate în plus și prin unele eforturi diferite sau secundare de frecare.

Lemnul umed și cu temperaturi mai ridicate fiind elastic are o suprafață mai mare de contact (din cauza deformațiilor locale mai mari) cu muchia uneltei tăietoare și deci se produc eforturi de frecare mai mari. Prin tăiere lemnul se defibrează (fig. 7), iar fibrele produc o frecare suplimentară în zona din imediata apropiere a muchiei tăietoare a uneltei, care se manifestă printr-o creștere a rezistenței la tăiere.

Lemnul diferitelor specii se comportă diferit la tăiere, în raport cu variațiile de temperatură și umiditate ale acestuia. Acest lucru iese în evidență din felul cum se produce ruperea fibrelor (fig. 6 și 7). Astfel la lemnul uscat ($u = 8 \ldots 10\ \%$) de stejar și fag, suprafața rezultată după tăierea longitudinală (paralel cu fibrele) prezintă smulgeri de fibre în formă de fascicule mici, avînd conturul aproximativ rectangular și triunghiular (fig. 6); la lemnul de molid fasciculele au lungimea

*) Ne referim numai la tăierea longitudinală, obișnuită a lemnului (în lungul fibrelor).

**) Microfotografiile sînt obținute prin tăierea longitudinală și transversală a lemnului la un fierăstrău circular obișnuit, cu următoarele caracteristici ale pînzei: $d = 400$ mm, grosimea 2 mm, ceaprazul 0,2 mm, unghiul de atac (α) 19°, unghiul vîrfului (β) 42°, unghiul spatelui (γ) 29°, viteza de tăiere 60 m/s.

***) Se înțelege sub denumirea de fibre, ansamblul elementelor anatomice ale lemnului (fibre, traheide, vase etc.).

mai mică și același contur; la lemnul de plop, predomină fasciculele cu contur triunghiular, apărînd și fibre izolate (fig. 6).

La lemnul umed fasciculele sînt mai mari (în special mai lungi), apar numeroase fibre izolate, și suprafața tăieturii lemnului speciilor omogene (plop) devine franjurată.

Aspectul suprafeței tăiate este diferit după direcția de tăiere. Dacă tăierea se face în direcție perpendiculară pe fibre, suprafețele laterale ale tăieturii prezintă fascicule mari, și numeroase de fibre (fig. 7), iar frontul tăieturii apare destul de net.

Fenomenul este invers (fig. 6) la tăierea în direcție paralelă cu fibrele. În acest caz fasciculele de fibre sînt mai mici, dacă tăierea se face în plan radial.

În explicarea fenomenelor menționate, este evidentă și influența structurii submicroscopice a pereților celulari (de exemplu ruperea după anumite direcții a acestora).

CONCLUZII

Din experimentările și observațiile făcute se evidențiază fenomenele complexe care intervin la tăierea lemnului.

Formulele de calcul stabilite pentru determinarea puterii absorbite la tăiere în care se introduc rezistențele (compresiune și forfecare) statice ale lemnului nu pot conduce decît la rezultate aproximative.

Pentru îmbunătățirea acestor metode de determinare a puterii absorbite, este necesar să se ia în considerare eforturile (rezistențele) complexe dinamice care intervin la tăiere, în raport cu caracteristicile lemnului și ale uneltelor tăietoare și cu regimul de lucru.

Cele mai bune metode pentru determinarea puterii absorbite la tăiere rămîn în prezent cele bazate pe stabilirea pe cale experimentală a unor coeficienți, pentru diversele cazuri care intervin în practică [1] [4], [7].

Cercetările întreprinse în lucrarea de față arată influența considerabilă pe care o are asupra puterii absorbite la tăierea lemnului, structura, temperatura și umiditatea sa, precum și felul uneltei tăietoare.

În funcție de caracteristicile lemnului, menționate, puterea absorbită la tăiere poate varia de la simplu la dublu și deci a ține cont de aceste caracteristici și a executa tăierea în condițiile cele mai favorabile înseamnă, pentru industria de prelucrare mecanică a lemnului, realizarea unor importante economii de energie termică sau electrică, sau o reducere a efortului fizic la prelucrarea manuală a lemnului.

Tăierea lemnului cu $u > 15\ \%$ cu unelte prevăzute cu dinți care așchiază trei planuri: (pînze de gater, pînze de fierăstrău circular, lanțuri tăietoare, joagăre, pînze obișnuite de fierăstrău și unele freze), ar trebui făcute în jurul a 0 °C. Spre $-15°$ C și $+20$ °C puterea necesară tăierii este mult mai mare, cu mențiunea că la temperaturile pozitive, puterea necesară este mai mică pentru lemnul verde ($u > 30\ \%$) decît pentru cel uscat la aer ($u = 12 \ldots 18\ \%$). Lemnul anhidru sau cu un conținut redus de apă, trebuie tăiat la temperaturi cît mai ridicate.

Tăierea lemnului cu unelte care așchiază numai un singur plan (cuțite de rindeluit și unele freze) ar trebui făcută la temperaturi pozitive pe cît posibil mai ridicate [1] sau spre $-10° \ldots -15$ °C și evitată în apropiere de 0° C; excepție face lemnul anhidru sau cu un conținut redus de apă pentru care puterea absorbită la tăiere scade de la -12 °C la $+18$ °C, pentru molid și plop și crește pentru fag și stejar.

În condiţiile identice de temperatură (pentru limitele cercetate), lemnul verde ($u > 30\ \%$) se taie mai uşor decît cel uscat la aer ($u = 12\ \% \ldots 18\ \%$) cu unelte din prima categorie şi se taie mai greu cu unelte din categoria a doua.

Pentru stabilirea corelaţiei existente între caracteristicile lemnului, ale uneltelor tăietoare, regimul de lucru şi puterea absorbită la tăierea lemnului, în vederea determinării unor coeficienţi, sînt necesare cercetări în continuare în condiţii medii identice cu cele din producţie. De asemenea, trebuie precizate şi amănuntele de variaţie ale puterii absorbite la tăiere în funcţie de temperatura lemnului, între $-20\,^{\circ}C$ şi $+30\,^{\circ}C$, frecventă în practică.

Prelucrarea lemnului în condiţii care să asigure o însemnată economie de energie, este perfect posibilă în multe cazuri, numai prin simple măsuri organizatorice şi anume: la exploatările de pădure şi în fabricile de cherestea, tăierea lemnului verde să fie făcută la temperaturi mai scăzute, iar în secţiile fabricilor de produse finite (mobilă, butoaie etc.) în care predomină rindeluirea şi frezarea lemnului, să se facă prelucrarea acestuia în stare cît mai uscată şi la temperaturi în jurul a $20\,^{\circ}C$. Aceste condiţii corespund sau pot corespunde şi procesului tehnologic de exploatare, şi condiţiilor tehnice de fabricaţie.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩАЕМОЙ МОЩНОСТИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ДЕРЕВА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕГО ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследованиями, проведенными опытным путем, установлены закономерности изменения поглощаемой мощности при распилке дерева ленточными пилами и фрезами в зависимости от его температуры, влажности и строения.

Эти исследования в то же время выявили сложные явления, возникающие при распилке, и установлено, что применяемый метод, основанный на определениях, полученных опытным путем, приводит к более точным результатам, нежели расчетные формулы, выведенные для поглощаемой мощности, в которые вводятся статические сопротивления (на сжатие и срез) древесины.

Мощность, поглощаемая при резке дерева, изменяется в очень широких пределах — в некоторых случаях удваивается — в зависимости от изменения упомянутых характеристик. Вследствие этого, является возможным осуществить значительную экономию тепловой или электрической энергии и снижение физического усилия, если во время обработки, дерево имеет определенные температуру и влажность.

Таким образом, резка дерева, при влажности $u > 15\%$, инструментом, обрабатывающим его в трех плоскостях (ленточные пилы, цепные пилы и некоторые фрезы), должна вестись при температурах около 0°. При температурах же, приближающихся к $-15°$ и $+20°$, поглощаемая мощность на много больше; древесина сухая или с небольшим содержанием влаги, должна обрабатываться при возможно более высоких температурах.

Резка дерева инструментом, обрабатывающим его только в одной плоскости (строгальными резцами и некоторыми фрезами), должна вестись при возможно более высоких положительных температурах

или при $-10 \div -15°$; обработка при температурах около 0°, должна избегаться.

В одинаковых температурных условиях сырая древесина ($u > 30\%$) обрабатывается легче инструментом первой категории и труднее инструментом второй категории, чем древесина, высушенная на воздухе $u = 12 \div 18\%$.

Вообще эти условия обработки дерева практически могут быть осуществляемы исключительно организационными мероприятиями.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Фреза, служащая для испытаний и ее характеристики.

Рис. 2. — Изменение поглощаемой мощности при распиловке обезвоженной древесины дисковыми пилами (A) и фрезами (B), в зависимости от температуры древесины.

Рис. 3. — Изменение поглощаемой мощности при распиловке древесины с 15% влажности дисковыми пилами (A) и фрезами (B) в зависимости от температуры древесины.

Рис. 4. — Изменение поглощаемой мощности при распиловке древесины 70—100% влажности дисковыми пилами (A) и фрезами (B) в зависимости от температуры древесины.

Рис. 5. — Изменение поглощаемой мощности при распиловке древесины (средняя для ели, тополя, бука), и дуба различной влажности, дисковыми пилами и фрезами, в зависимости от температуры древесины.

Рис. 6. — Вид пропила, под микроскопом, произведенного в дереве дисковыми пилами параллельно волокнам. Сухая древесина (влажность = 8... 10%); *а)* ель; *б)* тополь (× 125); *в)* бук (× 25); *г)* дуб (× 125); a_1) ель; $б_1$) тополь. Сырая древесина (влажность = 70... 100 %); $в_1$) бук (× 125); $Г_1$ дуб (×25).

Рис. 7. — Вид под микроскопом пропила, произведенного в древесине дисковыми пилами, перпендикулярно волокнам. Сухая древесина (влажность 8... 10 %); *а)* ель (× 20); *б)* тополь; *в)* бук; *г)* дуб (× 10). Сырая древесина (влажность = 70... 100 %); a_1) ель (× 20); $б_1$) тополь; $в_1$) бук; $е_1$) бук (× 10).

RECHERCHES SUR LA PUISSANCE ABSORBÉE À LA COUPE DU BOIS PAR DÉTACHEMENT EN COPEAUX, EN FONCTION DE SA TEMPÉRATURE ET DE SON HUMIDITÉ

(RÉSUMÉ)

Les recherches entreprises ont établi, par voie expérimentale, les lois de la variation de la puissance absorbée à la coupe du bois, avec des lames de scies circulaires et avec des fraises, en fonction des température, humidité et structure du bois.

En même temps, elles ont mis en évidence les phénomènes complexes qui interviennent lors de la coupe. On a constaté, de cette façon, que la méthode employée, s'étayant de déterminations expérimentales, conduit à des résultats plus exacts que les formules de calcul établies pour la puissance absorbée, formules où l'on introduit les résistances statiques du bois (compression et cisaillement).

La force absorbée lors de la coupe du bois varie entre de larges limites, allant parfois du simple au double, en raison des variations des caractéristiques mentionnées. Partant, on peut réaliser d'importantes économies d'énergie thermique ou électrique, ainsi qu'une réduction de l'effort physique, si le bois possède, à l'usinage, une température et une humidité déterminées.

C'est ainsi que la coupe du bois à u (humidité) $> 15\%$, au moyen d'outils qui découpent sur trois plans dans le bois (lames de scie, chaînes tranchantes

et certaines fraises), devrait s'effectuer à une température d'environ 0° C. Vers — 15° C et — 20° C la puissance nécessaire à la coupe est beaucoup plus grande: le bois anhydre ou à faible teneur en eau doit être coupé à des températures aussi élevées que possible.

La coupe du bois au moyen d'outils qui découpent sur un seul plan (fers à raboter et certaines fraises) devrait s'effectuer à des températures positives aussi élevées que possible ou bien vers — 10° à — 15° C et être évitée aux abords de 0° C.

Dans des conditions identiques de température, la coupe du bois vert ($u > 30\%$) est plus aisée que celle du bois séché à l'air ($u = 12—18\%$). La coupe est également plus aisée au moyen des outils de la première catégorie qu'avec ceux de la seconde.

En pratique, ces conditions peuvent être obtenues à l'usinage du bois, généralement par des mesures d'organisation.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Fraise utilisée aux essais et ses caractéristiques.

Fig. 2. — Variation de la puissance absorbée par la coupe du bois anhydre, avec des lames de scie circulaire (A) et fraises (B), en fonction de sa température.

Fig. 3. — Variation de la puissance absorbée par la coupe du bois avec 15 % d'humidité, avec des lames de scie circulaire (A) et des fraises (B), en fonction de sa température.

Fig. 4. — Variation de la puissance absorbée par la coupe du bois avec 70—100 % d'humidité, avec des lames de scie circulaire (A) et des fraises (B), en fonction de sa température.

Fig. 5. — Variation de la puissance absorbée par la coupe du bois (moyenne pour le bois d'épicéa, peuplier, hêtre et chêne) avec humidités différentes, avec des lames de scie et des fraises, en fonction de sa température.

Fig. 6. — Aspect microscopique de la section exécutée dans le bois avec des lames de scie circulaire, dans une direction parallèle aux fibres. Bois sec ($u = 8...10$ %): *a)* épicéa; *b)* peuplier (gros is ement × 125); *c)* hêtre (gros issement × 125); *d)* chêne (grossissement × 125); a_1) épicéa; b_1) peuplier; d_1 chêne (grossissement × 125). Bois humide ($u = 70...100\%$): c_1) grossissment hêtre (× 125).

Fig. 7. — Aspect microscopique de la coupe exécutée dans le bois avec des lames de scies circulaires, dans une direction perpendiculaire aux fibres. Bois sec ($u = 8...10$ %): *a)* épicéa (grossissement × 20); *b)* peuplier; *c)* hêtre; *d)* chêne (grossis ement × 10). Bois humide: ($u = 70...100$ %): a_1) épicéa (gros issement × 20); b_1) peuplier; c_1) hêtre; d_1) chêne (grossissement × 10).

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. I. Pană şi N. Ghelmeziu, *Influenţa temperaturii şi a greutăţii specifice aparente a lemnului asupra rezistenţei lui la tăiere dinamică prin aşchiere.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe tehnice şi chimice, t. VI, 1954, p. 123—132
2. V. B. Anikin, *Mehanizaţiia lesorazrabotok.* Moscova, 1950.
3. A. E. Grube, *Stanki i instrumentî po derevoobrabotke. Rejuşciie instrumentî po mehaniceskoi obrabotke drevesinî.* Moscova, 1949, vol. II.
4. P. S. Afanasiev, *Maşinî dlia derevoobrabotki.* Moscova, 1947.
5. F. Voigt, *Holzbearbeitungsmaschinen.* Berlin, 1937. Hütte des Ingenieurs Taschenbuch, vol. II, p. 767.
6. F. Kollmann, *Technologie des Holzes.* Berlin, 1936.
7. J. Petitpas, *L'usinage du bois.* Paris, 1923.
8. N. Ghelmeziu şi Gh. I. Pană, *Influenţa temperaturii asupra rezistenţei lemnului în stare complet uscată şi verde.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R. Secţia de ştiinţe biologice, agronomice, geologice şi geografice, t. IV, nr. 4, octombrie — decembrie 1952, p. 833.
9. M. D. Boiko, *Vliianie temperaturno-vlajnostnogosostoianiia drevesinî na ego procinosti.* Gosudarstvenoe izdatelstvo literaturî po stroitelstvu i arhitekture, Leningrad-Moscova, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VI, nr. 3—4, 1955

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

În această rubrică se publică lucrările de nivel ştiinţific superior, în care se expun:
— stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se totodată aspectul nou;
— generalizări asupra dezvoltărilor matematice în probleme de cercetări de mecanică aplicată;
— descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

CONSIDERAŢII ASUPRA TORSIUNII UNOR BARE CILINDRICE

DE

FL. DINCĂ

Dacă o bară cilindrică de curbă directoare (Γ) este răsucită de două momente M şi $-M$, găsirea tensiunilor în fiecare punct din bară revine la găsirea unei funcţii $\Psi(x, y)$ (sistemul de coordonate fiind ales ca în fig. 1) care să satisfacă condiţiilor

$$\Delta\Psi = 0 \text{ în } D,$$
$$\Psi = \frac{x^2 + y^2}{2} \text{ pe } \Gamma. \tag{1}$$

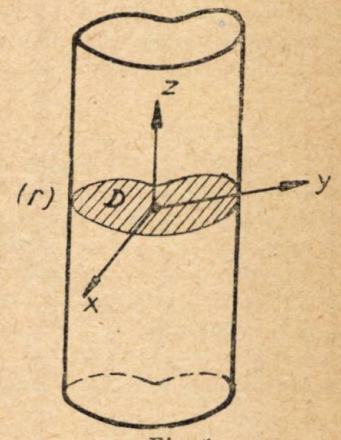


Fig. 1

Odată determinată funcţia $\Psi(x, y)$ tensiunile se găsesc prin formulele

$$\tau_{xz} = G\theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} - y\right),$$
$$\tau_{yz} = -G\theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \tag{2}$$

în care G este o constantă ce depinde de material, iar θ este unghiul cu care se răsuceşte unitatea de lungime şi care se determină cu ajutorul formulei

$$M = G\theta\iint_D \left|\Psi - \frac{x^2+y^2}{2}\right| dx\, dy. \tag{3}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1818

Funcţia

$$F(x, y) = \Psi - \frac{x^2 + y^2}{2}, \tag{4}$$

numită funcţia de tensiune, dă pentru $F = C$ liniile de forfecare. Densitatea de linii $F = C$ pe unitatea de suprafaţă a secţiunii dă indicaţii calitative asupra concentrărilor de eforturi dintr-o anumită regiune în raport cu altă regiune a secţiunii barei.

Din cele de mai sus rezultă că rezolvarea completă a problemei torsiunii implică rezolvarea unei probleme Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace.

Problema este simplă atunci cînd (Γ) este un cerc, elipsă, sau contur poligonal. Cînd însă conturul (Γ) este un poligon mixtiliniu (de exemplu în cazul profilelor laminate (Γ) se compune din arce de cerc şi drepte), problema devine mai complicată.

În cele ce urmează se studiază cîteva probleme de torsiune prin metoda reţelelor.

★

Dacă se cere să se găsească funcţia Ψ ce satisface relaţiile

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= 0 \text{ în } D, \\ \Psi &= f(x, y) \text{ pe } \Gamma, \end{aligned} \tag{1'}$$

prin metoda reţelelor, se duc două familii de drepte

$$\begin{aligned} x &= x_h = h\,l, \\ y &= y_k = k\,l. \end{aligned} \tag{5}$$

h, k, luînd toate valorile necesare pentru ca D să fie complet acoperit de reţeaua (5), formată din patrate de latură l.

Relaţiile (1') se scriu în diferenţe finite sub forma

$$\begin{aligned} \Psi_{h,k} &= \frac{\Psi_{h-1,k} + \Psi_{h+1,k} + \Psi_{h,k-1} + \Psi_{h,k+1}}{4}, \\ \Psi_{ij} &= f(x_i, y_j) = f_{ij}, \end{aligned} \tag{1''}$$

unde h şi k sînt valori ce corespund în (5) nodurilor interioare lui D, iar i, j sînt valori ce corespund tot în (5) nodurilor conturului poligonal cel mai apropiat de (Γ), f_{ij} fiind valoarea lui $f(x, y)$ pe Γ în punctul cel mai apropiat de nodul de coordonate (x_i, y_j) (fig. 2).

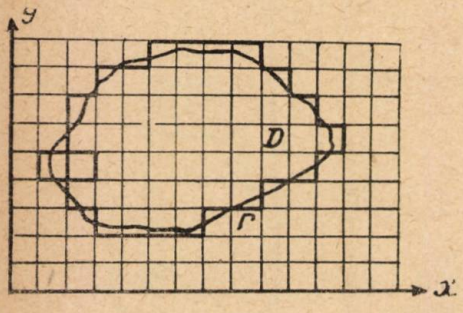


Fig. 2

Valorile Ψ_{ij} fiind fixe se iau în D o serie de valori arbitrare $\Psi^{(0)}_{hk}$. Se înlocuiesc apoi valorile $\Psi^{(0)}_{hk}$ prin $\Psi^{(1)}_{hk}$ ce rezultă din aplicarea formulelor (1'') în toate nodurile reţelei conţinute în D. Acestea se înlocuiesc la rîndul lor cu valori $\Psi^{(2)}_{hk}$ obţinute prin aplicarea aceloraşi formule. Se obţine în modul acesta şirul

$$\Psi^{(0)}_{hk}\ ,\ \Psi^{(1)}_{hk}\ ,\ \ldots\ ,\Psi^{(n)}_{hk}\ \ldots \tag{6}$$

Se demonstrează că acest şir converge către soluţia sistemului algebric (1'').

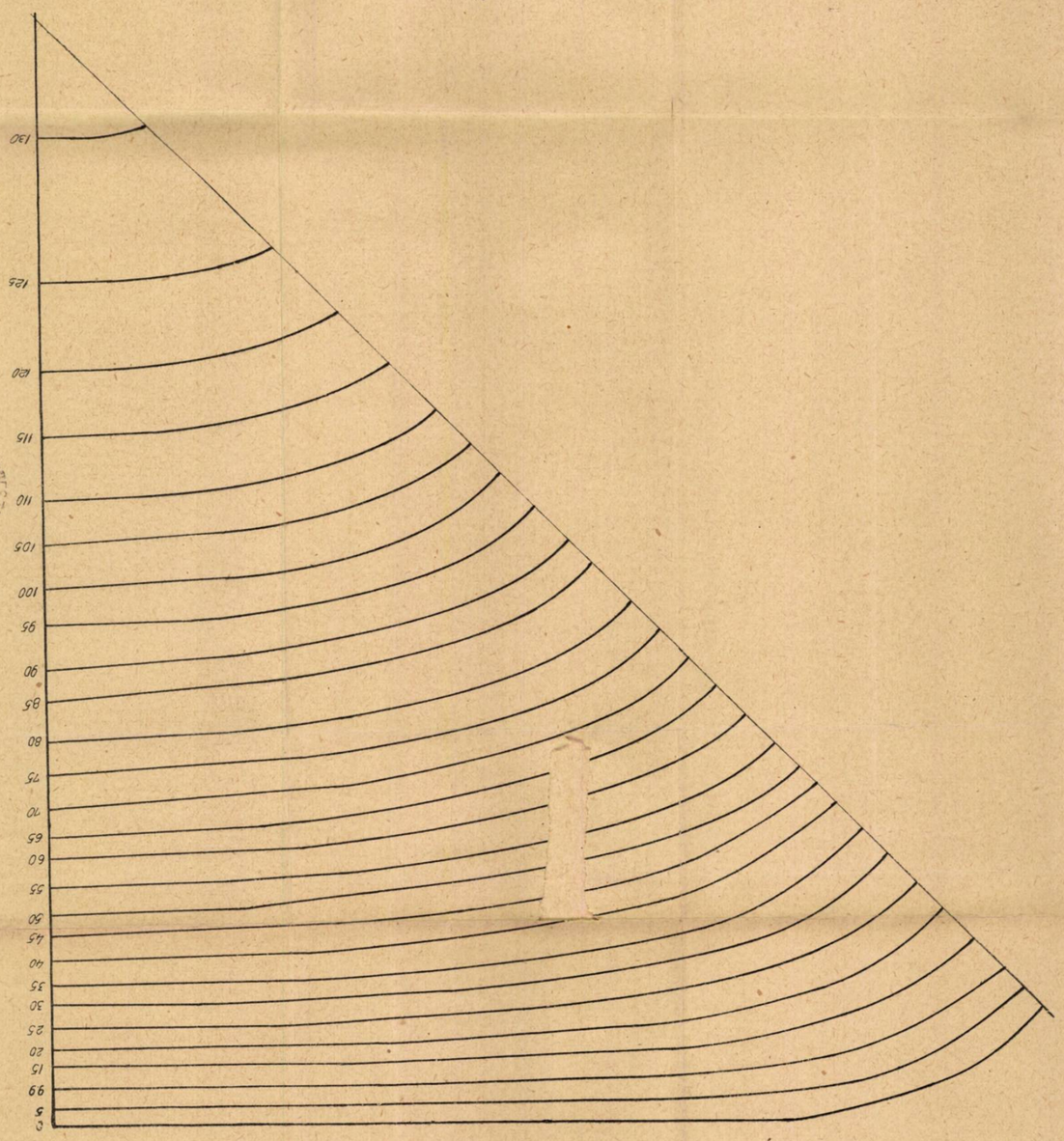
Formulele care exprimă tensiunea într-un punct se găsesc imediat cu ajutorul valorilor funcţiei în noduri. De exemplu, prima din formulele (2) se scrie

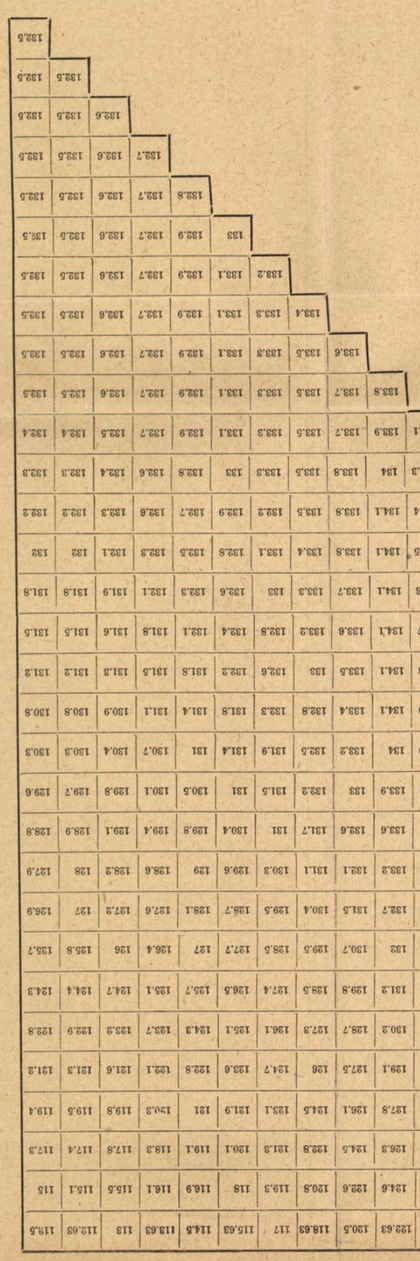
$$[\tau_{xz}]_{hk} = G\theta \left[\frac{\Psi_{h\,11,\,k} - \Psi_{h-1,k}}{2\,h} - y_k \right] \tag{2'}$$

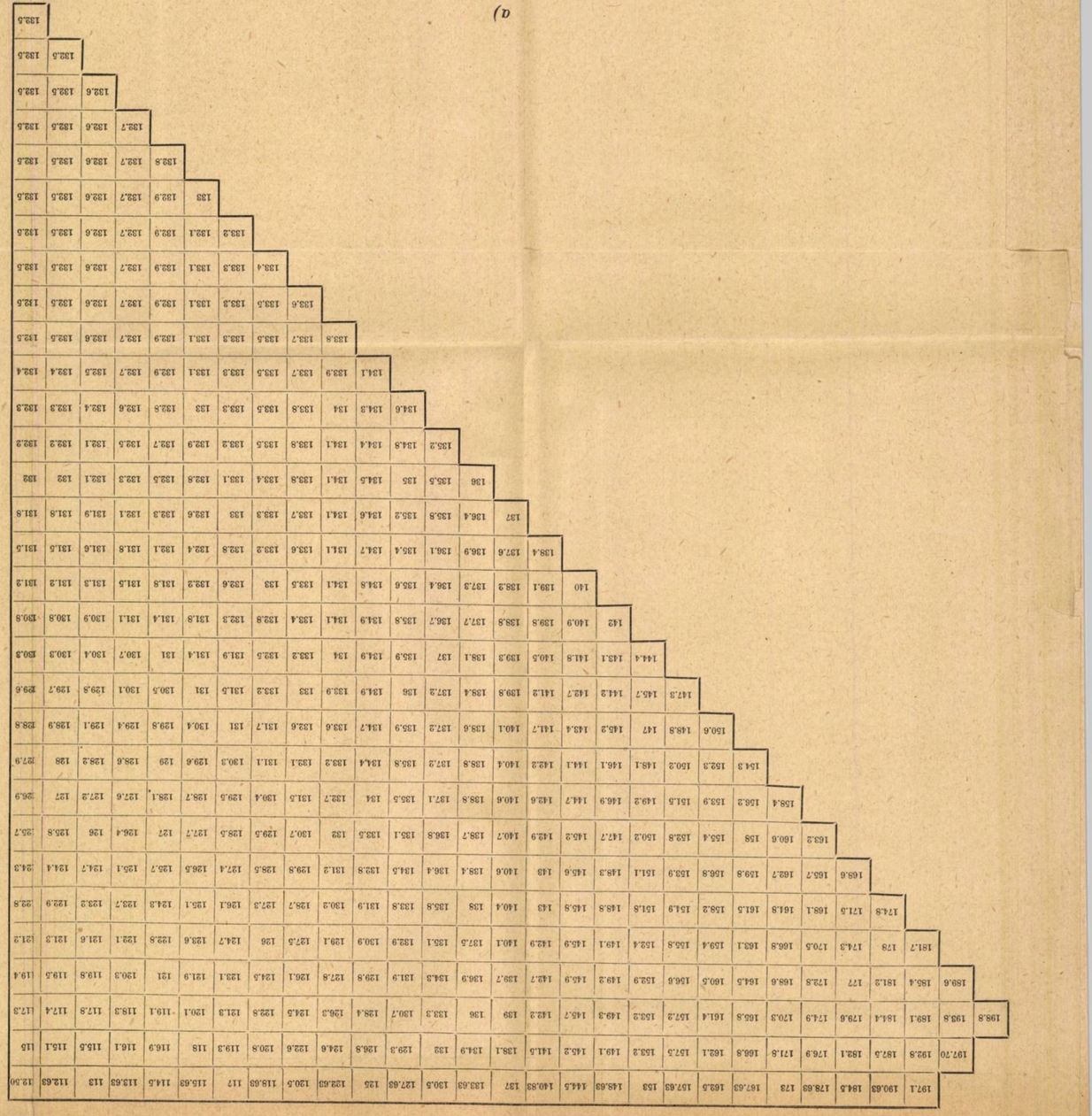
şi o formulă analogă pentru $[\tau_{yz}]_{hk}$.

★

S-a aplicat această metodă pentru trei patrate cu colţurile rotunjite, alegîndu-se o reţea cu pasul de 0,5 cm, razele cercurilor de racordare fiind respectiv $\frac{\alpha}{10}$, $\frac{\alpha}{6}$, $\frac{\alpha}{4}$ (α fiind latura pătratului). Rezultatele sînt date în figurile 3 *a)*, *b)*, *c)*, (numai pe o optime din suprafeţele pătratelor respective din cauza celor patru axe de simetrie).







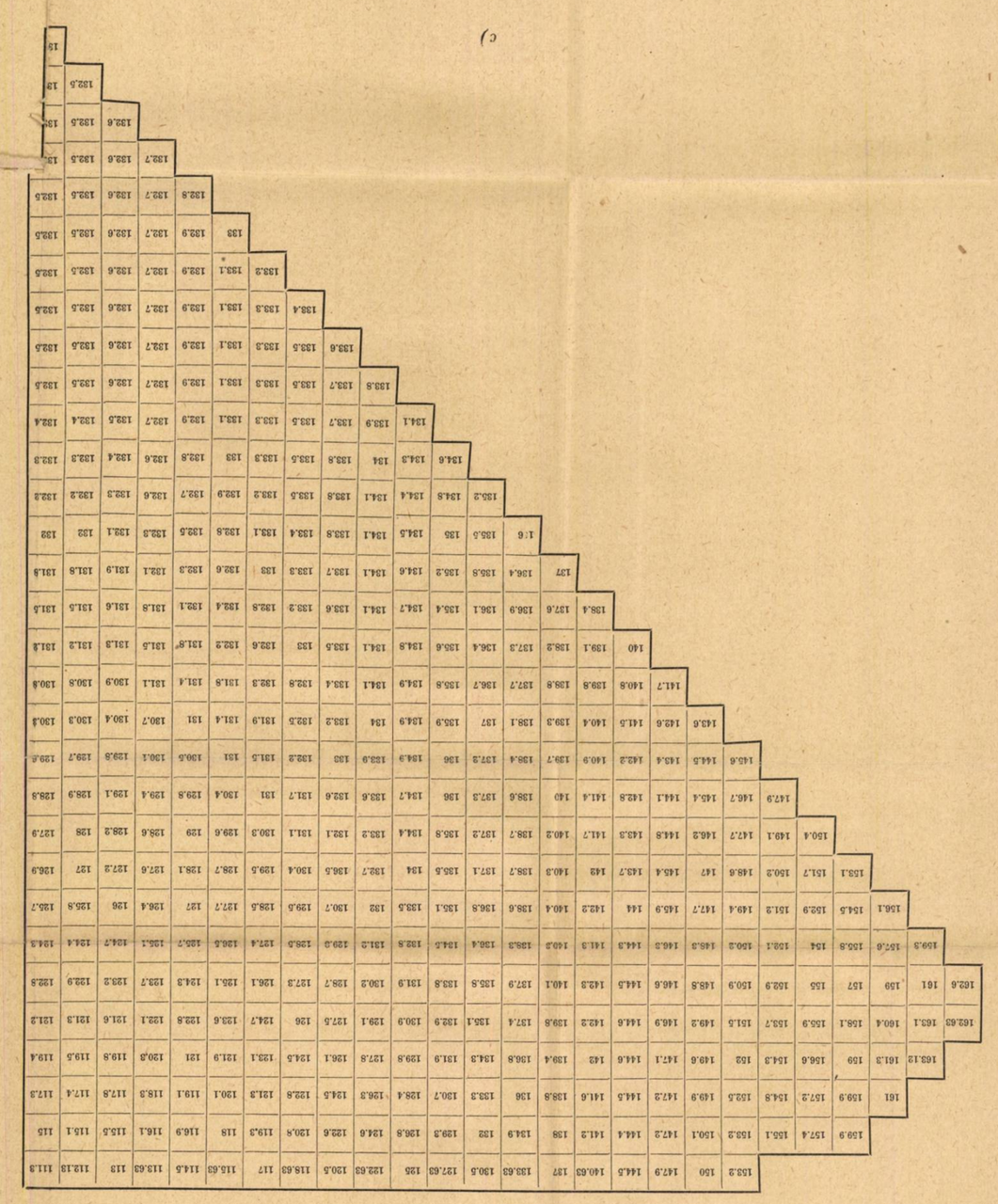


Fig. 3

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ОРДЕНА ЛЕНИНА ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

| | | |

În figura 3 *d*) sînt date liniile de forfecare în care raza cercului de racordare este $\frac{\alpha}{6}$.

Se remarcă o ușoară concentrare de eforturi către mijlocul laturii pătratului. Cu cît ne depărtăm de colț sau de mijlocul laturei către centru, liniile de forfecare devin din ce în ce mai rare, centrul secțiunii fiind liber de tensiuni.

Figura 4 arată cum se schimbă în regiunea colțului distribuția de tensiuni cînd se trece de la o anumită rază la altă rază de racordare.

În figura 4 sînt date liniile de forfecare $F = 5$ pentru toate cele trei cazuri studiate.

★

S-a mai aplicat aceeași metodă pentru torsiunea profilelor (U), anume pentru profilele U_{10}, U_{18}, U_{26}.

Funcția Ψ este intabulată în figurile 5, 6 și 7. Figura 8 reprezintă funcția F în regiunea colțului pentru profilul U_{10}.

Se remarcă, în figura 8, cum în regiunea colțului apar linii de forfecare care nu există în talpă și care dispar treptat către vîrful aripei. Acest fapt corespunde unei concentrări de tensiuni în colț, fapt constatat de altfel și experimental.

În tabloul nr. 1 se compară coeficienții η calculați prin metoda expusă și coeficienții η_1 determinați experimental. După cum se remarcă, experimental se dă numai gama de variație a acestora.

Din acest tablou reiese că rezultatele obținute prin calcul se încadrează corect în gama indicată de experiențe.

Tabloul nr. 1

Profil	1 = pasul	Calculat	η practic (determinat experimental)
10	0,1	0,99	$1 < \eta_1 < 1{,}3$
18	0,2	1,19	
26	0,2	1,06	

O concluzie care se desprinde din cele de mai sus este aceea că formulele utilizate în practică, formule ce determină pe θ ca rezultînd din descompunerea profilului dat în dreptunghiuri sînt corecte și în orice caz acoperitoare, dacă se ia $\eta = 1$.

ПО ПОВОДУ ЯВЛЕНИЯ СКРУЧИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Вопрос о кручении 6 цилиндрических брусьев разрешается сеточным методом, а именно: 3 бруса квадратного сечения, углы которых были заменены дугами с кольцами различных радиусов для каждого бруса и 3 швеллера (U) из серии употребляемых в РНР профилей. В отношении первых выводы состоят в том, что при округлении углов изменяется распределение напряжений только в районе, соответствующем замененному участку, в остальной части распределение напряжений остается прежним. В отношении остальных брусьев выводы состоят в том, что приближенные формулы, применяемые в практике, вполне достаточны.

CONSIDÉRATIONS SUR LA TORSION DE CERTAINES BARRES CYLINDRIQUES

(RÉSUMÉ)

On résoud par la méthode des réseaux, le problème de la torsion pour six barres cylindriques: trois des barres à section carrée dont les angles ont été remplacés par des arcs de cercle de rayon variable d'une barre à l'autre, et les trois profils U, de la gamme des profils U utilisés dans la République Populaire Roumaine. Pour les trois premières, on arrive à la conclusion que, par le remplacement des angles par des arcs de cercle, la distribution des tensions n'est modifée que dans les portions de la partie remplacée; dans le reste, elle demeure inchangée. Pour les trois autres, on arrive à la conclusion que les formules approximatives utilisées dans la pratique sont satisfaisantes.

BIBLIOGRAFIE

1. L. V. Kantorovici i V. I. Krîlov, *Priblijenîe metodî vîşcego analiza.* Moscova — Leningrad, 1950.
2. D. I. Panov, *Spravocinik po cislenomu diferentialnîh uravnenii ciastnîh proizvodnîh.* Moscova — Leningrad, 1951.
3. I. Petrovschi, *Prelegeri asupra teoriei ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
4. R. V. Southwell, *Relaxion Methods in Theoretical Physics.* Oxford, 1946.

CZÉGI IOZSEF, *Siklocsapágy kézikönyv.* (Manualul lagărelor de alunecare). Ed. Nehézipari könyv, Budapesta, 1953, vol. I şi II, p. 820.

Utilizarea maşinilor la turaţii ridicate a pus în faţa industriei constructoare de maşini o serie de probleme cu privire la materialele de construcţie şi la condiţiile de lubrificare. În cartea redactată de Czégi Jozsef, la care au colaborat dr. B. Ballo, dr. A. Kelemen, L. Egle şi alţii, se tratează problema lubrificaţiei în ansamblul ei. Autorii acestei lucrări, în cele două volume, care totalizează peste 800 pagini, au reuşit să prezinte sub o formă unitară şi bine închegată, problemele care se pun la lagăre, tratînd succesiv bazele teoretice, proiectarea, tehnologia fabricării şi comportarea lagărelor în exploatare.

În volumul I, autorii se ocupă cu calculul, proiectarea şi materialele de lagăre, urmînd ca în volumul al II-lea să se descrie proprietăţile mecanice, tehnologice şi de uzinare ale diferitelor aliaje de lagăre.

În primul volum, după ce se redau principiile de bază ale lubrificaţiei, se studiază teoria hidrodinamică a ungerii şi se trece, apoi, la analiza uleiurilor întrebuinţate la lagăre, indicîndu-se o serie de proprietăţi fizico-chimice. În continuare, în capitole separate, se tratează metalurgia pulberilor şi problema materialelor sintetice pentru lagăre, insistîndu-se asupra înlocuirii materialelor deficitare în construcţia lagărelor şi se arată principiile constructive ale acestora. Un capitol separat se ocupă cu problemele de calcul ale lagărelor, tratîndu-se şi cîteva exemple numerice. Volumul I se încheie cu o privire generală asupra cercetărilor efectuate în domeniul lagărelor, descriindu-se cîteva maşini de încercat, diferite metode de măsurători şi încercarea lagărelor obtinute prin metalizare.

În volumul II, după o scurtă privire asupra structurii cristaline a metalelor şi a diagramelor de echilibru, sînt examinate o serie de aliaje cu bază de cupru, cositor, plumb, cadmiu, metale uşoare etc. indicîndu-se proprietăţile lor mecanice şi de lubrificaţie. Tot aici se redă şi comportarea acestor aliaje în exploatare.

Pentru a veni în ajutorul proiectanţilor, un capitol separat se ocupă cu prezentarea recomandărilor şi standardelor maghiare, sovietice, cehoslovace, americane şi germane.

Cartea cuprinde şi o parte privitoare la tehnologia turnării şi prelucrării lagărelor din diferite aliaje, tratînd problema calităţii suprafeţii, precum şi uzinarea lagărelor obţinute prin metalizare.

Într-un ultim capitol se tratează întreţinerea şi funcţionarea lagărelor în exploatare.

Modul în care este prezentată lucrarea, atît prin nivelul teoretic şi exemplificările practice imediate, cît şi prin bogatul material documentar, diagrame şi micrografii, face ca această carte să fie foarte utilă atît cercetătorilor şi inginerilor proiectanţi, cît şi inginerilor din fabricile constructoare de maşini.

Ing. *P. Freund*

Prof. ing. PANAIT MAZILU, *Statica construcţiilor.* Editura de stat pentru arhitectură şi construcţii, 1955, vol. I., p. 548.

Un eveniment de seamă în ultimul timp în literatură ştiinţifică românească îl constituie apariţia lucrării *Statica construcţiilor* *) de prof. ing. P. Mazilu. Aşteptată cu deosebit interes, lucrarea publicată, conţinînd un bogat material, şi situată la un înalt nivel ştiinţific, formează o carte de bază atît pentru inginerii proiectanţi, cît şi pentru studenţii ce urmăresc să-şi însuşească această disciplină.

*) vol. I.

Experiența de inginer și profesor a autorului, precum și aceea de cercetător în domeniul mecanicii construcțiilor, face ca *Statica construcțiilor* să fie întocmită cu deosebită competență. Organizarea și împărțirea justă a materiei, precum și expunerea problemelor uneori dificile, sub o formă clară, dovedesc o îndelungată frămîntare din partea autorului, a subiectelor. Exemplele de calcul numeroase, după fiecare capitol, alese dintre cele mai tipice, fac ca teoria expusă să fie ilustrată imediat de cazuri practice.

Cartea conținînd teoria sistemelor static determinate este împărțită în șapte capitole.

Primul capitol fixează cadrul *Staticii construcțiilor* și ipotezele ce stau la baza acestei discipline.

În general, deformările corpurilor fiind foarte mici, ecuațiile de echilibru static se scriu pe starea nedeformată a corpului (ipoteza corpurilor perfect rigide din Mecanica Teoretică). Acest lucru nu mai poate fi făcut în cazul sistemelor ale căror legături se modifică în timpul deformării, în cazul firelor și în cazul construcțiilor cu deformări mari, cînd, pentru a obține rezultate apropiate de realitate, trebuie să se scrie ecuațiile de echilibru pe starea deformată. Observațiile făcute asupra sistemelor critice precum și necesitatea evitării lor în construcții, sînt cît se poate de utile.

Admițîndu-se, de asemenea, pentru deformații mici, proporționalitatea între eforturi și deformații, se poate aplica «suprapunerea liniară a efectelor». Se delimitează astfel precis obiectul *Staticii construcțiilor* sub forma «statica liniară a sistemelor de bare» cu premisele fundamentale:

1. ecuațiile de echilibru static se scriu pe starea nedeformată;
2. se admite principiul suprapunerii efectelor.

Capitolul II se ocupă de metodele generale de calcul în *Statica construcțiilor*. Punîndu-se în evidență prin metoda secțiunilor eforturile într-o secțiune, se enunță cele două metode generale de calcul, pentru echilibrul static:

1. metoda ecuațiilor de echilibru;
2. metoda lucrului mecanic virtual.

Pentru aplicarea celei de a doua metode, sistemul trebuind să permită deplasări, prin suprimarea unor legături, devine sistem cinematic. Autorul consacră un studiu atent și foarte prețios analizei cinematice a sistemelor de solide cu grade de libertate.

Diagramele de eforturi sînt deduse prin cele două metode generale, punîndu-se în evidență avantajul metodei lucrului mecanic virtual.

Studiul liniilor de influență este făcut și el analitic și prin lucrul mecanic virtual. Metoda lucrului mecanic virtual este aplicată o dată în modul obișnuit (dîndu-se și o soluție generală a liniei de influență) precum și aplicat prin diagrama vitezelor.

În capitolul III, intitulat *Grinzi drepte*, se studiază amănunțit diferitele probleme la tipurile de grinzi ce intră în această clasificare: grinzi simplu rezemate, grinzi încastrate și cu console, grinzi cu console și articulații, grinzi drepte cu reazeme și forțe înclinate, sisteme de grinzi drepte (cadre etc.).

Calculul eforturilor se face prin cele două metode, analitică și grafică, iar liniile de influență, analitic și prin lucru mecanic virtual. Exemplele numeroase și bine alese de la sfîrșitul acestui capitol constituie o completare prețioasă pentru buna asimilare a problemelor. Observațiile asupra sistemelor simetrice, încărcate simetric sau antisimetric, sînt deosebit de importante, pentru ușurarea calculului, atît la sistemele static determinate, cît și la cele static nedeterminate, unde, primele intervin ca forme de bază.

Capitolul IV se ocupă de grinzi cu zăbrele. Arătîndu-se condiția ca sistemul să fie geometric, nedeformabil, $b=2\,n-3$, unde b este numărul de bare, iar n, numărul de noduri, se atrage atenția asupra faptului că această condiție nu este suficientă, sistemele de grinzi cu zăbrele trebuind să îndeplinească în plus și condiția de strictă nedeformabilitate (să nu fie sisteme critice).

Pentru determinarea eforturilor în bare se arată folosirea metodei secțiunilor (metoda analitică, grafică), metodei separării nodurilor (analitic sau grafic — epură Maxwell-Cremona), metodei înlocuirii barelor, și metodei celor două secțiuni, ca metodele cele mai uzuale.

Liniile de influență pentru eforturile în barele grinzilor cu zăbrele sînt deduse analitic și prin deplasări virtuale, ultima cale fiind mult folosită și reușind să-și impună avantajele. În cazurile unde, prin deplasări virtuale, ar trebui determinate prea multe centre instantanee, se arată folosirea metodei diagramei vitezelor, pentru determinarea eforturilor și a liniilor de influență.

De o deosebită importanță este paragraful consacrat formelor critice de sisteme din bare articulate, caracterizate prin eforturi infinite, în cazul exprimării ecuațiilor de echilibru static în forma nedeformată, pentru un sistem general de sarcini sau prezentînd grade de nedeterminare statică pentru anumite încărcări particulare, cu toate că sistemele respectă condiția de nedeformabilitate geometrică. Pentru recunoașterea acestor sisteme critice, ce nu trebuie

folosite în construcții, sînt expuse metoda analitică « a sarcinii zero » (dacă pentru sarcini nule în toate nodurile sistemului, pot exista și alte soluții diferite de zero pentru eforturile în bare, sistemul este o formă critică), și metodele cinematice (folosirea centrelor instantanee și a diagramei vitezelor).

Se studiază de asemenea, influența formei grinzii asupra eforturilor din bare, pentru o grindă cu o singură deschidere, cu montanți verticali și diagonale toate descendente sau ascendente spre mijlocul grinzii în cazul încărcării cu greutatea permanentă și utilă, uniform distribuită.

Capitolul V se ocupă de arce sau sisteme cu împingeri, ca bare curbe, supuse la forțe în planul lor. Stabilindu-se relațiile diferențiale între eforturi și încărcări, se trece la studiul amănunțit al arcului cu trei articulații. În cazul încărcărilor fixe, se arată cum se obține o axă rațională pentru eforturi, căutînd ca axa arcului să corespundă cu curba de presiune a încărcărilor. Liniile de influență la arcul cu trei articulații sînt analizate pe larg prin metoda analitică și a lucrului mecanic virtual, în plus arătîndu-se obținerea liniilor de influență ale momentelor la limitele sîmburelui central.

Se examinează apoi arcele cu articulație și reazem simplu, interesante nu atît din punct de vedere constructiv, cît și din acela al rezolvării arcelor static nedeterminate, apoi arcele cu trei articulații și tirant, arcele cu trei articulații și console, arcele cu zăbrele, dîndu-se atît rezolvarea lor la sarcini fixe, cît și liniile de influență pentru eforturile în bare.

Sistemele mixte (cu grindă de rigidizare) sînt tratate în mod detaliat de autor, ele reprezentînd formele de bază static determinate pentru sistemele constructive de acest gen, în general static nedeterminate. Analiza amănunțită și observațiile ce le însoțesc, lămuresc clar majoritatea problemelor ce intervin la calculul acestor sisteme, folosite în special la poduri, probleme tratate insuficient în literatura cunoscută.

Un ultim paragraf este consacrat sistemelor suspendate fără grindă de rigidizare.

Capitolele VI și VII se ocupă de sistemele static determinate în spațiu. Conlucrarea spațială a sistemelor constructive constituie una din preocupările ce își face din ce în ce mai mult loc în mecanica construcțiilor. Căutînd să se pună în evidență comportarea reală a elementelor de construcții, făcînd parte din sistemul spațial, se ajunge la forme de construcții raționale și economice. Dezvoltarea largă dată celor două capitole și problemelor prezentate, constituie un prețios material documentar în această direcție, manualele de statica construcțiilor apărute pînă acum tratînd aceste probleme în mod sumar și nesatisfăcător.

Capitolul VI cuprinde studiul grinzilor cu zăbrele în spațiu. Stabilirea criteriilor de recunoaștere a cazurilor critice, adică ace'e cazuri cînd cele șase bare de legătură nu asigură imobilitatea perfectă a corpului față de teren, precum și a posibilității de determinare a reacțiunilor fără a recurge la sistemul complet de ecuații, comportă un deosebit interes. Determinarea eforturilor în bare se face prin metoda separării nodurilor (analitic și grafic) metoda secțiunilor și metoda înlocuirii barelor. Cum însă în multe cazuri, aceste metode sînt dificil de aplicat, se prezintă și anumite metode particulare de rezolvare pentru anumite sisteme constructive ca:

— metoda descompunerii sistemului spațial în mai multe sisteme plane;

— calculul eforturilor în sistemele denumite « biconstrucții », după A. A. Umanski.

Exemplele de calcul numeroase de la sfîrșit completează în mod util capitolul.

Capitolul VII se ocupă de grinzi drepte și curbe în spațiu. După o analiză atentă a condițiilor de rezemare, se studiază grinda dreaptă în spațiu, deducîndu-se relațiile diferențiale între sarcini, eforturi și elementele geometrice. Grinzile curbe plane, încărcate normal pe planul lor, au o extindere mai mare. Se deduc pentru ele relațiile diferențiale, diagramele de eforturi, liniile de influență. Materia expusă aici prezintă avantajul de a fi mult mai clară și completă în comparație cu expunerea din alte manuale. De un interes mai mult teoretic este paragraful consacrat grinzilor curbe strîmbe precum și exemplul de grindă elicoidală de la sfîrșitul capitolului.

Înaltul nivel științific și concepția unitară ce străbate toată lucrarea, contribuțiile personale, prezentarea clară și exemplele numeroase, alese cu o deosebită grijă, fac din *Statica construcțiilor* de prof. P. Mazilu, o operă cu totul valoroasă, utilă atît inginerilor proiectanți, cît și studenților de la facultățile de construcție.

Cu deosebit interes, ce se raportează și la o acută necesitate practică, se așteaptă apariția vol. II, cuprinzînd sistemele static nedeterminate.

Vasile Ille

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

STUDII ŞI CERCETĂRI

DE

MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VI 1955

INDICE ALFABETIC

MECANICA ŞI REZISTENŢA MATERIALELOR	Nr.	Pag.
ARCAN M. şi NICOLAU ED., Metodă grafică pentru separarea tensiunilor principale în fotoelasticitate	3–4	491
PÎRVULESCU N. S., Flambajul tijelor verticale încastrate la extremitatea inferioară şi adîncimile critice ale pompelor cu prăjini tubulare	1–2	17
PÎRVULESCU N. S., Integrarea ecuaţiei liniei elastice în instabilitatea de rotaţie a tijelor verticale	3–4	501
SOARE MIRCEA, Studiul stării de eforturi în plăcile curbe subţiri în formă de suprafeţe cu două parabole directoare şi plan director în teoria de membrană	3–4	513
VISARION VIOREL, Starea de eforturi şi de momente pure ale suprafeţei subţiri sferice	3–4	535
VOINEA RADU P., Observaţii asupra principiului lucrului mecanic virtual	1–2	9
AEROMECANICĂ		
CARAFOLI E. şi DUMITRESCU L., Asupra aripii delta subţiri dublu-conice cu incidenţă variabilă, în curent supersonic	3–4	237
CONSTANTINESCU V. N., Consideraţii asupra vriei permanente a avioanelor	1–2	73
DRESCHER I., Asupra ventilaţiei băilor industriale prevăzute cu suflantă şi aspirator marginal	1–2	67
HACKER TIBERIU, Contribuţii la studiul stabilităţii longitudinale a avionului în evoluţiile cele mai defavorabile	3–4	269
MARINESCU AL. şi SĂVULESCU ŞT., Cercetări experimentale asupra repartiţiei circulaţiei de-a lungul anvergurii pe aripa eliptică dreaptă şi în săgeată	1–2	39
MARINESCU AL., Problema stabilităţii elicopterului cu rotor antrenat prin jet în zbor la punct fix	3–4	299
NEDELESCU I., Determinarea experimentală a distribuţiei presiunii datorite vîntului pe acoperişuri de tribune	1–2	59
PATRAULEA N. şi STĂNESCU C., Teoria mişcărilor subsonice cu dîră aproape rectilinie	3–4	259
RADO GH., Contribuţii la studiul coeficientului de umplere al pulsoreactoarelor	3–4	315
HIDROMECANICĂ		
DUMITRESCU D. şi IONESCU DAN GH., Asupra mişcării turbulente a unui lichid greu într-o conductă circulară netedă	3–4	323
DUMITRESCU D., IONESCU V. şi TOTH R., Aplicarea metodei reţelelor la studiul mişcării fluidelor grele cu suprafaţa liberă	3–4	339
OROVEANU T., Asupra unei probleme de scurgere spre sondă în cazul unei variaţii oarecare a permeabilităţii	3–4	333

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

	Nr.	pag.
FROIMESCU A. și ILLE V., Influența compoziției mineralogice a cimentului asupra proprietăților fizico-mecanice ale betonului și betonului armat. Curgere lentă	3—4	589
MIHAILESCU MIRCEA și UNGUREANU ION, Încercări la compresiune pe betoane confecționate cu trei tipuri de ciment	3—4	545
WEISSENBERG M. și CIUNGU S., Influența compoziției mineralogice a cimentului asupra adeziunii dintre beton și armătură	3—4	571

INCERCĂRI DE MATERIALE ȘI TEHNOLOGIE

DUMITRESCU T., NICOLAID M. și ILIESCU P., Studiu asupra comportării fontelor cu grafit nodular la temperaturi înalte	1—2	127
PANĂ GH. I., Contribuții la stabilirea influenței diferitelor tratamente higro și hidrotermice asupra proprietăților fizico-mecanice ale lemnului de fag.....	1—2	161
PANĂ GH. I., Cercetări asupra puterii absorbite la tăierea lemnului prin așchiere, în funcție de temperatura și umiditatea sa.....	3—4	607

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

CONSTANTINESCU V. N., Considerații asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze	3—4	377
ROZEANU L. și PREOȚESCU O., Cîteva aspecte ale utilizării uleiurilor lubrifiante din grupe standardizate inferioare	1—2	107
ROZEANU L. și PREOȚESCU O., Clasificarea lubrifianților de motoare după criteriul viscozității.....	3—4	401
TIPEI N., Încercări experimentale pe lagăre cu alunecare	1—2	89

VIBRAȚII

HAMBURGER L., Asupra fundațiilor cu pături elastice intermediare ale mașinilor generatoare de șocuri și trepidații periodice.....	3—4	433
MIȘICU M., Asupra determinării vibrațiilor proprii ale construcțiilor	3—4	447
PROCOPOVICI E. și TANASICIUC C., Analogiile electrice ale vibrațiilor mecanice	3—4	473
RĂUTU SANDU și IFRIM MIHAIL, Unele probleme ale vibrațiilor proprii la construcțiile cu mai multe etaje	3—4	457

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

ARCAN M. și NICOLAU E., Determinare exactă a diferenței tensiunilor principale prin fotoelasticimetrie cu compensatorul «Coker».	1—2	181
DINCĂ FL., Considerații asupra torsiunii unor bare cilindrice.....	3—4	617
FROIMESCU A., Grinzi continue din beton precomprimat și folosirea lor la realizarea grinzilor principale de poduri	1—2	187
STROIESCU I., Un model nou de anemograf	1—2	217

RECENZII

CZÉGI IOZSEF, Siklocsapágy kézikönyv (Manualul lagărelor de alunecare), de *Freund P.*	3—4	621
GOLDENVAIZER A. L., Teoria uprughih tonkih obolocek (Teoria pînzelor subțiri elastice), de *Solomon Liviu*	1—2	221
MAZILU PANAIT, Statica construcțiilor, de *Ille Vasile.*	3—4	621
Rasciotîi na procinost jestkost i polizuciest elementov mașinostroitelnih konstrukții (Calcule de rezistență, rigiditate și fluaj ale elementelor de mașini), de *Marcu V.*.....	1—2	222

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА VI ЗА 1955 ГОД

	№	Стр.
МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ		
АРКАН М. и НИКОЛАУ Э., Графический метод отделения основных напряжений в фотоэластичности	3—4	491
ВИСАРИОН В., Состояние чистых усилий и моментов тонких сферических поверхностей	3—4	535
ВОЙНЯ Р. П., К исследованию принципа виртуальной механической работы	1—2	9
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Изгиб вертикальных штоков с вделанным нижним концом и критические глубины для насосов с трубчатыми штангами	1—2	17
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С. Интегрирование уравнения упругой линии в вопросе неустойчивости вертикальных стержней при их вращательном движении	3—4	501
СОАРЕ М., Исследование состояния усилий на тонких оболочках	3—4	513
АЭРОМЕХАНИКА		
ГАКЕР Т., К вопросу о продольной устойчивости самолета при самых невыгодных условиях полета	3—4	269
ДРЕШЕР И., Вентиляция применяемых в промышленности ванн с продувающим и расположенным на краю их аспирационным устройством	1—2	67
КАРАФОЛИ Е. и ДУМИТРЕСКУ Л., О двуконических тонких крыльях дельта с переменным углом атаки в сверхзвуковом потоке	3—4	237
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Об установившемся штопоре самолетов	1—2	73
МАРИНЕСКУ А. и СЭВУЛЕСКУ Ш., Экспериментальные исследования распределения циркуляции вдоль размаха прямого и стреловидного элиптического крыла	1—2	39
МАРИНЕСКУ А., Вопрос об устойчивости вертолета с ротором, приводимым в действие посредством струи в полете по вертикали	3—4	299
НЕДЕЛЕСКУ И., Экспериментальное определение распределения давления ветра на крыши трибун	1—2	59
ПАТРАУЛЯ Н. и СТЭНЕСКУ К., Теория дозвуковых движений с почти прямолинейным следом	3—4	259
РАДО Г., К вопросу о коэффициенте наполнения пульсореактора	3—4	315
ГИДРОМЕХАНИКА		
ДУМИТРЕСКУ Д. и ИОНЕСКУ Д., О турбулентном движении тяжелой жидкости в круглой гладкой трубе	3—4	323
ДУМИТРЕСКУ Д., ИОНЕСКУ В. и ТОТ Р., Применение метода сеток при изучении безнапорного движения тяжелых жидкостей	3—4	339
ОРОВЯНУ Т., О притоке нефти к буровой скважине при некотором изменении проницаемости породы	3—4	333

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ВЕЙССЕНБЕРГ М. и ЧУНГУ С., Влияние минералогического состава цемента на сцепление бетона с арматурой . . . . . 3—4 571

МИХЭЙЛЕСКУ М. и УНГУРЯНУ И., Испытание на сжатие бетонов из трех типов цемента . . . . . 3—4 545

ФРОИМЕСКУ А. и ИЛИЕ В., Влияние минералогического состава цемента на физико-механические свойства бетона и железобетона (медленная текучесть) . . . . 3—4 589

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕХНОЛОГИЯ

ДУМИТРЕСКУ Т., НИКОЛАИД М. и ИЛИЕСКУ П., Исследование изменения свойств чугунов с узелковым графитом при высоких температурах . . . . . 1—2 127

ПАНЭ Г. И., К вопросу об установлении влияния различных гидро и гидротехнических обработок на физико-механические свойства древесины бука . . . . . 1—2 161

ПАНЭ Г. И., Исследования поглощаемой мощности при механической обработке дерева в зависимости от его температуры и влажности . . . . . 3—4 607

СМАЗКА, ТРЕНИЕ И ИЗНОС

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., К расчету круглых бесконечно удлиненных подшипников с газовой смазкой . . . . . 3—4 377

РОЗЯНУ Л. и ПРЕОЦЕСКУ О., К вопросу об использовании смазочных масел низших стандартных сортов . . . . . 1—2 107

РОЗЯНУ Л. и ПРЕОЦЕСКУ О., Классификация смазочных веществ для двигателей по признаку вязкости . . . . . 3—4 401

ТИПЕЙ Н., Экспериментальные испытания подшипников скольжения . . . . . 1—2 89

ВИБРАЦИИ

ГАМБУРГЕР Л., О фундаментах с эластичной промежуточной постелью для машин, у которых возникает биение и периодические колебания . . . . . 3—4 433

МИШИКУ М., Об определении собственных вибраций конструкций . . . . . 3—4 447

ПРОКОПОВИЧ Е. и ТАНАЩУК К., Электрическая аналогия механических колебаний 3—4 473

РЭУТУ С. и ИФРИМ М., Некоторые вопросы о собственных колебаниях многоэтажных конструкций . . . . . 3—4 457

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

АРКАН М. и НИКОЛАУ Е., Точное определение разницы основных напряжений путем измерения фотоэластичности при помощи компенсатора Кокера . . . . 1—2 181

ДИНКА Ф., По поводу явления скручивания цилиндрических брусьев . . . . . 3—4 617

СТРОЕСКУ И., Новая модель анемографа . . . . . 1—2 217

ФРОИМЕСКУ А., Неразрезные балки из предварительно сжатого бетона и использование их в качестве основных мостовых балок . . . . . 1—2 187

РЕЦЕНЗИИ

ЦЕГИ И., Siklocsapágy kézikönyv. Подшипники скольжения. Учебник. *(Фреунд П.)* 3—4 821

ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР А. Л., Теория упругих тонких оболочек *(Соломон Ливиу)* . . . 1—2 221

МАЗИЛУ П., Статика конструкций. *(Илле Василе)* . . . . . 3—4 621

Расчет на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций. *(Марку В.)* . . . . . 1—2 222

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VI 1955

INDEX ALPHABÉTIQUE

MÉCANIQUE ET RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX	N°	Page
ARCAN M. et NICOLAU ED., Méthode graphique de séparation des tensions principales dans la photoélasticité	3–4	491
PÎRVULESCU N. S., Le flambage des tiges verticales encastrées à l'extrémité inférieure et les profondeurs critiques des pompes à tiges tubulaires	1–2	17
PÎRVULESCU N. S., Intégration de l'équation de la ligne élastique dans l'instabilité de rotation des tiges verticales	3–4	501
SOARE MIRCEA, Étude de l'état des efforts dans les voiles minces ayant la forme de surfaces admettant deux paraboles directrices et un plan directeur, dans la théorie de membrane	3–4	513
VISARION VIOREL, État d'efforts et de moments purs de la surface mince sphérique	3–4	535
VOINEA RADU P., Observations sur le principe du travail mécanique virtuel	1–2	9
AÉROMÉCANIQUE		
CARAFOLI E. et DUMITRESCU L., Sur les ailes delta minces, doublement coniques, à incidence variable, en courant supersonique	3–4	237
CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur la vrille permanente des avions	1–2	73
DRESCHER I., Au sujet de la ventilation des bains industriels pourvus d'une soufflante et d'un aspirateur marginal	1–2	67
HACKER TIBERIU, Contribution à l'étude de la stabilité longitudinale de l'avion dans les évolutions les plus défavorables	3–4	269
MARINESCU AL. et SĂVULESCU ŞT., Recherches expérimentales sur la répartition de la circulation le long de l'envergure d'une aile elliptique, droite et en flèche	1–2	39
MARINESCU AL., Le problème de la stabilité de l'hélicoptère à rotor entraîné par jet en vol en un point fixe	3–4	299
NEDELESCU I., Détermination expérimentale de la distribution des pressions dues au vent sur les toitures des tribunes.	1–2	59
PATRAULEA N. et STĂNESCU C., Théorie des mouvements subsoniques au sillage presque rectiligne	3–4	259
RADO GH., Contribution à l'étude du coefficient de remplissage des pulsoréacteurs	3–4	315
HYDROMÉCANIQUE		
DUMITRESCU D. et IONESCU DAN GH., Sur le mouvement turbulent d'un liquide pesant dans une conduite circulaire lisse	3–4	323
DUMITRESCU D., IONESCU V. et TOTH R., L'application de la méthode des réseaux à l'étude du mouvement des fluides pesants à surface libre.	3–4	339
OROVEANU T., Sur le problème de l'écoulement vers un puits de pétrole dans le cas d'une variation quelconque de la perméabilité.	3–4	333

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS N° Page

FROIMESCU A. et ILLE V., Influence de la composition minéralogique du ciment sur les propriétés physico-mécaniques du béton et du béton armé-fluage ..... 3—4 589

MIHAILESCU MIRCEA et UNGUREANU ION, Essais de résistance à la compression des bétons préparés avec trois qualités de ciment ..... 3—4 545

WEISSENBERG M. et CIUNGU S., Influence de la composition minéralogique du ciment sur l'adhésion entre le béton et les armatures ..... 3—4 571

ESSAIS DES MATÉRIAUX ET TECHNOLOGIE

DUMITRESCU T., NICOLAID M. et ILIESCU P., Étude sur le comportement des fontes à graphite nodulaire à des températures élevées ..... 1—2 127

PANĂ GH. I., Contribution à l'établissement de l'influence des différents traitements hygro- et hydrothermiques sur les propriétés physico-mécaniques du bois de hêtre ..... 1—2 161

PANĂ GH. I., Recherches sur la puissance absorbée à la coupe du bois par détachement en copeaux, en fonction de sa température et de son humidité ..... 3—4 607

LUBRIFICATION, FROTTEMENT, USURE

CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur le calcul des paliers circulaires d'allongement infini, lubrifiés aux gaz ..... 3—4 377

ROZEANU L. et PREOȚESCU O., Quelques aspects de l'utilisation des huiles lubrifiantes des groupes standardisés inférieurs ..... 1—2 107

ROZEANU L. et PREOȚESCU O., Classification des lubrifiants des moteurs d'après le critérium de la viscosité ..... 3—4 401

TIPEI N., Recherches expérimentales sur les paliers lisses ..... 1—2 89

VIBRATIONS

HAMBURGER L., Sur les fondations à couches élastiques intermédiaires des machines génératrices de chocs et de trépidations périodiques ..... 3—4 433

MIȘICU M., Sur la détermination des vibrations propres des constructions ..... 3—4 447

PROCOPOVICI E. et TANASICIUC C., Analogies électriques des vibrations mécaniques ..... 3—4 473

RĂUTU SANDU et IFRIM MIHAIL, Certains problèmes des vibrations propres dans le cas des constructions à plusieurs étages ..... 3—4 457

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

ARCAN M. et NICOLAU E., La détermination exacte de la différence des tensions principales par la photoélasticimétrie, à l'aide du compensateur « Coker » ..... 1—2 181

DINCĂ FL., Considérations sur la torsion de certaines barres cylindriques ..... 3—4 617

FROIMESCU A., Poutres continues en béton précontraint et leur emploi à la réalisation des poutres des ponts. ..... 1—2 187

STROIESCU I., Un nouveau modèle d'anémographe ..... 1—2 217

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

CZÉGI IOZSEF, Siklocsapágy kézikönyv (Manuel des paliers lisses), par *Freund P.*... 3—4 621

GOLDENVAIZER A. L., Téoria ouprouguikh, tonkikh obolotchék, (Théorie des voiles minces élastiques), par *Solomon Liviu.* ..... 1—2 221

MAZILU PANAIT, Statique des constructions, par *Ille Vasile* ..... 3—4 621

Rastchiotyi na protchinost, jestkost i polizoutchiést élémentov machinostroitzelnykh konstrouktzii (Calculs de la résistance, de la rigidité et du fluage des machines), par *Marcu V.* ..... 1—2 222

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

1000